MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

58. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

58. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

9183-50番

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

9183-58

Inhalt des 58. Bandes.

Seite

BARTHEL, W., Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie 358

BRAUER, A., On a new class of Hadamard determinants 219

BRAUER, A., On the Distribution of the Jacobian Symbols 226

BEHRENS, E.-A., Assoziativ auflösbare Ringe 25

CLOWES, J. S., and K. A. HIRSCH, Simple Groups of Infinite Matrices 1

FÖLLINGER, O., Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten 98

FOSTER, A. L., Generalized "Boolean" theory of universal algebras 306

GAIER, D., Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren 453

GAIER, D., Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze 456

GAIER, D., und A. PEYERIMHOFF, Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen 232

GASCHÜTZ, W., Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen 160

GROTEMEYER, K. P., Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand 41

GROTEMEYER, K. P., Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist 272

HADWIGER, H., Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit . . . 4

HÄMISCH, W., Die Hauptnorm als Determinante über endlichrangigen Algebren mit Einselement 171

HELLWIG, G., Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern 337

HUPPERT, B., Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen 243

INGRAHAM, R. L., Linear Connection in Spin-Collineation Space 265

JURKAT, W., und A. PEYERIMHOFF, Summierbarkeitsfaktoren 186

KNESER, M., Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen 459

KNESER, M., and D. PUPPE, Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten 376

LADEGAST, K., Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen 115

LORENZEN, P., Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen . . . 15

MAASS, H., Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen 385

NICKEL, K., Lösung von zwei verwandten Integralgleichungssystemen 49

NEUMER, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I 391

RICHERT, H.-E., Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II 71

RICHERT, H.-E., Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem . 204

Seite

RIEGER, G. J., Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems 281

SCHÄFKE, F. W., Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen 436

SKOVGAARD, H., Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$ 448

TILLMANN, H. G., Spektraltheoriefreie Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum . . 85

UNKELBACH, H., Über die Approximation schlichter konformer Abbildungen durch kongruente Iterationen spezieller sterniger oder konvexer konformer Abbildungen 63

VOLKMANN, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. I. 284

WITT, E., Über freie Ringe und ihre Unterringe 113

ZELLER, K., *FK*-Räume und Matrixtransformationen 46

ZELLER, K., *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I 288

ZELLER, K., *FK*-Räume in der Funktionentheorie. II 414

CLOWES, J. S., and K. A. HIRSCH
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 1—3 (1953)

Simple Groups of Infinite Matrices.

By
J. S. CLOWES and K. A. HIRSCH.

Several examples of infinite simple groups have been given in recent years. Apart from the alternating group on a set of any cardinal we mention (i) groups in which all elements other than unity form a single conjugate class [1]; (ii) a finitely generated infinite simple group [2]; (iii) an ordered group which is algebraically simple [3]; (iv) free products which are simple groups [4].

In this paper we present a new type of simple groups consisting of infinite matrices associated with an arbitrary field. These examples have arisen from a study of the rings of endomorphisms of countable primary Abelian groups[1]).

Let $\mathfrak{F}$ be an arbitrary field. We consider infinite row-finite matrices $A=(a_{ij})$ with coefficients in $\mathfrak{F}$ satisfying the following condition: *There exists an integer* $N=N(A)$ *such that*

(i) $\quad$ *for* $j>N$: $\quad a_{jj}=1$ *and* $a_{ij}=0$, if $i\neq j$;

(ii) $\quad$ *the determinant* $\|a_{ij}\|=1 \qquad (i,j=1,2,\ldots,N(A))$.

It is easy to see that the set of all such matrices forms a group $G=G(\mathfrak{F})$.

Theorem. *$G(\mathfrak{F})$ is a simple group.*

We conduct the proof in three stages. In (1) we give a set of generators for G of a special form; in (2) we show that all these generators are conjugate to each other so that G can be generated by a single element and its conjugates; in (3) we construct one of these generators from an arbitrary matrix A of G and its conjugates.

(1) Let $E_{ij}(x)$ $(i\neq j)$ be the matrix which arises from the infinite unit matrix E by inserting the element x of $\mathfrak{F}$ at the place (i,j). Let G' be the group generated by the matrices $E_{ij}(x)$ and their conjugates. We show that $G'=G$. It is quite clear that for a fixed N the matrices $E_{ij}(x)$ with $i,j=1,2,\ldots,N$ generate the subgroup of G of all matrices of the form

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

where X is an element of the Special Linear group $SL(N,\mathfrak{F})$ (cf. [5]). An arbitrary element A of G is of the form

$$A=\begin{pmatrix} \overline{A} & O \\ A' & E \end{pmatrix}$$

[1]) Mr. J. L. BRENNER has obtained similar results (unpublished).

where $\bar{A}$ belongs to $SL(N(A), \mathfrak{F})$. Therefore there exists a matrix B in G' such that

$$AB = \begin{pmatrix} E_N & O \\ A'' & E \end{pmatrix}$$

where E_N is the unit matrix of degree $N = N(A)$. Thus without loss of generality we may assume that A itself has 1's all along the main diagonal and only zeros above.

Now for $k = 1, 2, \ldots, N(A)$ let A_k be the matrix which differs from the unit matrix in the k-th column only where it coincides with the k-th column of A. Then it is easy to verify that $A = A_1 A_2 \ldots A_N$. It is sufficient, therefore, to show that G' contains all matrices which differ from the unit matrix in one column only where they may have arbitrary entries below the main diagonal. The method of constructing such a matrix from the $E_{i,j}(x)$ and their conjugates will be made sufficiently clear by considering the case of the first column.

Suppose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Then

$$A E_{21}(1 - a_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = A^*, \text{ say.}$$

Now define

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{31} & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{41} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Then an easy calculation shows that

$$A^* = T E_{21}(1) T^{-1}$$

so that

$$A = (T E_{21}(1) T^{-1}) E_{21}^{-1}(1 - a_{21})$$

which belongs to G'. Hence $G' = G$.

(2) We note now that the $E_{i,j}(x)$ are all conjugate to one another in G. The proof is almost literally the same as that given by DICKSON in his book "Linear Groups" [6] for the corresponding fact in the Special Linear group $SL(N, \mathfrak{F})$ with $N \geq 3$ and can be left to the reader. (The special circumstances of imperfect fields of characteristic 2 do not arise in our context.)

(3) In order to complete the proof it remains to show that if A is any element of G, distinct from E, then the normal closure $\{A\}^G$ of A in G contains at least one of the matrices $E_{ij}(x)$.

Since $A \neq E$, A can be partitioned in the form

$$A = \begin{pmatrix} B_n & O \\ C & E \end{pmatrix}$$

where $B_n \neq E_n$ is an $n \times n$ matrix, with $n > 1$. Now $G(\mathfrak{F})$ contains all similarly partitioned matrices

$$H = \begin{pmatrix} E_n & O \\ U & E \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad K = \begin{pmatrix} V_n & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad |V_n| = 1 .$$

Therefore $\{A\}^G$ contains the matrices $A_1 = A^{-1} \cdot H^{-1} A H$ and $A_2 = A_1^{-1} \cdot K^{-1} A_1 K$. A short calculation which we omit yields

$$A_2 = \begin{pmatrix} E_n & O \\ W & E \end{pmatrix}, \quad W = U(E_n - B_n)(V_n - E_n) .$$

If we now chose U so that its first row contains a 1 at a suitable place and zero's elsewhere and then chose K suitably as a matrix $E_{pq}(1)$ we can achieve (since $E_n - B_n \neq 0$) that W contains one and only one element distinct from zero. But that means that A_2 is a matrix $E_{ij}(x)$. This completes the proof of the theorem.

(4) Remark. The group G contains as a subgroup G^* all the matrices of the form

$$\begin{pmatrix} A^* & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

where A^* is an arbitrary finite matrix of determinant 1. G^* also is a simple group. This result can be established in a similar manner, but it is almost obvious, because G^* is "almost", i.e. apart from subgroups of the centres, the direct limit of a sequence of simple groups $PSL(n, \mathfrak{F})$, $n = 1, 2, \ldots$, ordered by inclusion, and hence simple.

Literature.

[1] Higman, G., B. H. Neumann and Hanna Neumann: J. London Math. Soc. **24**, 247—254 (1949). — [2] Higman, G.: J. London Math. Soc. **26**, 61—64 (1951). — [3] Chehata, C. G.: Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 183—197 (1952). — [4] Camm, Ruth: J. London Math. Soc. **28**, 65—76 (1952). — [5] Waerden, B. L. v. d.: Gruppen von linearen Transformationen, S. 6. Berlin 1935. — [6] Dickson, L. E.: Linear Groups, S. 84—85. Leipzig 1901.

Queen Mary College, University of London.

(Eingegangen am 28. Juli 1952.)

HADWIGER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 4—14 (1953)

Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit.

Von
H. HADWIGER.

Sucht man bewegungsinvariante additive Funktionale k-dimensionaler Polyeder, welche für Zylinderpolyeder (Erklärung in Abschn. 2) verschwinden, so stellt sich heraus, daß es sich genau um die linearen Funktionale[1]) handelt. Im Falle des gewöhnlichen Raumes wurde die Existenz solcher Funktionale mit Verwendung des Auswahlaxioms nachgewiesen[2]). Im Laufe der vorliegenden Arbeit wird sich zeigen, daß in Räumen gerader Dimension keine derartigen linearen nichttrivialen Funktionale existieren können, selbst dann nicht, wenn man die Forderung der Invarianz gegenüber Bewegungen dadurch stark mildert, daß man nur noch die Invarianz gegenüber Translationen und Inversion verlangt. Das Fehlen solcher Funktionale im Falle der Ebene hängt aufs engste mit dem bekannten Sachverhalt zusammen, wonach inhaltsgleiche Polygone stets zerlegungsgleich sind; und zwar reichen zur Realisierung der ebenen Zerlegungsgleichheit, wie unseres Wissens erst kürzlich festgestellt wurde[3]), bereits die Translationen und die Inversion aus. Im gewöhnlichen Raume sind dagegen inhaltsgleiche Polyeder nach dem klassischen DEHNschen Satz[4]) nicht notwendig zerlegungsgleich. Allgemeiner wird in dieser Arbeit belegt, daß die Zerlegungsverhältnisse in Räumen gerader Dimension stets günstiger liegen, insofern nämlich, als jedes geraddimensionale

[1]) Das Funktional des dilatierten Polyeders multipliziert sich mit dem Dilatationskoeffizienten. Um zu zeigen, daß ein für Zylinderpolyeder verschwindendes Funktional linear ist, braucht es noch eine schwache zusätzliche Voraussetzung. Beispielsweise genügt es, zu verlangen, daß das Funktional dilatationsstetig ist.

[2]) HADWIGER, H.: Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale. Comm. Math. Helv. **24**, 204—218 (1950). Es wird dort unter anderem gezeigt, daß die Übereinstimmung der Funktionale dieser Art notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Polyeder zerlegungsgleich mod W sind, d.h. zerlegungsgleich bis auf Reste, die mit einem Würfel zerlegungsgleich ausfallen. Sind die beiden Polyeder zusätzlich noch volumgleich, so sind sie überhaupt zerlegungsgleich. Dieser Tatbestand wurde bereits vor einigen Jahren durch B. JESSEN (En Bemaerkning om Polyedres Volumen, Mat. Tidskr. B 1941, 59—65) erkannt. Die JESSENschen Volumina sind bewegungsinvariante und additive Polyederfunktionale, welche sich für Zylinderpolyeder auf den elementaren Inhalt reduzieren. Differenzen JESSENscher Volumina sind demnach Funktionale, die für Zylinderpolyeder verschwinden. Die hier betrachteten linearen Funktionale sind in dieser allgemeineren Mannigfaltigkeit enthalten. Die anderen nicht linearen Funktionale verhalten sich bezüglich der Dilatation total unstetig (vgl. auch Bemerkung in Fußnote 1).

[3]) HADWIGER, H., u. P. GLUR: Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. Elemente Math. **6**, 97—106 (1951).

[4]) DEHN, M.: Über den Raumінhalt. Math. Ann. **55**, 465—478 (1901).

Polyeder mit einem Zylinderpolyeder zerlegungsgleich ist, und zwar bezüglich der durch die Translationen und die Inversion erzeugten Bewegungsgruppe.

Unsere Hauptergebnisse beziehen sich indessen auf lineare additive Funktionale k-dimensionaler Polyeder, die gegenüber den Bewegungen einer an sich beliebigen, die Translationen enthaltenden Gruppe invariant sind. Die Übereinstimmung aller Funktionalwerte dieser Art für zwei Polyeder erweist sich als notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden Polyeder bezüglich der genannten Gruppe zerlegungsgleich mod Z, d.h. zerlegungsgleich bis auf zylindrische Reste sind[5]).

In Räumen gerader Dimension sind zwei beliebige Polyeder zerlegungsgleich mod Z bezüglich der durch Translationen und Inversion erzeugten Bewegungsgruppe.

1. Bewegungsgruppe und Zerlegungsgleichheit der Polyeder.

Es sei G eine *Bewegungsgruppe* im k-dimensionalen euklidischen Raum R, welche die Translationen enthält, so daß die *Translationsgruppe* T eine Untergruppe von G ist. Ist D die in G enthaltene *Drehgruppe*, die aus den Operationen von G besteht, welche den Ursprung des Raumes R fest lassen, so kann symbolisch $G=(D, T)$ geschrieben werden. Besonders ausgezeichnete Gruppen sind dann $T=(E, T)$ und $G_0=(D_0, T)$; hierbei bezeichnen E die Ruhe (Einselement) und D_0 die volle k-dimensionale Drehgruppe, also G_0 die volle Bewegungsgruppe in R. In Räumen gerader Dimension soll noch die Gruppe $\hat{T}=(\hat{D}, T)$ erwähnt werden, deren Drehteil $\hat{D}$ aus den beiden Operationen I und $I^2=E$ besteht, wo I die Inversion oder Spiegelung am Ursprung des Raumes R bezeichnet.

$A, B, C, \ldots$ sollen abgeschlossene eigentliche[6]) *Polyeder* von R bedeuten. Unter $A+B$ soll wie üblich ein Polyeder verstanden werden, das sich im Sinne der Elementargeometrie in die beiden Polyeder A und B zerlegen läßt, so daß A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle im folgenden vorkommenden Polyederadditionen sind stets stillschweigend an diese Konvention gebunden. Innerhalb der Zerlegungstheorie bezüglich einer Bewegungsgruppe G der vorstehend beschriebenen Art sind Polyeder, die durch Translation auseinander hervorgehen, gleichwertig, da T in jedem G enthalten ist. Wir treffen daher die einmalige Verabredung, daß bei allen Polyederadditionen überhaupt eine geeignete Verschiebung der beteiligten Polyeder so vorgekehrt wird, daß der oben erwähnten Konvention genügt wird.

Ist α eine Bewegung der Gruppe G, so soll α das Polyeder A in A^α überführen. Gibt es ein $\alpha \in G$, so daß $A^\alpha = B$ ausfällt, so heißen A und B *G-gleich*, symbolisch durch $A \simeq B$ ausgedrückt. Insbesondere bedeuten T-gleich *translationsgleich* und G_0-gleich *kongruent*.

[5]) Vgl. auch die Angaben in Fußnote 2 betreffend den dreidimensionalen Fall und beachte, daß ein gewöhnliches Zylinderpolyeder mit einem Würfel zerlegungsgleich ist.

[6]) Ein eigentliches Polyeder ist die Vereinigungsmenge endlich vieler k-dimensionaler abgeschlossener und nicht entarteter Simplexe, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Zwei Polyeder A und B nennen wir *G-zerlegungsgleich*, symbolisch durch $A \sim B$ ausgedrückt, wenn sie sich in paarweise G-gleiche Teilpolyeder zerlegen lassen, so daß also $A = \sum_1^n A_\nu$ und $B = \sum_1^n B_\nu$ gilt, wobei $A_\nu \simeq B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Insbesondere unterscheiden wir T-zerlegungsgleich oder translativ-zerlegungsgleich und G_0-zerlegungsgleich oder zerlegungsgleich.

Alle hier genannten Relationen zwischen Polyedern sind *reflexiv, symmetrisch* und *transitiv*. Wie erst kürzlich in der hier erforderlichen Allgemeinheit bewiesen wurde[7]), gilt der Satz von der *G-Ergänzungsgleichheit*, wonach aus $A + C \sim B + D$ und $C \sim D$ die Folgerung $A \sim B$ gezogen werden kann.

Für eine natürliche Zahl n bedeute $n \cdot A$ ein Polyeder, das sich in n Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A G-zerlegungsgleich sind. Es gilt dann ferner der Satz von der *G-Selbstergänzungsgleichheit*[8]), wonach aus $n \cdot A \sim n \cdot B$ auf $A \sim B$ geschlossen werden kann.

Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird noch die MINKOWSKI*sche Addition* zweier Polyeder A und B, die wir symbolisch mit $A \times B$ bezeichnen, Verwendung finden. Ferner brauchen wir wesentlich den Begriff der Dilatation mit λ, die ein Polyeder A in das zu A homothetische Polyeder λA überführen soll; hierbei ist $\lambda > 0$.

2. Zylinderpolyeder und Zerlegungsgleichheit mod Z.

Ein Polyeder A wollen wir einen *i-stufigen Zylinder* nennen, wenn eine Darstellung der Form $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i$ als i-fache MINKOWSKIsche Summe möglich ist; hierbei soll A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, i)$ ein k_ν-dimensionales Polyeder darstellen, das also in einem k_ν-dimensionalen Unterraum von R liegt, es soll $k_\nu \geq 1$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$ sein und weiter sollen die Trägerräume der Polyeder A_ν den ganzen k-dimensionalen Raum aufspannen. Die Stufenzahl i stellt einen Grad zylindrischer Entartung dar, offenbar gilt $1 \leq i \leq k$. Bei den 1-stufigen Zylindern ist offenbar keinerlei Entartung vorausgesetzt; sie sind beliebige Polyeder. Dagegen ist ein k-stufiger Zylinder (höchste Entartung) ein Parallelotopaggregat[9]).

Ein Polyeder, das sich in endlich viele i-stufige Zylinder zerlegen läßt, nennen wir ein *i-stufiges Zylinderpolyeder*. Ist hier $i > 1$, so sprechen wir von einem *eigentlichen* Zylinderpolyeder; zur Benennung eines solchen verwenden wir fortab die Zeichen $U, V, W, \ldots, Z$.

In weiterer Verfolgung einer für gewöhnliche Polyeder von J. P. SYDLER[10]) verwerteten Idee hat der Verfasser kürzlich einen sich auf die Translations-

[7]) HADWIGER, H.: Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Z. **55**, 292—298 (1952).

[8]) loc. cit. [7]).

[9]) Dieser auf der MINKOWSKIschen Addition beruhende Zylinderbegriff wurde vom Verf. in der in Fußnote 7 zitierten Arbeit eingeführt. Es zeigte sich, daß die nach der Stufenzahl vorgenommene Klassifikation induktive Beweiskonstruktionen ermöglicht, wobei man von Zylindern hoher Stufe zu solchen niedrigerer Stufe fortschreitet.

[10]) SYDLER, J. P.: Sur la décomposition des polyèdres. Comm. Math. Helv. **16**, 266—273 (1943/44).

9183-56

9183-56

gruppe T beziehenden *Zerlegungshilfssatz für Zylinderpolyeder* aufgestellt[11]), nach dem für ein i-stufiges Zylinderpolyeder A die Zerlegungsformel $A \sim A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ gilt, wobei A' ein $(i+1)$-stufiges Zylinderpolyeder bedeutet. Ist hier $i = k$, so ist A' leer und die Aussage gibt die triviale Tatsache wieder, daß ein k-dimensionales Parallelotop in n^k kleinere homothetische Parallelotope zerlegt werden kann, die aus dem ursprünglichen durch eine Dilatation mit $1/n$ hervorgehen.

Wir definieren nun weiter: Zwei Polyeder A und B heißen *G-zerlegungsgleich mod Z*, symbolisch durch $A \sim B \pmod{Z}$ ausgedrückt, wenn es zwei eigentliche Zylinderpolyeder U und V so gibt, daß $A + U \sim B + V$ ausfällt, d.h. A und B sind G-zerlegungsgleich bis auf eigentlich zylindrische Restpolyeder Z. Leicht bestätigt man, daß auch diese Verwandtschaft wieder *symmetrisch*, *reflexiv* und *transitiv* ist. Aus den im vorstehenden Abschnitt erwähnten Sätzen von der G-Ergänzungsgleichheit und der G-Selbstergänzungsgleichheit läßt sich weiter leicht ableiten, daß auch aus $A + C \sim B + D \pmod{Z}$ und $C \sim D \pmod{Z}$ auf $A \sim B \pmod{Z}$ und ebenso aus $n \cdot A \sim n \cdot B \pmod{Z}$ auf $A \sim B \pmod{Z}$ geschlossen werden kann.

Gibt es zwei eigentliche Zylinderpolyeder U und V, so daß $A + U \sim V$ ausfällt, so schreiben wir auch $A \sim 0 \pmod{Z}$, wo 0 ein Symbol für das leere Polyeder ist.

Es besteht die Möglichkeit, auf Grund der eben erwähnten gültigen Regeln innerhalb von Äquivalenzrelationen auch eine formale *Polyedersubtraktion* einzuführen, indem wir erklären, daß die Relation $A - B \sim C \pmod{Z}$ gleiche Bedeutung haben soll wie $A \sim B + C \pmod{Z}$. Eine Relation $-A \sim -B \pmod{Z}$ ist demnach auch gleichbedeutend mit $A \sim B \pmod{Z}$. Eine Dilatation mit λ war bisher an die Bedingung $\lambda > 0$ gebunden. Wir erklären hier eine solche mit einem beliebigen $-\infty < \lambda < \infty$, indem wir festlegen, daß $(-\lambda) A$ und $-(\lambda A)$ gleichbedeutend sein sollen. Ferner werde $0A$ mit dem leeren Polyeder 0 identifiziert.

Bezüglich der Dilatation gelten dann die folgenden drei *Distributivgesetze*:

1. $\alpha(A + B) \sim \alpha A + \alpha B \pmod{Z}$; $\quad -\infty < \alpha < \infty$,
2. $(\alpha + \beta) A \sim \alpha A + \beta A \pmod{Z}$; $\quad -\infty < \alpha, \beta < \infty$,
3. $(\alpha \beta) A \sim \alpha(\beta A) \pmod{Z}$; $\quad -\infty < \alpha, \beta < \infty$.

Das erste ist trivial und das zweite folgt aus einer Zerlegungsmöglichkeit des k-dimensionalen Simplexes[12]), wonach für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ eine Zerlegung $(\alpha + \beta) S = \alpha S + \beta S + Z$ besteht. Eine solche gibt es demnach auch für ein beliebiges Polyeder A. Hieraus folgt das zweite Gesetz zunächst für $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Mit einigen zusätzlichen Betrachtungen ergibt sich leicht die Erweiterung auf beliebige α und β. Einfacher verifiziert man das dritte Gesetz.

[11]) loc. cit. [7]).

[12]) Eine solche wurde ausführlicher beschrieben in der Abhandlung des Verf.: Zur Inhaltstheorie der Polyeder. Collect. Math. 3, 137—158 (1950). Im Falle des gewöhnlichen Raumes vgl. auch J. P. SYDLER, loc. cit. [10]).

3. Zerlegungsbasis mod Z.

In diesem Abschnitt wollen wir Polyeder, welche zerlegungsgleich mod Z sind, nicht als voneinander verschieden ansehen. Auf Grund der so festgesetzten Gleichheit bildet die Gesamtheit aller Polyeder einen linearen Raum. Man verifiziert leicht die Gültigkeit aller erforderlichen, sich auf die nun eindeutig erklärte Addition $A+B$, Subtraktion $A-B$ und skalare Multiplikation λA $(-\infty<\lambda<\infty)$ beziehenden Gesetze, wenn man sich auf die im vorstehenden Abschnitt entwickelten Regeln stützt.

Nach der bekannten Konstruktion von G. HAMEL[13]) läßt sich mit Verwendung des Wohlordnungssatzes eine Menge von Basispolyedern gewinnen, so daß sich jedes beliebige Polyeder auf genau eine Weise durch endlich viele passend ausgewählte Basispolyeder linear darstellen läßt[14]).

Diesen Tatbestand drücken wir ausführlicher wie folgt aus:

Es existiert eine Menge von Basispolyedern T_τ, wobei τ einen abstrakten Index darstellt, der die verschiedenen Polyeder T der Basis individuiert[15]), *so daß für jedes beliebige Polyeder A eine und nur eine Relation der Form*

$$A \sim \sum_\tau p_\tau T_\tau \pmod Z \tag{1}$$

besteht in dem Sinne, daß der Koeffizient p_τ für jedes τ eindeutig durch A bestimmt ist. Die Summation erstreckt sich über alle τ, reduziert sich aber in jedem individuellen Fall auf eine endliche Summe, da die Koeffizienten für ein festes Polyeder A für fast alle τ verschwinden.

Die Polyeder T_τ bilden eine *Zerlegungsbasis mod Z*. Bezüglich der Koeffizienten in der Darstellung (1) gilt folgendes:

Bei festem Index τ bildet der Koeffizient $p_\tau=p_\tau(A)$ ein eindeutig definiertes Polyederfunktional, das G-invariant, additiv und linear ist, so daß also die Beziehungen

$$p_\tau(A)=p_\tau(B),\quad A\simeq B;\quad p_\tau(A+B)=p_\tau(A)+p_\tau(B);\quad p_\tau(\lambda A)=\lambda\, p_\tau(A) \tag{2}$$

gelten, und das für jedes eigentliche Zylinderpolyeder Z verschwindet, so daß

$$p_\tau(Z)=0 \tag{3}$$

wird.

[13]) HAMEL, G.: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann. **60**, 459–462 (1905).

[14]) In der in Fußnote 2 zitierten Arbeit hat der Verf. bezüglich einer gleichwertigen Polyederäquivalenz im gewöhnlichen Raum die Beweiskonstruktion ausführlicher dargelegt, so daß wir uns hier mit dem kurzen Hinweis begnügen können.

[15]) Über die Mächtigkeit der Basispolyedermenge läßt sich hier nicht viel sagen; die sich bietenden Verhältnisse sind von der Dimension k des Raumes R und vor allem auch von der zugrunde gelegten Bewegungsgruppe G stark abhängig. Ist z.B. $k=1$, so daß gar keine eigentlichen Zylinderpolyeder existieren, so bildet ein beliebiges lineares Simplex (Strecke) bereits eine Basis. Ist $k=2$ und wählen wir die durch Translationen und Inversion erzeugte Bewegungsgruppe T, so ist die Basis leer, da für jedes ebene Polygon P die Relation $P\sim 0$ (mod Z) gilt. Wird im ebenen Fall dagegen die Translationsgruppe gewählt, so ergibt sich eine kontinuierliche Basis. Als Basispolygone können beispielsweise die rechtwinkligen Dreiecke T_τ: $[x\geqq 0;\ y\geqq 0;\ x/\cos\tau+y/\sin\tau\leqq 1]$ $(0<\tau<\pi/2)$ gewählt werden, wobei wie ersichtlich der kontinuierliche Index τ die Richtung der Hypotenuse anzeigt.

4. G-invariante, additive und lineare Polyederfunktionale.

In diesem Abschnitt wenden wir uns in unabhängiger und allgemeiner Weise einigen Studien über Funktionale zu, welche von der Art der im vorstehenden Abschnitt gewonnenen Koeffizientenfunktionale sind.

Es sei $\varphi(A)$ ein für alle Polyeder A des Raumes R eindeutig definiertes Funktional mit den nachfolgenden Eigenschaften:

(I) $$\varphi(A) = \varphi(B) \quad \text{falls} \quad A \simeq B \text{ ist};$$

(II) $$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

(III) $$\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A).$$

Es handelt sich also um ein *G-invariantes, additives und lineares Polyederfunktional*. Zunächst zeigen wir, daß aus diesen drei Eigenschaften bereits folgt, daß das Funktional für Zylinderpolyeder verschwinden muß. Es gilt also:

Ist $\varphi(A)$ ein G-invariantes, additives und lineares Polyederfunktional, so muß für jedes eigentliche Zylinderpolyeder Z

(4) $$\varphi(Z) = 0$$

sein.

In der Tat: Ist $k = 1$, so muß nichts bewiesen werden, da keine eigentlichen Zylinderpolyeder existieren. Es sei also $k > 1$. Ist Z ein Parallelotop, so gilt eine Zerlegung $Z \sim n^k \cdot \frac{1}{n} Z$, so daß zunächst mit (I) und (II) auf $\varphi(Z) = n^k \varphi\left(\frac{1}{n} Z\right)$ und dann mit (III) weiter auf $\varphi(Z) = n^{k-1} \varphi(Z)$ und mit $n > 1$ auf $\varphi(Z) = 0$ geschlossen wird. Wir nehmen nun an, daß die zu beweisende Aussage bereits für alle i-stufigen $(2 < i \leq k)$ Zylinderpolyeder sichergestellt sei, und nun sei Z ein $(i-1)$-stufiges Zylinderpolyeder. Nach dem im 2. Abschnitt erklärten Zerlegungshilfssatz gilt eine Zerlegung $Z \sim Z' + n^{i-1} \cdot \frac{1}{n} Z$, wobei Z' ein i-stufiges Zylinderpolyeder darstellt. Analog wie weiter oben schließen wir mit Rücksicht auch auf die induktive Voraussetzung $\varphi(Z) = n^{i-2} \varphi(Z)$, so daß wegen $i - 2 > 0$ mit $n > 1$ auf $\varphi(Z) = 0$ geschlossen werden kann, w.z.b.w.

Nun ergibt sich mühelos die Bedeutung der hier betrachteten Funktionale für die Zerlegungsgleichheit mod Z. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Für zwei Polyeder A und B gilt dann und nur dann $A \sim B \pmod{Z}$, wenn für alle G-invarianten additiven und linearen Polyederfunktionale

(5) $$\varphi(A) = \varphi(B)$$

ausfällt; diese Bedingungen sind demnach notwendig und hinreichend für die Zerlegungsgleichheit mod Z.

Der Beweis ist kurz: Aus (5) folgt mit Rücksicht auf (2) insbesondere $p_\tau(A) = p_\tau(B)$ für alle τ und hieraus ergibt sich mit (1) weiter $A \sim B \pmod{Z}$. Ist umgekehrt $A \sim B \pmod{Z}$ vorausgesetzt, so gilt nach Definition $A + U \sim B + V$, wo U und V eigentliche Zylinderpolyeder bezeichnen. Mit Rücksicht auf (4) muß $\varphi(U) = \varphi(V) = 0$ sein, und so ergibt sich mit (I) und (II) mühelos (5), w. z. b. w.

5. Das Darstellungsproblem.

Die im vorstehenden Abschnitt gewonnenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die G-Zerlegungsgleichheit mod Z stellen insofern nur eine formale Lösung des Zerlegungsproblems dar, als die zuständigen G-invarianten, additiven und linearen Polyederfunktionale nur implizite durch ihre Eigenschaften (I), (II) und (III) gegeben sind. Ein effektives Kriterium, das in jedem individuellen Fall zweier Polyeder A und B die Frage, ob $A \sim B \pmod{Z}$ gilt oder nicht, zu entscheiden gestattet, setzt voraus, daß die explizite Darstellung aller Funktionale dieser Art zur Verfügung steht.

Eine weitere Förderung des Zerlegungsproblems ist durch Angabe solcher Darstellungen zu erreichen. Unserer Entwicklung etwas vorgreifend wollen wir gleich erwähnen, daß im 7. Abschnitt eine rekursive Lösung des Darstellungsproblems für den Fall der Translationsgruppe T gegeben wird. Damit ist eo ipso das Problem der translativen Zerlegungsgleichheit mod Z vollständig gelöst. Im 6. Abschnitt wird für den allgemeinen Fall einer Bewegungsgruppe $G = (D, T)$ eine Reduktion auf den translationsinvarianten Fall gegeben, welche aber im wesentlichen noch formal bleibt und nur in besonderen Fällen eine explizite Lösung des Darstellungsproblems erlaubt. Eine solche wird durch diese Reduktion dann erzielt, wenn der Drehteil D von G eine endliche Gruppe ist, also beispielsweise im Falle der durch Inversion und Translationen erzeugten Gruppe $\hat{T}$ in Räumen gerader Dimension. Wenn der Drehteil nicht endlich ist, also wie etwa im besonders wichtigen Fall der vollen Bewegungsgruppe G_0, bleibt das Darstellungsproblem noch ungelöst. Hier konnten nur spezielle Darstellungen gefunden werden[16]), wobei noch nicht bewiesen werden konnte, daß damit alle Funktionale erfaßt werden. So gibt es im bewegungsinvarianten Fall bisher nur notwendige Kriterien, von denen man nicht weiß, ob sie auch hinreichen.

6. Formale Reduktion auf den translationsinvarianten Fall.

Es bezeichne $\mathfrak{M}_G$ die Mannigfaltigkeit aller G-invarianten, additiven und linearen Polyederfunktionale. Denken wir uns, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der entsprechenden translationsinvarianten Polyederfunktionale hinlänglich bekannt sei und daß man $\mathfrak{M}_G$ suche, wo $G = (D, T)$ eine allgemeinere Bewegungsgruppe ist. Im folgenden zeigen wir, wie man die Funktionale $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ formal aus den Funktionalen $\psi \in \mathfrak{M}_T$ gewinnen kann. Es bezeichne $\overline{\mathfrak{M}}_T$ die Teilmannigfaltigkeit derjenigen Funktionale $\overline{\psi}$ von $\mathfrak{M}_T$, die über der Drehgruppe D einen *Integralmittelwert* $m_\delta[\overline{\psi}(A^\delta)]$ $(\delta \in D)$ im Sinne von J. VON NEUMANN[17]) aufweisen, der für alle Polyeder A existiert.

[16]) Vortrag des Verf. „Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder" am Internationalen Mathematikertreffen in Salzburg im September 1951. Für gewöhnliche Polyeder vgl. auch H. HADWIGER, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder. Arch. Math. **2**, 441—444 (1949/50).

[17]) NEUMANN, J. v.: Almost periodic functions in a group. I. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 445—492 (1934). Eine vollständige Darstellung der Mittelwertstheorie gibt W. MAAK in seinem neuen Buch: „Fastperiodische Funktionen", §§ 9—12. Berlin: Springer 1950.

Es gilt nun der folgende Satz:

Durch den Ansatz

$$\varphi(A) = m_\delta[\bar{\psi}(A^\delta)] \qquad (\delta \in D) \tag{6}$$

ergibt sich die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_G$ der G-invarianten Funktionale φ aus der Teilmannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}_T$ der T-invarianten Funktionale $\bar{\psi}$.

In der Tat: Aus $\bar{\psi} \in \overline{\mathfrak{M}}_T$ folgt mit einigen einfachen Schlüssen aus den Grundeigenschaften des Integralmittelwertes, daß $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ gilt. Ist umgekehrt $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ vorgegeben, so gibt es sicher ein $\bar{\psi} \in \overline{\mathfrak{M}}_T$, so daß die Integraldarstellung (6) gilt; es genügt nämlich $\bar{\psi} = \varphi$ zu wählen, was sicher angeht, da doch $\varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_T$ gilt. Die Darstellung (6) ist in diesem Fall natürlich völlig trivial. Es wäre aber voreilig, hieraus schließen zu wollen, daß die mit diesem einfachen Schluß bewiesene zweite Hälfte unseres Satzes keinen Beitrag zur Lösung des Darstellungsproblems zu leisten imstande sei, da erstens auch andere Funktionale $\bar{\psi}$ das nämliche φ ergeben können und da zweitens für φ T-invariante Darstellungen als $\bar{\psi}$ in Frage kommen, welche die G-Invarianz noch gar nicht erkennen lassen.

Die durch (6) erzielte Reduktion auf den translationsinvarianten Fall ist nur formal, da eine Aussonderung der translationsinvarianten Funktionale mit NEUMANNschem Mittelwert über der Drehgruppe vorgeschrieben wird, ohne daß eine Handhabe zur effektiven Ausführung gegeben werden kann. Die Lösung dieser Aufgabe ist vielleicht nicht einfacher als die direkte Aussonderung der G-invarianten Funktionale.

Günstig gestalten sich die Verhältnisse aber dann, wenn $\overline{\mathfrak{M}}_T \equiv \mathfrak{M}_T$ ausfällt; dies ist dann der Fall, wenn die Drehgruppe D endliche Ordnung aufweist. Unser Satz (6) erfährt dann die folgende Modifikation:

Besitzt die Gruppe $G = (D, T)$ einen Drehteil D endlicher Ordnung und sind δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Drehungen von D, so ergibt sich aus dem Ansatz

$$\varphi(A) = \frac{1}{n} \sum_1^n \psi(A^{\delta_\nu}) \tag{7}$$

die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_G$ der G-invarianten Funktionale φ aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der T-invarianten Funktionale ψ.

Aus diesem Sachverhalt (7) ergibt sich im Hinblick auf das Kriterium (5) der folgende Satz[18]):

Besitzt die Gruppe $G = (D, T)$ einen Drehteil D endlicher Ordnung, so besteht für zwei Polyeder A und B die Zerlegungsrelation $A \sim B \pmod{Z}$ bezüglich G dann und nur dann, wenn

$$\sum_1^n A^{\delta_\nu} \sim \sum_1^n B^{\delta_\nu} \pmod{Z} \tag{8}$$

bezüglich T gilt, wobei δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Drehungen von D bezeichnen.

[18]) Dieser kann übrigens auch mit Bezugnahme auf den im 1. Abschnitt erwähnten Satz von der G-Selbstergänzungsgleichheit direkt bewiesen werden.

Durch diese Aussage ist das Problem der Zerlegungsgleichheit mod Z für eine Gruppe mit endlichem Drehteil reduziert auf dasjenige der translativen Zerlegungsgleichheit mod Z.

Im nachfolgenden Abschnitt wird dieses letztere Problem indessen vollständig gelöst.

7. Rekursive Darstellung im translationsinvarianten Fall.

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß sich die translationsinvarianten additiven und linearen Funktionale ψ k-dimensionaler Polyeder durch die analogen Funktionale ψ' $(k-1)$-dimensionaler Polyeder darstellen lassen, falls $k>1$ ist. Damit wird die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ rekursiv aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ für niedrigere Dimension gewonnen. Da die Funktionale im 1-dimensionalen Fall trivial sind — offenbar gilt $\psi(A)=c\,L(A)$, wobei $L(A)$ die totale Länge (Inhalt) des linearen Polyeders bezeichnet — ist damit das Darstellungsproblem vollständig gelöst.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Durch den Ansatz

$$\psi(A)=\sum_u \chi(u)\,\psi'_u(A'_u) \tag{9}$$

ergibt sich die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der Funktionale ψ für k-dimensionale Polyeder für $k>1$ rekursiv aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ der Funktionale ψ' für $(k-1)$-dimensionale Polyeder. Hierbei bezeichnen u einen Richtungsvektor im R_k und A'_u das $(k-1)$-dimensionale Polyeder, das aus denjenigen Randflächen von A besteht, die einen nach außen weisenden zu u parallelen Normalenvektor besitzen. Ferner sei $\psi'_u(A')=\psi'_{-u}(A')$ ein Funktional in dem auf u orthogonal stehenden R_{k-1} und endlich bedeute $\chi(u)$ eine bis auf die Bedingung $\chi(u)=-\chi(-u)$ willkürlich wählbare ungerade Richtungsfunktion.

Für $k=1$ gilt $\psi(A)=c\,L(A)$.

Die Summation in (9) erstreckt sich über die kontinuierlich vielen Richtungen u, reduziert sich aber in jedem individuellen Fall eines Polyeders A naturgemäß auf eine endliche Summe, da die Funktionalwerte $\psi'_u(A'_u)$ für fast alle u verschwinden. Man beachte ferner, daß die Funktionale ψ'_u für jedes Richtungspaar u, $-u$ individuell aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ auswählbar sind.

Beweis. Die Einsicht, daß jedes durch Ansatz (9) konstruierte Funktional ψ zu $\mathfrak{M}_T$ gehört, ergibt sich mit einigen wenigen Überlegungen. Translationsinvarianz und Linearität von ψ schließt man trivial aus den nämlichen Eigenschaften von ψ'. Die Additivität von ψ ergibt sich aus derjenigen von ψ' in Verbindung mit der Bemerkung, daß für jede Richtung u $\chi(u)\,\psi'_u(A)+\chi(-u)\,\psi'_{-u}(A')=0$ gilt. Wir haben nun zu zeigen, daß sich umgekehrt jedes Funktional $\psi\in\mathfrak{M}_T$ in der Form (9) darstellen läßt. Es sei also $\psi\in\mathfrak{M}_T$ vorgegeben. Wir wählen einen festen auf u_0 orthogonal stehenden Raum R^0_{k-1} als „Basisebene" und setzen willkürlich fest, daß $\psi'_u(A')=0$ sei für jede Richtung u, für die $(u,u_0)=0$ gilt. Es sei weiter u eine feste Richtung und

$(u, u_0) > 0$. Wir betrachten nun gerade zylindrische Säulen S_u mit $(k-1)$-dimensionalen in der Basisebene liegenden Grundflächen P'_{u_0} und parallelen Deckflächen Q'_u, deren nach außen weisenden Normalenvektoren mit u gleichgerichtet sind. Da für ein Zylinderpolyeder Z nach (4) $\psi(Z) = 0$ ist, folgt, daß $\psi(S_u)$ nicht von der Höhe der Säule abhängig ist und sich demnach als Funktional $\psi'_u(Q'_u)$ des Deckflächenpolyeders auffassen läßt. Mit einigen einfachen Überlegungen ergibt sich, daß $\psi'_u(A') \in \mathfrak{M}'_T$ gilt und daß insbesondere $\psi'_{u_0}(A') = 0$ ist. Mit der in (9) vorgeschriebenen Festsetzung $\psi'_u(A') = \psi'_{-u}(A')$ sind so die individuell wählbaren Funktionale $\psi'_u(A')$ für alle Richtungen eindeutig konstruiert. Nach der am Anfang dieses Beweises erwähnten Verifikation gilt für das mit Ansatz (9) auf Grund der soeben konstruierten Funktionale ψ' gebildete Funktional — wir wollen dieses zunächst mit $\psi^*(A)$ bezeichnen — gewiß $\psi^* \in \mathfrak{M}_T$. Nun ist aber $\psi^*(S_u) = \psi(S_u)$ für alle säulenförmigen Polyeder wie sie oben betrachtet wurden. Weiter läßt sich ein beliebiges Polyeder A, das in demjenigen durch die Basisebene begrenzten Halbraum von R_k liegt, in den u_0 weist, als Summe und Differenz von Säulen S_u darstellen. Mit Diskussion der richtigen Vorzeichen ergibt sich so $\psi^*(A) = \psi(A)$, womit sich der Beweis schließt.

8. Besondere Verhältnisse in Räumen gerader und ungerader Dimension.

Wir beweisen zunächts den folgenden Hilfssatz:

Bezeichnet $\hat{A}$ das durch Inversion (Spiegelung am Ursprung) aus A hervorgehende Polyeder des k-dimensionalen Raumes, so gilt für ein translationsinvariantes, additives und lineares Polyederfunktional ψ die Beziehung

$$\psi(\hat{A}) = (-1)^{k-1}\psi(A). \tag{10}$$

Der Beweis ergibt sich induktiv aus der rekursiven Darstellung (9). Für $k = 1$ ist (10) trivial, da wie im vorausgehenden Abschnitt bereits bemerkt $\psi(A) = c\,L(A)$ ist. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei bereits sichergestellt für die Dimensionen bis und mit $k-1$. Es sei nun A ein k-dimensionales Polyeder. Nach (9) gilt nun $\psi(\hat{A}) = \psi[I(A)] = \sum_u \chi(u)\,\psi'_u\{[I(A)]'_u\}$. Nun ist aber $[I(A)]'_u = I'(A'_{-u})$, wo I' die Inversion im $(k-1)$-dimensionalen Trägerraum von A'_u bedeutet und im Hinblick auf die induktive Annahme resultiert $\psi(\hat{A}) = (-1)^{k-2}\sum_u \chi(u)\,\psi'_u(A'_{-u})$. Mit der Bemerkung, daß $\psi'_u(A') = \psi'_{-u}(A')$ und $\chi(u) = -\chi(-u)$ ist, ergibt sich so $\psi(\hat{A}) = (-1)^{k-1}\sum_u \chi(-u)\,\psi'_{-u}(A'_{-u})$. Da hier über alle Richtungen summiert wird, darf u durch $-u$ ersetzt werden, womit sich der Beweis schließt.

Nun ergeben sich die beiden folgenden Aussagen:

In Räumen ungerader Dimension k gilt für alle Polyeder A die Zerlegungsrelation

$$A \sim \hat{A} \pmod{Z} \tag{11}$$

bezüglich T, d.h. zwei zueinander zentralsymmetrische Polyeder sind stets translativ zerlegungsgleich mod Z.

In Räumen gerader Dimension k gilt für alle Polyeder A die Zerlegungsrelation

$$A \sim 0 \pmod{Z} \tag{12}$$

bezüglich $\hat{T}$, d.h. jedes Polyeder ist innerhalb der durch Inversion I und Translationen T erzeugten Gruppe mit einem eigentlichen Zylinderpolyeder zerlegungsgleich.

Das gleiche gilt natürlich erst recht, wenn die volle Bewegungsgruppe G_0 gewählt wird.

Beweise. Ist k ungerade, so folgt nach (10) $\psi(\hat{A}) = \psi(A)$ für alle ψ und somit nach (5) die Behauptung (11). Ist k gerade, so folgt analog zunächst $\psi(\hat{A}) = -\psi(A)$. Handelt es sich um ein Funktional ψ, das zusätzlich noch $\hat{T}$-invariant vorausgesetzt ist, so resultiert $\psi(A) = 0$. Wieder mit (5) ergibt sich die Behauptung (12).

9. Ein Zerlegungssatz betreffend die MINKOWSKIsche Addition konvexer Polyeder.

In diesem Abschnitt sollen A, B nunmehr konvexe Polyeder bezeichnen und $A \times B$ bedeute das sich aus A und B durch MINKOWSKIsche Addition ergebende ebenfalls konvexe Polyeder. Es gilt dann der folgende Satz:

Für ein translationsinvariantes, additives und lineares Polyederfunktional ψ gilt das Additionstheorem

$$\psi(A \times B) = \psi(A) + \psi(B). \tag{13}$$

Dies folgt induktiv mühelos aus der rekursiven Darstellung (9) in Verbindung mit der sich aus der Definition der MINKOWSKIschen Linearkombination ergebenden Feststellung, daß $(A \times B)'_u = A'_u \times B'_u$ für jede Richtung u gilt. Offensichtlich ist unsere Behauptung (13) für $k = 1$ trivial, da dort ja $A \times B \simeq A + B$ ausfällt.

Nach dem Kriterium (5) gewinnen wir so den folgenden Satz:

Für die MINKOWSKIsche Summe $A \times B$ zweier konvexer Polyeder A und B gilt die Zerlegungsrelation

$$A \times B \sim A + B \pmod{Z} \tag{14}$$

bezüglich T.

Bern (Schweiz), Hochfeldstr. 31.

(Eingegangen am 25. September 1952.)

LORENZEN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 15—24 (1953)

Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen.

Von
PAUL LORENZEN.

Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz [1] sind die Integritätsbereiche I, die als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar sind, dadurch charakterisiert, daß sie ganz abgeschlossen sind. Die Darstellbarkeit von I als Durchschnitt von Bewertungsringen ist andererseits äquivalent [3] mit der Existenz einer Verbandsobergruppe V der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers K von I — wobei V der Bedingung genügen muß, daß der in V enthaltene Idealbereich H (der aus allen g.g.T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ mit $a_\nu \in G$ besteht) ein homomorphes Bild des DEDEKINDschen Idealbereichs H_d von I ist.

Diese letztere Äquivalenz ergibt sich aus dem allgemeineren bereichstheoretischen [4] Satz, daß die Halbordnung jedes regulären Verbandsbereiches Konjunktion von zulässigen Ordnungen ist — wenn man hinzufügt, daß jede kommutative Verbandsgruppe trivialerweise regulär ist. Daher stehen zum Beweis des KRULLschen Fundamentalsatzes zwei Wege zur Verfügung: Man hat für einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich entweder eine Durchschnittsdarstellung durch Bewertungen oder eine Verbandsobergruppe zu konstruieren. Beide Beweismöglichkeiten sind für kommutative Gruppen durchgeführt — für nichtkommutative Gruppen und allgemeiner für Bereiche ist bisher jedoch nur der erste Weg gangbar.

Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Beweisgang auch im allgemeinen Falle dar. Spezialisiert man anschließend die allgemeine Methode auf die Teilbarkeit in kommutativen Körpern K, so ergibt sich folgendes. Zur Konstruktion einer Verbandsobergruppe braucht nur definiert zu werden, wann für beliebige Elemente a_μ, b_ν aus der multiplikativen Gruppe G von K gelten soll [5]

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

($<$ steht für „teilt", $\wedge$ bezeichnet den g.g.T., $\vee$ das k.g.V.).

Für jeden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich I erhält man eine Verbandsobergruppe von G, wenn man definiert

$$(1) \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots b_n \longleftrightarrow 1 \in \sum_1^\varkappa (a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_\mu b_\nu^{-1}, \ldots a_m b_n^{-1})^\varkappa.$$

Für $n = 1$, $b_1 = b$ geht diese Definition über in die PRÜFERsche Definition der Ganzabhängigkeit von b von $(a_1, \ldots, a_m)$

$$(2) \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b \longleftrightarrow b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \qquad [c_\varkappa \in (a_1, \ldots, a_m)^\varkappa].$$

Daher stellt (1) eine zweckmäßige Ausdehnung des Begriffes der Ganzabhängigkeit dar.

§ 1.

B sei ein Bereich, d.h. eine Menge mit einer Halbordnung R — wir schreiben $a < b$ statt $a\,R\,b$ — und einer Halbgruppe G von Operatoren $x, y, \ldots$.

V_ϱ sei ein Überidealbereich von B, d.h. ein minimaler distributiver Verbandsoberbereich von B.

Definiert man als ϱ-zulässige Ordnungen von B diejenigen Ordnungen von B, die durch zulässige Ordnungen S von V_ϱ

(d.h. $R \subset S$

$$c\,S\,a, \quad c\,S\,b \to c\,S\,a \wedge b$$

$$a\,S\,c, \quad b\,S\,c \to a \vee b\,S\,c \quad \text{für} \quad a, b, c \in V)$$

induziert werden, so gilt [1])

$$(1.1) \quad \left\{ \bigwedge_{S\ \varrho\text{-zul. Ordnung}} a_1 \wedge \ldots \wedge a_m\,S\,b_1 \vee \ldots \vee b_n \longleftrightarrow \right.$$

$$\left. \longleftrightarrow \bigvee_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \;\; R\,[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n, \right.$$

wobei $R[\alpha_1, \ldots, \alpha_l]_\varrho$ für $\alpha_\lambda = (c_{1\lambda}, c_{2\lambda})$ die minimale ϱ-zulässige Halbordnung S von B ist, für die $c_{1\lambda}\,S\,c_{2\lambda}$ gilt, und $R[\alpha_1, \ldots, \alpha_l]'_\varrho$ die minimale Fortsetzung auf V_ϱ ist.

Definiert man also

$$(1.2) \quad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\varrho_a}{<} b_1 \vee \ldots \vee b_m \longleftrightarrow \bigvee_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \;\; R\,[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n,$$

so wird hierdurch ein regulärer distributiver Verbandsbereich definiert. Diese Regularität und Distributivität soll im folgenden unabhängig von (1.1) bewiesen werden. Ist $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\varrho_a}{<} b_1 \vee \ldots b_m$ definiert, dann wird der Verbandsbereich V_{ϱ_a} aus den Elementen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_m, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{b}_n, \ldots$$

mit

$$\mathfrak{a}_\mu = a_{\mu_1} \wedge a_{\mu_2} \wedge \ldots a_{\mu r_\mu}, \qquad \mathfrak{b}_\nu = b_{\nu 1} \wedge b_{\nu 2} \wedge \ldots b_{\nu s_\nu}, \ldots$$

konstruiert, indem gesetzt wird

$$(1.3) \qquad \mathfrak{A} < \mathfrak{B} \longleftrightarrow \bigwedge_\mu \bigwedge_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ 1 \le k_\nu \le s_\nu}} a_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge a_{\mu r_\mu} \underset{\varrho_a}{<} b_{1 k_1} \vee \ldots \vee b_{n k_n}.$$

Die Definition (1.3) liefert genau dann einen distributiven Verband — vgl. hierzu [5] — wenn gilt

$$(1.4) \qquad a < a$$

$$(1.5) \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n \to a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge a < b \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

$$(1.6) \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n \to a_1 \wedge \ldots \wedge a_{\mu+1} \wedge a_\mu \wedge \ldots < b_1 \vee \ldots \vee b_{\nu+1} \vee b_\nu \vee \ldots$$

$$(1.7) \quad \left\{ a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge c < b_1 \vee \ldots \vee b_n, \right.$$

$$\left. a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < c \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n \to a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n. \right.$$

[1]) Wir schreiben $\bigwedge_x$ bzw. $\bigvee_x$ statt: für alle x bzw. für ein x.

Auf Grund von (1.2) ist (1.4) bis (1.6) trivialerweise erfüllt. Um (1.7) zu beweisen setzen wir

$$\alpha_\mu = (a_\mu, c) \qquad \beta_\nu = (c, b_\nu).$$

Aus den Voraussetzungen

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge c < b_1 \vee \ldots b_n, \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < c \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

folgt zunächst die Existenz von Paaren $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, so daß

(1.8) $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge c \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

(1.9) $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}]'_\varrho\, c \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

gilt. Wegen

$$a_\mu \quad R\,[\alpha_\mu]_\varrho\, c,$$

also $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m\, R\,[\alpha_\mu]'_\varrho\, a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge c$, folgt für jede Vorzeichenkombination $\delta_1, \ldots, \delta_m \neq -1, \ldots, -1$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{\delta_1}, \ldots, \alpha_m^{\delta_m}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n.$$

Ebenso folgt aus (1.9) für jede Vorzeichenkombination $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \neq -1, \ldots, -1$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}, \beta_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \beta_n^{\varepsilon_n}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n.$$

Wegen

$$c \quad R\,[\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_m^{-1}]'_\varrho\, a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \wedge c \quad \text{und} \quad c \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n \quad R\,[\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_n^{-1}]'_\varrho\, c$$

folgt andererseits

$$c \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_m^{-1}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

und

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}, \beta_1^{-1}, \ldots, \beta_n^{-1}]'_\varrho\, c$$

d. h.

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \quad R\,[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_m^{-1}, \beta_1^{-1}, \ldots, \beta_n^{-1}]'_\varrho\, b_1 \vee \ldots \vee b_n.$$

Damit ist aus der Definition (1.2) bewiesen, daß V_{ϱ_a} ein distributiver Verbandsbereich ist, denn die noch fehlende Distributivität der Operatoren $x, y, \ldots$ ergibt sich trivial mit Hilfe von

(1.10) $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\varrho_a}{<} b_1 \vee \ldots \vee b_n \to x\,a_1 \wedge \ldots \wedge x\,a_m \underset{\varrho_a}{<} x\,b_1 \vee \ldots \vee x\,b$$

Für V_{ϱ_a} soll jetzt die Regularität bewiesen werden, d. h.

(1.11) $$x\,\mathfrak{A} \wedge y\,\mathfrak{B} < y\,\mathfrak{A} \vee x\,\mathfrak{B}.$$

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{b}_n$ reduziert sich (1.11) wegen der Distributivität auf

$$x\,\mathfrak{a}_\mu \wedge y\,\mathfrak{b}_\nu < y\,\mathfrak{a}_\mu \vee x\,\mathfrak{b}_\nu.$$

Für $\mathfrak{a} = a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$, $\mathfrak{b} = b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$ reduziert sich

(1.12) $$x\,\mathfrak{a} \wedge y\,\mathfrak{b} < y\,\mathfrak{a} \vee x\,\mathfrak{b}$$

aber entsprechend auf

$$x a_\mu \wedge y b_\nu < y a_\mu \vee x b_\nu,$$

so daß nur für je zwei Elemente a, b zu beweisen ist:

$$x a \wedge y b \underset{\varrho_a}{<} y a \vee x b. \tag{1.13}$$

Für $\gamma = (a, b)$ gilt ersichtlich

$$x a \wedge y b \quad R[\gamma^{\pm 1}]'_\varrho \, y a \vee x b.$$

V_{ϱ_a} ist also ein regulärer distributiver Verbandsbereich.

§ 2.

Während es für Bereiche zur Konstruktion von regulären Überidealbereichen sachgemäß erscheint, einen Überidealbereich V_ϱ vorzugeben, genügt es für halbgeordnete Gruppen G einen Idealbereich H_r vorzugeben. Fragt man nämlich nach einer Verbandsobergruppe V von G, so gilt in ihr wegen $(b_1 \vee \ldots \vee b_n)\ (b_1^{-1} \wedge \ldots \wedge b_n^{-1}) = 1$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n \longleftrightarrow a_1 b_1^{-1} \wedge \ldots \wedge a_\mu b_\nu^{-1} \wedge \ldots \wedge a_m b_n^{-1} < 1. \tag{2.1}$$

V ist also eindeutig bestimmt durch den Halbverbandsbereich H der g.g.T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$. Dies Resultat folgt hier ohne Benutzung der v-Ideale [3]. Es liegt daher nahe, zu setzen

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r_a}{\leqq} b_1 \vee \ldots \vee b_n \longleftrightarrow \bigvee_{\gamma_1, \ldots, \gamma_l} a_1 b_1^{-1} \wedge \ldots \wedge a_m b_n^{-1} R[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}]'_r 1 \tag{2.2}$$

und in Analogie zu § 1 die Distributivität des hierdurch definierten Verbandsbereiches zu beweisen. Dies macht keinerlei Schwierigkeiten und es ergibt sich, daß durch (2.2) in Verbindung mit (1.3) ein distributiver Verbandsbereich V_{r_a} definiert wird.

Darüber hinaus gilt

Satz 1. V_{r_a} ist eine reguläre Verbandsgruppe.

Man sieht zunächst, daß für den Halbverbandbereich H_{r_a}, der definiert ist durch

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \underset{r_a}{\leqq} a \longleftrightarrow \bigvee_{\gamma_1, \ldots, \gamma_l} a_1 \wedge \ldots \wedge a_n R[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_l^{\pm 1}]'_r a$$

gilt

$$c \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \underset{r_a}{\leqq} 1 \to x c x^{-1} \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \underset{r_a}{\leqq} 1 \tag{2.3}$$

$$c_1 c_2^{-1} \wedge c_2 c_3^{-1} \wedge \ldots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \wedge c_n c_1^{-1} \underset{r_a}{\leqq} 1. \tag{2.4}$$

Beweis von (2.3): Für $\gamma_\nu = (c_\nu, c)$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \neq -1, \ldots, -1$ folgt aus

$$c \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}]'_r 1$$

sofort

$$c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha^{\pm 1}, \gamma_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \gamma_n^{\varepsilon_n}]'_r 1.$$

Außerdem folgt

$$c \quad R[\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_n^{-1}]_r' c \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n,$$

also

$$c \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_n^{-1}]_r' 1,$$

und

$$x c x^{-1} \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{+1}, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_n^{-1}]_r' 1.$$

Zusammen folgt

$$x c x^{-1} \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}, \gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_n^{\pm 1}]_r' 1.$$

Beweis von (2.4): Für $\gamma_1 = (c_1, c_2), \ldots, \gamma_{n-1} = (c_{n-1}, c_n)$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \neq -1, \ldots, -1$ gilt

$$c_1 c_2^{-1} \wedge \ldots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \quad R[\gamma_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \gamma_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}]_r' 1.$$

Außerdem gilt

$$c_n \quad R[\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_{n-1}^{-1}]_r' c_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$c_2 \quad R[\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_{n-1}^{-1}]_r' c_1$$

also

$$c_n \quad R[\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_{n-1}^{-1}]_r' c_1.$$

Zusammen folgt

$$c_1 c_2^{-1} \wedge \ldots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \wedge c_n c_1^{-1} \quad R[\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_n^{\pm 1}]_r' 1.$$

Jetzt definieren wir in V_{r_a} eine Multiplikation. Nach Definition von V_{r_a} läßt sich jedes Element $\mathfrak{A}$ von V_{r_a} darstellen als $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_m$ mit

$$\mathfrak{a}_\mu = a_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge a_{\mu n_\mu} \qquad (a_{\mu\nu} \in G).$$

Diese Darstellung ist selbstverständlich nicht eindeutig. Setzen wir daher

$$(2.5) \qquad (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) \quad (b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) = a_1 b_1 \wedge \ldots \wedge a_\mu b_\nu \wedge \ldots \wedge a_m b_n,$$

$$(2.6) \qquad (\mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_m) \quad (\mathfrak{b}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{b}_n) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_m \mathfrak{b}_n,$$

so muß gezeigt werden, daß hierdurch eine Operation definiert wird, die invariant gegenüber der Wahl der Darstellung ist. Für (2.5) folgt diese Invarianz aus — wir schreiben im folgenden $<$ statt $\underset{r_a}{<}$ —

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < a_1' \wedge \ldots \wedge a_{m'}' \to a_1 b \wedge \ldots \wedge a_m b < a_1' b \wedge \ldots \wedge a_{m'}' b$$

und

$$b_1 \wedge \ldots \wedge b_n < b_1' \wedge \ldots \wedge b_{n'}' \to a b_1 \wedge \ldots \wedge a b_n < a b_1' \wedge \ldots \wedge a b_{n'}'.$$

Es ist also nur zu zeigen:

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b \to x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y < x b y.$$

Dies folgt aber trivial daraus, daß H_{r_a} Halbverbandsbereich ist mit den Elementen von G als Links- und Rechtsoperatoren [vgl. (1.10)].

Für die Invarianz von (2.6) ist entsprechend zu zeigen:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{b}_n \to \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{y} < \mathfrak{x}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y} \vee \ldots \vee \mathfrak{x}\,\mathfrak{b}_n\,\mathfrak{y}.$$

Wegen der verbandstheoretischen Distributivität reduziert sich diese Implikation zunächst auf

$$\mathfrak{a} < b_1 \vee \ldots \vee b_n \to \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{y} < \mathfrak{x}\,b_1\,\mathfrak{y} \vee \ldots \vee \mathfrak{x}\,b_n\,\mathfrak{y}$$

und für

$$\mathfrak{x} = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k, \qquad \mathfrak{y} = y_1 \wedge \ldots \wedge y_l$$

dann auf

$$(2.7)\quad \begin{cases} a_1 \wedge \ldots \wedge a_m < b_1 \vee \ldots \vee b_n \to \\ \quad \to (x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)\,(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)\,(y_1 \wedge \ldots \wedge y_l) < x_{\varkappa_1} b_1 y_{\lambda_1} \vee \ldots \vee x_{\varkappa_n} b_n y_{\lambda_n} \\ \qquad \text{für alle } \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \le \varkappa_\nu \le k \\ 1 \le \lambda_\nu \le l \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nach (2.1) lautet jetzt die Voraussetzung

$$(2.7.1)\qquad a_1 b_1^{-1} \wedge \ldots \wedge a_\mu b_\nu^{-1} \wedge \ldots \wedge a_m b_n^{-1} < 1$$

und die Behauptung

$$(2.7.2)\qquad \ldots \wedge x_\varkappa a_\mu y_\lambda (x_{\varkappa_\nu} b_\nu y_{\lambda_\nu})^{-1} \wedge \ldots < 1$$

In (2.7.2) lautet das Glied mit $\varkappa = \varkappa_\nu$, $\lambda = \lambda_\nu$

$$x_{\varkappa_\nu} a_\mu b_\nu^{-1} x_{\varkappa_\nu}^{-1}.$$

Wegen (2.3) ist also (2.7.2) eine Folge von (2.7.1).

Für die damit definierte Multiplikation in V_{r_a} gilt selbstverständlich die Assoziativität. Das Einselement 1 von G ist auch Einselement von V_{r_a}. Ferner gilt auf Grund der Definition (2.6) die folgende Distributivität

$$(2.8)\qquad \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \vee \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2.$$

Um die Gruppeneigenschaft von V_{r_a} zu beweisen, zeigen wir zunächst die Gültigkeit von

$$(2.9)\qquad \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \wedge \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2.$$

Als ersten Fall behandeln wir

$$(2.10)\qquad (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)\,(b_1 \vee \ldots \vee b_n) = a_1 (b_1 \vee \ldots \vee b_n) \wedge \ldots \wedge a_m (b_1 \vee \ldots \vee b_n).$$

Die Gültigkeit mit $<$ statt $=$ folgt aus

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)\,(b_1 \vee \ldots \vee b_n) = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)\,b_1 \vee \ldots \vee (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)\,b_n$$

und

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) b_\nu < a_\mu (b_1 \vee \ldots \vee b_n).$$

Die Gültigkeit für $>$ reduziert sich auf Grund der verbandstheoretischen Distributivität auf

$$(2.11)\quad \begin{cases} a_1 b_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_{\mu_1} b_1 \vee \ldots \vee a_{\mu_n} b_n \\ \qquad \text{für alle } \nu_1, \ldots, \nu_m,\ \mu_1, \ldots, \mu_n \begin{pmatrix} 1 \le \nu_\mu \le n \\ 1 \le \mu_\nu \le m \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{s+1} = \mu_{\nu_{\lambda_s}}.$$

Dann tritt in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ mindestens eine Zahl zweimal auf, es sei etwa $\lambda_s = \lambda_{t+1}$ $(s \leq t)$.

Nach (2.1) ist zu zeigen

$$a_1 b_{\nu_1} (a_{\mu_1} b_1)^{-1} \wedge \ldots \wedge a_\mu b_{\nu_\mu} (a_{\mu_\nu} b_\nu)^{-1} \wedge \ldots < 1.$$

Unter diesen Gliedern treten auf

$$a_{\lambda_s} b_{\nu_{\lambda_s}} \left(a_{\mu_{\nu_{\lambda_s}}} b_{\nu_{\lambda_s}}\right)^{-1} \wedge \ldots \wedge a_{\lambda_t} b_{\nu_{\lambda_t}} \left(a_{\mu_{\nu_{\lambda_t}}} b_{\nu_{\lambda_s}}\right)^{-1},$$

d.h. aber

$$a_{\lambda_s} a_{\lambda_{s+1}}^{-1} \wedge \ldots \wedge a_{\lambda_t} a_{\lambda_{t+1}}^{-1}.$$

Mit Hilfe von (2.4) folgt daher die Gültigkeit von (2.11) und dann von (2.10). Als nächsten Fall behandeln wir

$$(2.12) \qquad (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)(b_1 \vee \ldots \vee b_n) = a_1 (b_1 \vee \ldots \vee b_n) \wedge \ldots \wedge a_m (b_1 \vee \ldots \vee b_n).$$

Wieder ist die Gültigkeit mit $<$ statt $=$ trivial. Für $>$ reduziert sich (2.12) auf

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_{\mu_1} b_1 \vee \ldots \vee a_{\mu_n} b_n,$$

wegen der verbandstheoretischen Distributivität also auf

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_{\mu_1} b_{1\lambda_1} \vee \ldots \vee a_{\mu_n} b_{n\lambda_n}.$$

Nun gilt aber trivialerweise

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_1 b_{\nu_1 \lambda_{\nu_1}} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m \lambda_{\nu_m}},$$

und

$$a_1 b_{\nu_1 \lambda_{\nu_1}} \wedge \ldots \wedge a_m b_{\nu_m \lambda_{\nu_m}} < a_{\mu_1} b_{1\lambda_1} \vee \ldots \vee a_{\mu_n} b_{n\lambda_n}$$

folgt aus (2.11).

Damit haben wir die Distributivität

$$(2.13) \qquad (\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2)\mathfrak{B} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}$$

erhalten, und es bleibt nur noch zu zeigen

$$(2.14) \qquad (\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}.$$

Die Linksdistributivität ergibt sich dann analog. Nun ist für

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_{11} \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_{1k_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_{21} \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_{2k_2}$$

$$\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 = (\mathfrak{a}_{11} \wedge \mathfrak{a}_{21}) \vee \ldots \vee (\mathfrak{a}_{1k_1} \wedge \mathfrak{a}_{2k_2}).$$

Nach (2.8) gilt also

$$(\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{B} = (\mathfrak{a}_{11} \wedge \mathfrak{a}_{21})\,\mathfrak{B} \vee \ldots \vee (\mathfrak{a}_{1k_1} \wedge \mathfrak{a}_{2k_2})\,\mathfrak{B}$$

und nach (2.13)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{B} &= (\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{a}_{21}\,\mathfrak{B}) \vee \ldots \vee (\mathfrak{a}_{1k_1}\,\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{a}_{2k_2}\,\mathfrak{B}) \\ &= (\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{B} \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_{1k_1}\,\mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{a}_{21}\,\mathfrak{B} \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_{2k_2}\,\mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}.\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von (2.9) definieren wir jetzt inverse Elemente in V_{r_a} durch

(2.15) $$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{-1} = a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1}$$

(2.16) $$(\mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_n)^{-1} = \mathfrak{a}_1^{-1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n^{-1}.$$

Die Invarianz gegenüber der Wahl der Darstellung ergibt sich hier aus

(2.17) $$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} = 1$$

(2.18) $$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1} = 1.$$

Die Gültigkeit von (2.17) mit $<$ statt $=$ folgt wegen (2.8) aus

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)\,(a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1}) = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)\,a_1^{-1} \vee \ldots \vee (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)\,a_n^{-1}$$

und

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)\,a_\nu^{-1} < a_\nu\,a_\nu^{-1} = 1.$$

Ebenso folgt wegen (2.9) aus

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)\,(a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1}) = a_1\,(a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1}) \wedge \ldots \wedge a_n\,(a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1})$$

und

$$a_\nu\,(a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_n^{-1}) > a_\nu\,a_\nu^{-1} = 1$$

die Gültigkeit von (2.17) mit $>$ statt $=$.

Unter Benutzung von (2.17) folgt dann (2.18) analog.

Zum Beweis von Satz 1 bleibt nur noch die Regularität von V_{r_a} zu zeigen, d. h.

(2.19) $$\mathfrak{X}\,\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}\,\mathfrak{Y} < \mathfrak{X}\,\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\,\mathfrak{Y}.$$

Wie bei (1.11) reduziert sich (2.19) auf

$$\mathfrak{X}\,a \wedge b\,\mathfrak{Y} < \mathfrak{X}\,b \vee a\,\mathfrak{Y},$$

und dann nochmals wie bei (1.11) auf

(2.20) $$x\,a \wedge b\,y < x\,b \vee a\,y.$$

Nach (2.1) ist also

$$(x\,a \wedge b\,y)\,(b^{-1}\,x^{-1} \wedge y^{-1}\,a^{-1}) < 1$$

zu beweisen. Links kommen vor $x\,a\,b^{-1}\,x^{-1}$ und $b\,a^{-1}$. Nach (2.3) ist daher nur $a\,b^{-1} \wedge b\,a^{-1} < 1$ zu beweisen, was aber aus (2.4) folgt.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß $a\,b^{-1} \wedge b\,a^{-1} < 1$ bekanntlich in jeder Verbandsgruppe gilt. Es läßt sich ebenso leicht zeigen, daß (2.4) — und daher auch (2.11) — in jeder Verbandsgruppe gilt. Jede Verbandsgruppe V ist nämlich rechtsregulär[2]) (ebenso auch linksregulär), d.h. es gilt

$$a\,x \wedge b\,y < a\,y \vee b\,x. \tag{2.21}$$

Denn (2.21) ist äquivalent mit

$$(a\,x \wedge b\,y)\,(y^{-1}a^{-1} \wedge x^{-1}b^{-1}) < a\,b^{-1} \wedge b\,a^{-1} < 1.$$

Nach [4], Satz 3 ist also die Halbordnung von V Konjunktion zulässiger Ordnungen, d.h. aber hier von Rechtsordnungen mit

$$a < b \to a\,x < b\,x.$$

Um (2.4) für V zu beweisen, genügt es also (2.4) für Rechtsordnungen $<$ zu zeigen. Gilt nun $c_1 < c_2$ oder $c_2 < c_3$ oder $\ldots c_{n-1} < c_n$, so folgt sofort (2.4). Andernfalls gilt aber $c_n < c_{n-1} < \ldots < c_1$ d.h. $c_n < c_1$, und es folgt ebenfalls (2.4).

§ 3.

In § 2 ist für jede halbgeordnete r-Gruppe G eine reguläre Verbandsgruppe V_{r_a} konstruiert. V_{r_a} ist ein Überidealbereich von G, wenn die Halbordnung von V_{r_a} eine Fortsetzung der Halbordnung von G ist, d.h. wenn gilt:

$$a\,R\,[\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_l^{\pm 1}]_r\,1 \to a < 1.$$

G heißt dann r-abgeschlossen.

Für den Spezialfall eines Körpers, in dem eine Teilbarkeit R durch Auszeichnung eines Integritätsbereiches I definiert ist und zu dessen (kommutativer) multiplikativer Gruppe G daher der Idealbereich H_d der DEDEKINDschen Ideale von I vorgegeben ist, entsprechen die d-zulässigen Halbordnungen von G eineindeutig den Oberringen von I. Die Halbordnung $R\,[\gamma]_d$ entspricht für $\gamma = (a, b)$ dem Integritätsbereich $I\,[a^{-1}b]$. Daher lautet die Bedingung der d-Abgeschlossenheit (der sog. Ganzabgeschlossenheit)

$$a \in I\,[c_1^{\pm 1}, \ldots, c_l^{\pm 1}] \to a \in I.$$

Die Definition der regulären d_a-Überidealgruppe lautet

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{d_a}{<} b_1 \vee \ldots \vee b_n \longleftrightarrow \bigvee_{c_1, \ldots, c_l} 1 \in (a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_m b_n^{-1})\,I\,[c_1^{\pm 1}, \ldots, c_l^{\pm 1}].$$

---

[2]) Anmerkung. Dagegen gibt es Verbandsgruppen, die nicht regulär sind. In der Gruppe der Ordnungsautomorphismen $f, g, \ldots$ der reellen Geraden mit $f < g \longleftrightarrow \bigwedge_x f|x \leq g|x$ und der Verkettung $f|g$ als Multiplikation (Einselement $e|x = x$) gilt z.B. für

$$f|x = 2x, \qquad g|x = x - 3$$

mit den Inversen

$$\bar{f}|x = \frac{x}{2}, \qquad \bar{g}|x = x + 3$$

nicht $\bar{f} \wedge g\,|\,f\,|\,\bar{g} < e$ (man nehme $x = -2$).

Diese Definition geht für $n = 1$ in die übliche Definition der Ganzabhängigkeit über auf Grund von

Satz 2.

$$\bigvee_{c_1,\ldots,c_l} 1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[c_1^{\pm 1},\ldots,c_l^{\pm 1}] \longleftrightarrow \bigvee_k 1 \in \sum_1^k{}_{\varkappa}\,(a_1,\ldots,a_m)^{\varkappa}.$$

Satz 2 ergibt sich aus [3], Satz 27 und [2] § 6, läßt sich jedoch direkt auch folgendermaßen beweisen:

Gilt

$$1 \in \sum_1^k{}_{\varkappa}\,(a_1,\ldots,a_m)^{\varkappa}, \tag{3.1}$$

dann folgt

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[a_1,\ldots,a_m]. \tag{3.2}$$

Also gilt wegen

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[a_\mu^{-1}]$$

auch

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[a_1^{\pm 1},\ldots,a_m^{\pm 1}].$$

Aus

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[c^{\pm 1}]$$

folgt umgekehrt (3.2), da aus

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\,(1, c,\ldots,c^n)$$

und

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\,(1, c^{-1},\ldots,c^{-n})$$

sofort

$$(c^{-n},\ldots,1,\ldots,c^n) < (a_1,\ldots,a_m)\,(c^{-n},\ldots,1,\ldots,c^n)$$

folgt, und hieraus (3.1) durch Bildung der Determinante. Durch Induktion nach l folgt jetzt (3.2) und dann (3.1) auch aus

$$1 \in (a_1,\ldots,a_m)\, I\,[c_1^{\pm 1},\ldots,c_l^{\pm 1}]. \tag{3.3}$$

Literatur.

[1] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1931). — [2] PRÜFER, H.: Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern. J. reine angew. Math. **168**, 1—36 (1932). — [3] LORENZEN, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1949). — [4] LORENZEN, P.: Teilbarkeitstheorie in Bereichen. Math. Z. **55**, 269—275 (1952). — [5] LORENZEN, P.: Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. J. Symb. Log. **16**, 81—106 (1951).

Bonn, Luisenstr. 3.

(Eingegangen am 10. Oktober 1952.)

BEHRENS, E.-A.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 25—40 (1953)

Assoziativ auflösbare Ringe.

Von
ERNST-AUGUST BEHRENS.

Einleitung.

Durch das Problem der Schnittmultiplizität in der algebraischen Geometrie wurde der Verfasser veranlaßt, in die Theorie der nicht notwendig assoziativen Ringe (Naringe) den Begriff der *assoziativ auflösbaren* Ringe einzuführen. Er ist analog zum Begriff der abelsch auflösbaren Gruppen in der Gruppentheorie gebildet, wobei einer Kette von Normalteilern hier eine Kette von Idealen und den abelschen Faktorgruppen hier solche Restklassenringe entsprechen, deren Multiplikation durchweg assoziativ ist.

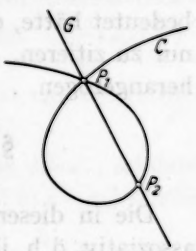

Fig. 1.

Bei der Strukturuntersuchung der assoziativ auflösbaren Ringe (§ 2) ergibt sich als bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Assoziatoren $(a\,b)\,c - a\,(b\,c)$ eines solchen Ringes $\mathfrak{a}$ und seinem nach SMILEY gebildeten Radikal $N(\mathfrak{a})$, daß der halbeinfache Ring $\mathfrak{a}/N(\mathfrak{a})$ stets assoziativ ist (Korollar zu Satz 12). Demzufolge erweist sich dann das Radikal $N(\mathfrak{a})$ als Urbild des Radikales des assoziativen Ringes $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$, wobei $\mathfrak{a}_1$ das von allen Assoziatoren aus $\mathfrak{a}$ erzeugte zweiseitige Ideal und die Abbildung der natürliche Homomorphismus von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$ ist (Satz 13).

Die Automorphismengruppe (§ 3) eines assoziativ auflösbaren Ringes läßt sich auf eine Untergruppe des freien direkten Produktes der Automorphismengruppen der assoziativen Restklassenringe einer gewissen $\mathfrak{a}$ auflösenden Idealkette zurückführen, zumindest dann, wenn keiner dieser Restklassenringe universelle Annihilatoren enthält (Satz 15). Dies Ergebnis legt natürlich die Frage nahe, ob ein assoziativ auflösbarer Ring etwa schon durch die Restklassenringe einer ihn auflösenden Kette eindeutig bestimmt sei. Daß das aber keineswegs so ist, zeigt die in § 4 behandelte Erweiterungstheorie.

Der Zusammenhang der assoziativ auflösbaren Ringe mit der algebraischen Geometrie wird zwar in § 5 eingehend besprochen, doch ist es vielleicht nützlich, ihn bereits jetzt an einem Beispiel zu erläutern: In der Ebene seien eine Kurve C dritten Grades mit dem Doppelpunkt P_1 und eine Gerade G durch P_1 gegeben, die C noch im Punkte P_2 schneide. Mit rationalen Zahlen β, γ als Koeffizienten bilde man die gemischtdimensionalen Zyklen $\beta_1 C + \beta_2 G + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2$. Sie bilden einen Modul vom Range vier über dem Körper der rationalen Zahlen, den man dadurch zu einer Algebra $\mathfrak{a}_0$ machen kann, daß man die Produkte der Basiselemente entsprechend der Multiplizitätstheorie [*1*]

des Verfassers für uneigentliche Schnittkomponenten definiert. Im obigen Beispiel ist also $C \cdot G = 2P_1 + P_2$, $P_1 \cdot C = 2P_1$, $P_2 \cdot C = P_2$, alle Basiselemente sind idempotent usw. Dieser kommutative Ring ist nicht assoziativ, denn der Assoziator $[P_1, C, C] = (P_1 \cdot C) \cdot C - P_1 \cdot (C \cdot C) = 4P_1 - 2P_1$ ist ungleich null. Daß es sich um einen wirklich nicht assoziativen Ring handelt, liegt eben daran, daß P_1 Doppelpunkt von C ist. Rechnet man aber modulo den Elementen $\gamma_1 P_1$, die in $\mathfrak{a}_0$ ein Ideal $\mathfrak{a}_1$ bilden, so erweisen sich die Assoziatoren aller Restklassen als null, und überdies ist der zum Körper der rationalen Zahlen isomorphe Ring $\mathfrak{a}_1$ selbst assoziativ. Also ist $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 = 0$ eine $\mathfrak{a}_0$ assoziativ auflösende Kette.

Zum Verständnis des § 2 der vorliegenden Abhandlung benötigt man den Zusammenhang einer subdirekten Summe einfacher Ringe mit Einselementen und dem nach SMILEY gebildeten Radikal (Satz 10). Doch wird im folgenden dieser von SMILEY stammende Satz auf dem von BROWN und MCCOY [3] beschriebenen Wege (Sätze 8 und 9) bewiesen, weil es kaum eine Platzersparnis bedeutet hätte, diesen Zusammenhang in der hier benötigten Ausführlichkeit nur zu zitieren. — Sätze aus der algebraischen Geometrie werden erst in § 5 herangezogen.

§ 1. Definition und elementare Eigenschaften der assoziativ auflösbaren Ringe.

Die in diesen Ausführungen untersuchten Ringe seien nicht notwendig assoziativ, d.h. ihre Multiplikation darf zwar durchweg dem Assoziativgesetz genügen, braucht es aber nicht. Unter ihnen sei eine Klasse ausgezeichnet durch folgende

Definition 1: Der Ring $\mathfrak{a}_0$ sei *assoziativ auflösbar* (ass. aufl.), wenn er eine Idealkette $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{i}_1 > \ldots > \mathfrak{i}_s = 0$ besitzt, in deren Restklassenringen $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_{s-1}/\mathfrak{i}_s$ die Multiplikation durchweg assoziativ ist. Dabei braucht $\mathfrak{i}_{k+1}$ nur Ideal im Ring $\mathfrak{i}_k$, aber nicht auch Ideal in $\mathfrak{a}_0$ zu sein. Eine Idealkette mit diesen Eigenschaften heiße *eine $\mathfrak{a}_0$ auflösende Kette von der Länge s.*

Satz 1. *Jede Idealkette eines ass. aufl. Ringes $\mathfrak{a}_0$ läßt sich zu einer $\mathfrak{a}_0$ auflösenden Kette verfeinern.*

Diese Behauptung ist ein Korollar des folgenden Analogons zum Satze von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER aus der Gruppentheorie:

Satz 2. *Zwei Idealketten eines beliebigen Ringes besitzen Verfeinerungen mit ringisomorphen Restklassenringen.*

Zum Beweis von Satz 2 braucht man sich nur daran zu erinnern, daß man in der Gruppentheorie (VAN DER WAERDEN [8], § 48) den Satz von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER durch vollständige Induktion nach den Längen der beiden Ketten von Normalteilern mittels des Isomorphiesatzes $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ beweisen kann. Letztere Beziehung gilt bekanntlich auch für Operatorisomorphie, insbesondere also dann, wenn $\mathfrak{a}$ ein Unterring und $\mathfrak{b}$ ein Ideal eines Ringes $\mathfrak{a}_0$ sind und die Operatoren in Multiplikationen mit Elementen aus $\mathfrak{a}$ bestehen. Dann ist aber der obige Operatorisomorphismus sogar ein Ringisomorphismus

zwischen den Restklassenringen $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$, wie die folgende Analyse der Abbildung zeigt: Die Restklasse $\bar{a}=a \bmod \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ wird abgebildet auf die Restklasse $\bar{\bar{a}}=a \bmod \mathfrak{b}$. Der Operator L_r sei die Linksmultiplikation mit dem Element r aus $\mathfrak{a}$, also $a L_r = r\cdot a$ und $\bar{a} L_r = \overline{r\cdot a} = \bar{r}\cdot\bar{a}$, entsprechend $\bar{\bar{a}} L_r = \overline{\overline{r\cdot a}} = \bar{\bar{r}}\cdot\bar{\bar{a}}$. Da nun bei der Operatorisomorphie $\bar{a}\cdot L_r \leftrightarrow \bar{\bar{a}} L_r$ gilt, folgt $\bar{r}\cdot\bar{a} \leftrightarrow \bar{\bar{r}}\bar{\bar{a}}$. Analog für Rechtsmultiplikation. Damit ist alles bereitgestellt, um den Satz 2 wörtlich so zu beweisen wie den Satz von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER in [8]. — Daß die Multiplikation im Ringe $\mathfrak{a}_0$ eventuell nicht durchweg assoziativ ist, hat für den Beweis keine Bedeutung, da es sich in ihm immer nur um das Produkt *zweier* Ringelemente handelt.

Aus Satz 1 folgt der

Satz 3: *Der Restklassenring eines ass. aufl. Ringes* $\mathfrak{a}_0$ *nach einem Ideal* $\mathfrak{i}$ *ist wieder ass. aufl.*.

Man braucht nämlich nur durch $\mathfrak{i}$ eine $\mathfrak{a}_0$ auflösende Kette $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{i}_0>\mathfrak{i}_1>\ldots>\mathfrak{i}_r=\mathfrak{i}>\mathfrak{i}_{r+1}>\ldots>\mathfrak{i}_s=0$ zu legen und wie im Beweise von Satz 2 durch Analyse der Abbildung zu zeigen, daß die Restklassenringe $\mathfrak{i}_k/\mathfrak{i}/\mathfrak{i}_{k+1}/\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}_k/\mathfrak{i}_{k+1}$ für $k=0, 1, \ldots, r-1$ einander ringisomorph sind.

Zum Beweis des folgenden Satzes über die Auflösbarkeit der Unterringe benötigt man das auch sonst sehr nützliche

Lemma 1: *Der Restklassenring eines Ringes* $\mathfrak{a}$ *nach einem Ideal* $\mathfrak{i}$ *ist dann und nur dann assoziativ, wenn* $\mathfrak{i}$ *die Assoziatoren* $[a, b, c]=(a\,b)\,c-a\,(b\,c)$ *aller Tripel* a, b, c *von Elementen aus* $\mathfrak{a}$ *enthält.*

Beweis. Der Assoziator $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ der von a, b, c repräsentierten Restklassen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ modulo $\mathfrak{i}$ ist dann und nur dann gleich $\bar{0}$, wenn $[a, b, c]\equiv 0 \pmod{\mathfrak{i}}$ ist.

Satz 4. *Jeder Unterring* $\mathfrak{u}$ *eines ass. aufl. Ringes* $\mathfrak{a}_0$ *ist wieder ass. aufl.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{a}_0>\mathfrak{i}_1>\ldots>\mathfrak{i}_s=0$ den Ring $\mathfrak{a}_0$ auflöst, dann ist

$$\mathfrak{u}=(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{a}_0)\geqq(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{i}_1)\geqq\ldots\geqq(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{i}_s)=0$$

eine Idealkette von $\mathfrak{u}$, die $\mathfrak{u}$ gemäß Lemma 1 auflöst, weil der Assoziator $[u_k, v_k, w_k]$ je dreier Elemente aus $\mathfrak{u}\cap\mathfrak{i}_k$ sowohl im Ring $\mathfrak{u}$ als auch, wieder nach Lemma 1, im Ideal $\mathfrak{i}_{k+1}$, also auch in $\mathfrak{u}\cap\mathfrak{i}_{k+1}$ liegt. — Natürlich kann dabei die Länge der auflösenden Kette geringer werden, z. B. dann, wenn $\mathfrak{u}=\mathfrak{i}_1$ ist.

Das Lemma 1 erlaubt, unter allen $\mathfrak{a}_0$ auflösenden Ketten eine gewisse Minimalkette auszuzeichnen. $\mathfrak{a}_0>\mathfrak{i}_1>\ldots>\mathfrak{i}_s=0$ sei irgendeine $\mathfrak{a}_0$ auflösende Kette. Nach Lemma 1 muß dann $\mathfrak{i}_1$ die Assoziatoren aller Elementetripel aus $\mathfrak{a}_0$ enthalten, und, da $\mathfrak{i}_1$ Ideal ist, auch das ganze von ihnen in $\mathfrak{a}_0$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a}_1=(\{[a_0, b_0, c_0];\ a_0, b_0, c_0<\mathfrak{a}_0\})$. Auch $\mathfrak{a}_1$ ist als Unterring von $\mathfrak{a}_0$ nach Satz 4 wieder ass. aufl., und es sei $\mathfrak{a}_2$ das von den Assoziatoren aller Elementetripel aus $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{a}_1$ erzeugte Ideal, $\mathfrak{a}_2=(\{[a_1, b_1, c_1];\ a_1, b_1, c_1<\mathfrak{a}_1\})_1$ usw. Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 5: *Die* $\mathfrak{a}_{k+1}=(\{[a_k, b_k, c_k];\ a_k, b_k, c_k<\mathfrak{a}_k\})_k$ *bilden eine* $\mathfrak{a}_0$ *auflösende Kette* $\mathfrak{a}_0>\mathfrak{a}_1>\ldots>\mathfrak{a}_n=0$. *Sie ist minimal in dem Sinne, daß für jede* $\mathfrak{a}_0$ *auflösende Kette* $\mathfrak{a}_0>\mathfrak{i}_1>\ldots>\mathfrak{i}_s=0$ *gilt* $\mathfrak{a}_k\leqq\mathfrak{i}_k$ *für* $k=1, 2, \ldots, n\leq s$.

Beweis durch vollständige Induktion nach k: Die Verankerung $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{i}_1$ wurde schon oben gezeigt. Sei also $\mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{i}_k$. Dann ist $\mathfrak{a}_k$ ein Unterring und $\mathfrak{i}_{k+1}$ ein Ideal in $\mathfrak{i}_k$ und die im Beweis von Satz 2 benutzte Ringisomorphie ergibt $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{i}_{k+1} \cong \mathfrak{a}_k + \mathfrak{i}_{k+1}/\mathfrak{i}_{k+1} \subseteq \mathfrak{i}_k/\mathfrak{i}_{k+1}$. Aus der Assoziativität von $\mathfrak{i}_k/\mathfrak{i}_{k+1}$ und damit von $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{i}_{k+1}$ kann man nun nach Lemma 1 auf $\mathfrak{a}_{k+1} \subseteq \mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{i}_{k+1} \subseteq \mathfrak{i}_{k+1}$ schließen. — Natürlich folgt aus $\mathfrak{i}_s = 0$ und $\mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{i}_k$, daß von einem gewissen $n \leq s$ ab $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \cdots = \mathfrak{a}_s = 0$ sein muß.

Definition 2. Für den Rest dieser Abhandlung seien mit $\mathfrak{a}_k$ ausschließlich die Ideale der Minimalkette aus Satz 5 bezeichnet. $\mathfrak{a}_0$ heiße *auflösbar von der Länge n*, wenn $\mathfrak{a}_n$ das erste Nullideal in der Kette der $\mathfrak{a}_k$ ist.

Ein assoziativer Ring ist auflösbar von der Länge 1.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch auf die Relationen zwischen den Elementen eines Ringes $\mathfrak{a}_0$ eingegangen, die aus der assoziativen Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}_0$ fließen. — Wenn $\mathfrak{a}_0$ auflösbar ist von der Länge 1, so sind die Assoziatoren $[a_0, b_0, c_0] = (a_0 b_0)\, c_0 - a_0 (b_0 c_0)$ aller Elementetripel aus $\mathfrak{a}_0$ gleich Null. Dieser „Assoziator erster Stufe" $[a_0, b_0, c_0]^{(1)}$ besteht aus zwei Summanden, von denen jeder ein Produkt der drei Elemente a_0, b_0, c_0 mit ± 1 ist. — Wenn $\mathfrak{a}_0$ auflösbar ist von der Länge 2, so liegen die drei Assoziatoren $[a_0, b_0, c_0]$, $[a_0', b_0', c_0']$, $[a_0'', b_0'', c_0'']$ in $\mathfrak{a}_1$, das selbst ein assoziativer Ring ist. Daraus folgt für je neun Elemente aus $\mathfrak{a}_0$ die Relation $[[a_0, b_0, c_0], [a_0', b_0', c_0'], [a_0'', b_0'', c_0'']] = 0$, deren linke Seite man als Assoziator zweiter Stufe bezeichnen könnte, $[a_0, \ldots, c_0'']^{(2)}$. Er besteht aus 16 Summanden zu je 9 Faktoren, noch multipliziert mit ± 1. — So kann man natürlich fortfahren und rekursiv die Assoziatoren n-ter Stufe definieren, die Relationen zwischen jeweils 3^n Elementen eines Ringes geben, der auflösbar ist von der Länge n. Doch werden diese Beziehungen mit wachsendem n sehr schnell unhandlich, denn bereits bei $n = 3$ handelt es sich um 8192 Summanden zu je 27 Faktoren gemäß der durch vollständige Induktion leicht zu beweisenden Formel, daß ein Assoziator n-ter Stufe aus $2^{\frac{1}{2}(3^n - 1)}$ Summanden in je 3^n dem Ringe $\mathfrak{a}_0$ entnommenen Faktoren besteht.

§ 2. Strukturtheorie.

Satz 6. *Für einfache Ringe besagen die Begriffe Assoziativität und assoziative Auflösbarkeit dasselbe.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{a}_0$ ass. aufl. ist, muß nach Satz 5 das Ideal $\mathfrak{a}_1$ echte Untermenge von $\mathfrak{a}_0$, also, falls $\mathfrak{a}_0$ überdies einfach ist, $\mathfrak{a}_1$ gleich dem Nullideal sein. Daraus folgt nach Definition von $\mathfrak{a}_1$, daß alle Assoziatoren gleich Null sind. Die Umkehrung ist trivial.

Das erste Ziel der folgenden Untersuchungen ist, auch für halbeinfache Ringe den Satz 6 zu beweisen. Dabei sei, um das Wesentliche hervortreten zu lassen, zunächst die absteigende Kettenbedingung für $\mathfrak{a}_0$ vorausgesetzt. Dann ist ein im Sinne von SMILEY [7] halbeinfacher Ring $\mathfrak{a}_0$ die volle direkte Summe $\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}_i$ von einfachen Ringen $\mathfrak{r}_i$ mit Einselementen. Die Folge der

$\mathfrak{i}_k = \sum_{i=1}^{m-k} \mathfrak{r}_i$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $\mathfrak{r}_0 = 0$, bildet eine Idealkette von $\mathfrak{a}_0$, die sich wegen der Isomorphie zwischen $\mathfrak{i}_k/\mathfrak{i}_{k+1}$ und dem einfachen Ringe $\mathfrak{r}_{m-k}$ nicht mehr verfeinern läßt. Falls $\mathfrak{a}_0$ ass. aufl. ist, müssen also nach Satz 1 die $\mathfrak{i}_k$ bereits eine $\mathfrak{a}_0$ auflösende Kette bilden, und daher die direkten Summanden $\mathfrak{r}_{m-k}$ sämtlich assoziative Ringe sein. Das zieht die Assoziativität von $\mathfrak{a}_0$ nach sich. Die Umkehrung ist wieder trivial.

Wenn die Gültigkeit der absteigenden Kettenbedingung für $\mathfrak{a}_0$ nicht vorausgesetzt wird, tritt an die Stelle der Darstellung von $\mathfrak{a}_0$ als volle direkte Summe eine Darstellung als subdirekte Summe $\mathfrak{S}_\iota \mathfrak{r}_\iota$ von einfachen Ringen $\mathfrak{r}_\iota$ mit Einselementen. Zum Begriff der subdirekten Summe gelangt man folgendermaßen: Ω sei eine Menge von Elementen ι derart, daß jedem ι eindeutig ein Ring $\mathfrak{r}_\iota$ zugeordnet sei. φ sei eine Funktion auf Ω, die jedem ι eindeutig ein Element $\varphi(\iota)$ in dem zugehörigen Ring $\mathfrak{r}_\iota$ zuweist. Dabei heißt der Funktionswert $\varphi(\iota)$ die *ι-Komponente von φ*. Diese Funktionen φ bilden einen Ring $\mathfrak{R}$, wenn man ihre Addition und Multiplikation komponentenweise erklärt. Ein Unterring $\mathfrak{a}_0$ von $\mathfrak{R}$ ist eine *subdirekte Summe* der Ringe $\mathfrak{r}_\iota$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{S}_\iota \mathfrak{r}_\iota$, $\iota < \Omega$, wenn jedes in $\mathfrak{r}_\iota$ vorgegebene Element r_ι die ι-Komponente von mindestens einem Element φ aus $\mathfrak{a}_0$ ist: $r_\iota = \varphi(\iota)$. Für eine Funktion φ aus $\mathfrak{a}_0$ werde zukünftig a_0 und für ihre ι-Komponente $\varphi(\iota)$ werde $a_{0\iota}$ geschrieben. — Unter der *ι-Komponente $\mathfrak{i}_{1\iota}$ eines Ideales* $\mathfrak{i}_1$ von $\mathfrak{a}_0$ versteht man die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{r}_\iota$, die als ι-Komponente mindestens eines Elementes aus $\mathfrak{i}_1$ auftreten. Man sieht sofort, daß $\mathfrak{i}_{1\iota}$ Ideal in $\mathfrak{r}_\iota$ ist; wenn nämlich $a_{1\iota}$ in $\mathfrak{i}_{1\iota}$ liegt und r_ι aus $\mathfrak{r}_\iota$ etwa die ι-Komponente von a_0 aus $\mathfrak{a}_0$ ist, d.h. $r_\iota = a_{0\iota}$, dann ist nach den obigen Rechenregeln $r_\iota \cdot a_{1\iota} = (a_0 \cdot a_1)_\iota < \mathfrak{i}_{1\iota}$. Entsprechend für Multiplikation von rechts.

Nun sollten die $\mathfrak{r}_\iota$ einfache Ringe sein, d.h. die ι-Komponente eines Ideales $\mathfrak{i}_1$ ist entweder $\mathfrak{r}_\iota$ oder 0. Jedes Ideal $\mathfrak{i}_1$ in $\mathfrak{a}_0$ erweist sich daher als eine subdirekte Summe $\mathfrak{S}_{\iota_1} \mathfrak{r}_{\iota_1}$, wobei nur die von 0 verschiedenen Summanden hingeschrieben sind, wobei also die Indizes ι_1 eine Teilmenge Ω_1 von Ω bilden. — Es soll jetzt unter Benutzung der $\mathfrak{a}_0$ auflösenden Minimalkette $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{a}_1 > \ldots > \mathfrak{a}_n = 0$ gezeigt werden, daß alle $\mathfrak{r}_\iota$, $\iota < \Omega$, assoziative Ringe sind. Der Assoziator $[a_{0\iota}, b_{0\iota}, c_{0\iota}]$ dreier Elemente aus $\mathfrak{r}_\iota$ ist gleich $[a_0, b_0, c_0]_\iota$, liegt also nach Definition von $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{a}_{1\iota}$. Es sei $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}_{\iota_1} \mathfrak{r}_{\iota_1}$, $\iota_1 < \Omega_1 < \Omega$. Da alle übrigen Komponenten $\mathfrak{a}_{1\iota}$ von $\mathfrak{a}_1$ gleich 0 sind, folgt, daß zumindest diejenigen $[a_{0\iota}, b_{0\iota}, c_{0\iota}] = 0$ sein müssen, deren ι nicht zu Ω_1 gehören, daß also zumindest diese Ringe $\mathfrak{r}_\iota$, $\iota \not< \Omega_1$, assoziativ sind. Denselben Schluß kann man nun innerhalb $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{S}_{\iota_2} \mathfrak{r}_{\iota_2}$, $\iota_2 < \Omega_2 < \Omega_1$, anwenden, weil das Ideal $\mathfrak{a}_2$ in $\mathfrak{a}_1$ dieselbe Rolle spielt, wie $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{a}_0$. Man erkennt, daß auch alle diejenigen Ringe assoziativ sein müssen, deren Indizes ι nicht zu Ω_2 gehören, usw. Hierbei werden alle Ringe $\mathfrak{r}_\iota$, die in der Darstellung von $\mathfrak{a}_0$ als subdirekte Summanden auftreten, erfaßt, weil ja nach Voraussetzung $\mathfrak{a}_n = 0$ und daher in $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{S}_{\iota_n} \mathfrak{r}_{\iota_n}$, $\iota_n < \Omega_n$, die Menge Ω_n leer ist. (An dieser Stelle wird die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}_0$ wesentlich benutzt.) — Aus der Assoziativität aller $\mathfrak{r}_\iota$ folgt sofort die Assoziativität von $\mathfrak{a}_0$. Damit ist bewiesen der

Satz 7: *Für subdirekte Summen einfacher Ringe fallen die Begriffe Assoziativität und assoziative Auflösbarkeit zusammen.*

Korollar. *Für halbeinfache Ringe, d.h. für subdirekte Summen einfacher Ringe mit Einselementen, ist Assoziativität äquivalent mit assoziativer Auflösbarkeit.*

Die halbeinfachen Ringe lassen sich auch noch anders charakterisieren, nämlich dadurch, daß ihr Radikal gleich Null ist. Das deutet auf einen Zusammenhang zwischen den Assoziatoren eines ass. aufl. Ringes $\mathfrak{a}_0$ und seinem Radikal hin. Der genauen Analyse dieser Beziehung soll der Rest dieses Paragraphen gewidmet sein.

Das im Sinne von SMILEY [7] gebildete Radikal $N(\mathfrak{a}_0)$ eines Ringes $\mathfrak{a}_0$ besteht aus allen denjenigen Ringelementen a_0, für die das von a_0 erzeugte zweiseitige Ideal (a_0) nur aus F-regulären Elementen b_0 besteht. Dabei heißt ein Element b_0 im Sinne von SMILEY F-regulär, wenn es zu dem von der Menge $\{b_0 x - x + y b_0 - y;\ x, y < \mathfrak{a}_0\}$ in $\mathfrak{a}_0$ erzeugten zweiseitigen Ideal $F(b_0) = (\{b_0 x - x + y b_0 - y;\ x, y < \mathfrak{a}_0\})$ gehört. Ein Ring heißt halbeinfach (im Sinne von SMILEY), wenn $N(\mathfrak{a}_0) = 0$ ist. Den Zusammenhang der halbeinfachen Ringe mit den einfachen Ringen mit Einselementen kann man den folgenden beiden Sätzen entnehmen, von denen der erste auf BROWN und MCCOY [3] zurückgeht.

Satz 8. *Der Restklassenring $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$ ist dann und nur dann einfacher Ring mit Einselement, wenn $\mathfrak{i}$ ein in $\mathfrak{a}_0$ großes und modulares Ideal ist; dabei heißt $\mathfrak{i}$ groß und modular, wenn es in $\mathfrak{a}_0$ ein Element e gibt derart, daß zwar das Ideal $F(e)$ in $\mathfrak{i}$ liegt aber nicht e selbst (modular), und daß ferner jedes echte Oberideal von $\mathfrak{i}$ das Element e enthält (groß).*

Beweis. „Dann": Beim natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{a}_0$ auf $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$ wird e abgebildet auf $\bar{e} \neq \bar{0}$, da $e \not< \mathfrak{i}$. Aus $\overline{F(e)} = \bar{0}$ folgt insbesondere $\bar{e} \cdot \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}$ und $\bar{y} \cdot \bar{e} - \bar{y} = \bar{0}$; also ist $\bar{e}$ Einselement in $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$. Sei $\mathfrak{b}$ das Urbild eines Ideales $\bar{\mathfrak{b}} \neq \bar{0}$ in $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$, also $\mathfrak{b}$ echtes Oberideal von $\mathfrak{i}$ und damit $e < \mathfrak{b}$; demnach enthält $\bar{\mathfrak{b}}$ das Einselement $\bar{e}$ von $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$, was die Einfachheit von $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$ nach sich zieht. — „Nur dann": e sei ein Urbild des Einselementes $\bar{e}$ von $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$ beim obigen Homomorphismus. Wegen $\overline{F(e)} = F(\bar{e}) = \bar{0}$ ist zwar $F(e) \leqq \mathfrak{i}$, aber wegen $e \not< \mathfrak{i}$ ist erst recht nicht e in $F(e)$, also ist $\mathfrak{i}$ ein in $\mathfrak{a}_0$ modulares Ideal. Es ist aber auch groß, denn $\mathfrak{i}$ hat überhaupt kein echtes Oberideal, da $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{i}$ nach Voraussetzung ein einfacher Ring ist. Q. e. d.

Satz 9 (SMILEY). *Das Radikal $N(\mathfrak{a}_0)$ ist der Durchschnitt $D = \bigcap \mathfrak{m}_\iota$ aller großen und modularen Ideale $\mathfrak{m}_\iota$ von $\mathfrak{a}_0$, wobei die einzelnen $\mathfrak{m}_\iota$ durch ihre Indizes ι unterschieden seien.*

Beweis (vgl. [3]). 1. Aus $a \not< N(\mathfrak{a}_0)$ folgt für ein passendes $b < (a)$, daß $b \not< F(b)$. Das damit modulare Ideal $F(b)$ läßt sich nach dem Lemma von ZORN vergrößern zu einem großen und modularen Ideal $\mathfrak{m}_\iota$, in dem b zwar ebenfalls nicht liegt, dessen sämtliche echten Oberideale aber b enthalten. Läge nun a in D, so auch in diesem $\mathfrak{m}_\iota$, also müßte auch $b < (a) \leqq \mathfrak{m}_\iota$ liegen, q. e. a. Daher zieht a in D nach sich $a \leqq N(\mathfrak{a}_0)$. 2. Der Beweis dafür, daß

9183-58 Mitt

aus $a \mathfrak{C} D$ folgt $a \mathfrak{C} N(\mathfrak{a}_0)$, beruht auf der nach BROWN und MCCOY für alle F-Abbildungen charakteristischen Eigenschaft

$$(P) \qquad F(a+b) \subseteq F(a) + (b),$$

der natürlich auch die obige zum Radikal von SMILEY führende Zuordnung $a \to F(a)$ genügt. Ausführung: Wegen $a \mathfrak{C} D$ gibt es ein großes und modulares Ideal $\mathfrak{m}_\iota$, das a nicht enthält. Sei nun e_ι ein Element mit $e_\iota \mathfrak{C} \mathfrak{m}_\iota$, aber $F(e_\iota) \subseteq \mathfrak{m}_\iota$ und derart, daß e_ι in jedem echten Oberideal von $\mathfrak{m}_\iota$ liegt. Dann gilt $e_\iota < (a, \mathfrak{m}_\iota)$, etwa $e_\iota = b + m$, wobei $b < (a)$ und $m < \mathfrak{m}_\iota$. Läge nun $a < N(\mathfrak{a}_0)$, dann wäre b regulär, also $b < F(b)$ und nach (P) daher $e_\iota - m < F(e_\iota - m) \subseteq F(e_\iota) + (m)$. Da m und $F(e_\iota)$ in $\mathfrak{m}_\iota$ liegen, würde $e_\iota < \mathfrak{m}_\iota$ folgen, q. e. a., also $a \mathfrak{C} N(\mathfrak{a}_0)$, wodurch zusammen mit 1. $D = N(\mathfrak{a}_0)$ bewiesen ist.

Korollar. *Das Radikal $N(\mathfrak{a}_0)$ ist als Durchschnitt der zweiseitigen Ideale $\mathfrak{m}_\iota$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{a}_0$.*

Den Sätzen 8 und 9 kann man nun entnehmen, daß ein halbeinfacher Ring $\mathfrak{a}_0$ einer subdirekten Summe von einfachen Ringen $\mathfrak{r}_\iota$ mit Einselementen isomorph ist. Denn aus der Halbeinfachheit, $N(\mathfrak{a}_0) = 0$, folgt, daß der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_\iota$ gleich 0 ist. Einem Element a_0 aus $\mathfrak{a}_0$ werde nun als ι-Komponente die Restklasse $a_{0\iota}$ von a_0 modulo $\mathfrak{m}_\iota$ zugeordnet, wobei die Indizes ι eine Menge Ω bilden. a_0 ist dabei durch seine Komponenten $a_{0\iota}$ eindeutig bestimmt, weil $\bigcap_\iota \mathfrak{m}_\iota = 0$ ist. Schließlich tritt jede Restklasse r_ι von $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{m}_\iota$ als ι-Komponente von mindestens einem a_0 aus $\mathfrak{a}_0$ wirklich auf. Daher ist $\mathfrak{a}_0$ subdirekte Summe der Restklassenringe $\mathfrak{r}_\iota = \mathfrak{a}_0/\mathfrak{m}_\iota$. Jeder dieser Ringe ist nach Satz 8 ein einfacher Ring mit Einselement. — Daß auch umgekehrt eine subdirekte Summe $\mathfrak{a}_0$ von einfachen Ringen $\mathfrak{r}_\iota$ mit Einselementen e_ι ein halbeinfacher Ring ist, ersieht man leicht daraus, daß beim komponentenweisen Rechnen die ι-Komponente $a_{0\iota}$ eines Elementes a_0 des Radikales $N(\mathfrak{a}_0)$ im Radikal $N(\mathfrak{r}_\iota)$ liegt und daß ferner $N(\mathfrak{r}_\iota) = 0$ ist, weil $N(\mathfrak{r}_\iota)$ als zweiseitiges Ideal nur gleich 0 oder gleich $\mathfrak{r}_\iota$ sein kann, $N(\mathfrak{r}_\iota) = \mathfrak{r}_\iota$ aber wegen $e_\iota \mathfrak{C} F(e_\iota) = 0$ ausgeschlossen ist. Damit ist folgender Satz von SMILEY bewiesen:

Satz 10. *Ein Ring $\mathfrak{a}_0$ ist dann und nur dann subdirekte Summe einfacher Ringe mit Einselementen, wenn sein nach* SMILEY *gebildetes Radikal $N(\mathfrak{a}_0) = 0$ ist.*

Schließlich benötigt man noch die für Radikale übliche Eigenschaft, daß der Restklassenring von $\mathfrak{a}_0$ nach seinem Radikal $N(\mathfrak{a}_0)$ halbeinfach ist:

Satz 11. $N(\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)) = 0$.

Der Beweis (vgl. BROWN und MCCOY [2]) beruht darauf, daß bei Restklassenbildung die Zuordnung $a \to F(a)$ ihre Eigenschaften behält. Es sei nämlich a ein Urbild der Restklasse $\bar{a}$ aus $N(\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0))$ beim natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{a}_0$ auf $\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)$. Für jedes $b < (a)$ gilt $\bar{b} < (\bar{a})$, also $\bar{b} < F(\bar{b})$. Folglich ist $b \equiv f(b)$ modulo $N(\mathfrak{a}_0)$, wobei $f(b)$ in $F(b)$ liegt. $b - f(b) < N(\mathfrak{a}_0)$ zieht nun wegen (P) nach sich $b - f(b) < F(b - f(b)) \subseteq F(b) + (f(b)) \subseteq F(b)$, und damit $b < F(b)$. Aus der damit bewiesenen Regularität aller Elemente b des Ideales (a) folgt $a < N(\mathfrak{a}_0)$ und daraus wieder $\bar{a} = \bar{0}$ oder $N(\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)) = 0$.

Mit $\mathfrak{a}_0$ ist nun nach Satz 3 auch $\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)$ ass. aufl., woraus, zusammen mit der Halbeinfachheit von $\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)$, aus Satz 7 folgt, daß $\mathfrak{a}_0/N(\mathfrak{a}_0)$ sogar assoziativ ist. Dies bedingt nun nach Satz 5, daß $\mathfrak{a}_1$ in $N(\mathfrak{a}_0)$ enthalten ist. Da $\mathfrak{a}_2$ gegenüber $\mathfrak{a}_1$ dieselbe Rolle spielt wie $\mathfrak{a}_1$ gegenüber $\mathfrak{a}_0$ usw. ergibt sich der

Satz 12: *Für die* $\mathfrak{a}_0$ *auflösende Minimalkette* $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0$ *gilt* $\mathfrak{a}_{k+1} \subseteqq N(\mathfrak{a}_k)$ *für* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Korollar. *Der Restklassenring eines ass. aufl. Ringes* $\mathfrak{a}_0$ *nach seinem Radikal ist ein assoziativer Ring.*

Bemerkung. Ein zweiter, rechnerischer Beweis wird am Ende dieses Paragraphen gebracht.

Nach dem obigen Korollar konzentriert sich das Interesse auf das Radikal eines ass. aufl. Ringes $\mathfrak{a}_0$. Man kann es angeben nach folgendem

Satz 13: *Das Radikal* $N(\mathfrak{a}_0)$ *eines ass. aufl. Ringes* $\mathfrak{a}_0$ *ist das Urbild des Radikales* $N(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1)$ *des assoziativen Restklassenringes* $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ *beim natürlichen Homomorphismus von* $\mathfrak{a}_0$ *auf* $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$.

Beweis. 1. Sei $a_0 < N(\mathfrak{a}_0)$ und $\bar{b}_0 < (\bar{a}_0)$, wobei der Querstrich die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{a}_1$ bezeichnet. Da nach Satz 12 $\mathfrak{a}_1$ in $N(\mathfrak{a}_0)$ liegt, gehört auch b_0 zu $N(\mathfrak{a}_0)$. Aus $b_0 < F(b_0)$ folgt $\bar{b}_0 < F(\bar{b}_0)$. Die damit bewiesene Regularität von allen $\bar{b}_0$ aus $(\bar{a}_0)$ in $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ zieht $\bar{a}_0 < N(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1)$ nach sich. — 2. Sei a_0 Urbild von $\bar{a}_0$ aus $N(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1)$. Also liegen alle $\bar{b}_0$ aus $(\bar{a}_0)$ in ihren $F(\bar{b}_0)$. Daraus folgt $b_0 \equiv f(b_0)$ modulo $\mathfrak{a}_1$ für ein passendes Element $f(b_0)$ aus $F(b_0)$ oder $b_0 - f(b_0) < \mathfrak{a}_1$. Nach Satz 12 liegt $\mathfrak{a}_1$ in $N(\mathfrak{a}_0)$, also ist weiter nach (P) $b_0 - f(b_0) < F(b_0 - f(b_0)) \subseteqq F(b_0) + (f(b_0)) \subseteqq F(b_0)$ und damit $b_0 < F(b_0)$ für alle $b_0 < (a_0)$, also gilt $a_0 < N(\mathfrak{a}_0)$. Q. e. d.

Korollar. *Wenn der Ring* $\mathfrak{a}_0$ *ass. aufl. und* $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ *halbeinfach ist, dann ist sein Radikal* $N(\mathfrak{a}_0)$ *genau gleich dem von seinen Assoziatoren erzeugten Ideal* $\mathfrak{a}_1$.

Bemerkungen. Der Satz 13 und sein Korollar sind auch deshalb interessant, weil für einen assoziativen Ring $\mathfrak{a}$ und ein beliebiges Ideal $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{a}$ bekanntlich aus $N(\mathfrak{a}/\mathfrak{i}) = 0$ und $N(\mathfrak{i}) = 0$ folgt $N(\mathfrak{a}) = 0$. Das Radikal braucht kein Radikalring zu sein, wie aus der Erweiterungstheorie in § 4 folgen wird. — Für assoziativ nicht auflösbare Ringe $\mathfrak{a}_0$ kann man ebenfalls das von den Assoziatoren von $\mathfrak{a}_0$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a}_1$ bilden und in $\mathfrak{a}_1$ wieder $\mathfrak{a}_2$ usw. Nur endet dann die Kette der $\mathfrak{a}_k$ nicht mit 0, sondern von einem gewissen t ab ist $0 \neq \mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_{t+1} = \cdots$. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß in diesem Fall die Sätze 12 und 13 keineswegs richtig zu sein brauchen; ein Gegenbeispiel bildet jeder einfache Ring $\mathfrak{a}_0$ mit Einselement e, der nicht assoziativ ist, z. B. das CAYLEY-System. Das Radikal $N(\mathfrak{a}_0)$ ist dann nämlich nach dem Korollar von Satz 7 gleich 0. Dagegen ist das Ideal $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$, weil aus $\mathfrak{a}_1 = 0$ die Assoziativität von $\mathfrak{a}_0$ folgen würde. Daher liegt, entgegen Satz 12, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ nicht in $N(\mathfrak{a}_0) = 0$. Ferner ist das Urbild von $N(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1) = 0$ beim natürlichen Homomorphismus $\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ gleich $\mathfrak{a}_0$, also, entgegen Satz 13, nicht gleich $N(\mathfrak{a}_0)$. —

Zur Erläuterung der für diesen ganzen Paragraphen fundamentalen Tatsache, daß die Assoziatoren eines ass. aufl. Ringes in seinem Radikal liegen

(Satz 12), ist es vielleicht nützlich, noch einen zweiten Beweis zu geben, der rein rechnerisch von den Assoziatoren direkt nachweist, daß sie den für die Elemente des Radikales nach SMILEY charakteristischen Relationen genügen. Das scheint auch deshalb berechtigt, weil der Verfasser durch die im § 5 behandelten Beispiele aus der algebraischen Geometrie auf die Vermutung $\mathfrak{a}_1 \subseteqq N(\mathfrak{a}_0)$ geführt wurde und diese dann zunächst rechnerisch, wie im folgenden beschrieben, bewiesen hat. Erst hinterher hat der Verfasser gesehen, daß es eleganter ist, von der Darstellung eines halbeinfachen Ringes als subdirekte Summe auszugehen, wie es der obige Beweis von Satz 12 tut.

Zur Vereinfachung der Rechnung sei vorausgesetzt, daß $\mathfrak{a}_0$ auflösbar ist bereits von der Länge zwei: $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 = 0$. Damit $[a, b, c]$ in $N(\mathfrak{a}_0)$ liegt, muß nach der Definition des Radikales von SMILEY jedes Element g des von $[a, b, c]$ erzeugten zweiseitigen Ideales $[a, b, c]$ regulär sein, d.h. g in dem Ideal $F(g) = (\{g\,x - x + y\,g - y;\ x, y < \mathfrak{a}_0\})$ liegen. Zunächst werde $[a, b, c] < F([a, b, c])$ gezeigt. Das folgt daraus, daß ein Assoziator distributiv ist in jeder seiner drei Stellen. Es ist nämlich

$$[[a, b, c]\,a - a, b, c] = (([a, b, c]\,a - a)\,b)\,c - ([a, b, c]\,a - a) \cdot (b\,c)$$

ein Element des Ideales $F([a, b, c])$ und damit

$$\begin{aligned} [a, b, c] &\equiv [[a, b, c]\,a, b, c] && \bmod F([a, b, c]) \\ &\equiv [[a, b, c]\,a, [a, b, c]\,b, c] && \bmod F([a, b, c]) \\ &\equiv [[a, b, c]\,a, [a, b, c]\,b, [a, b, c]\,c] && \bmod F([a, b, c]). \end{aligned}$$

Andererseits liegen $[a, b, c]\,a$, $[a, b, c]\,b$, $[a, b, c]\,c$ in dem von den Assoziatoren von $\mathfrak{a}_0$ erzeugten Ideal $\mathfrak{a}_1$, und, da dieses nach Voraussetzung ein assoziativer Ring ist ($\mathfrak{a}_2 = 0$), muß der auf der rechten Seite der letzten Kongruenz gebildete Assoziator gleich 0 sein, und damit $[a, b, c]$ in $F([a, b, c])$ liegen. — Die Regularität auch der übrigen Elemente g von $([a, b, c])$ läßt sich nach demselben Prinzip beweisen: Jedes Element von $([a, b, c])$ entsteht aus $[a, b, c]$ durch Anwendung einer Summe P von einer oder mehreren hintereinander ausgeführten Links- oder Rechtsmultiplikationen. Für den Operator P und $[a, b, c]$ gilt nun, ähnlich wie oben, $[([a, b, c]\,P)\,a - a, b, c]\,P < F([a, b, c]\,P)$, und damit wieder

$$\begin{aligned} [a, b, c]\,P &\equiv [([a, b, c]\,P)\,a, b, c]\,P && \bmod F([a, b, c]\,P) \\ &\equiv [([a, b, c]\,P)\,a, ([a, b, c]\,P)\,b, c]\,P && \bmod F([a, b, c]\,P) \\ &\equiv [([a, b, c]\,P)\,a, ([a, b, c]\,P)\,b, [a, b, c]\,P)\,c]\,P && \bmod F([a, b, c]\,P). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der letzten Kongruenz steht das Ergebnis der Anwendung von P auf den Assoziator dreier Elemente des Ideales $\mathfrak{a}_1$, also auf 0. Daraus folgt die Behauptung $[a, b, c]\,P < F([a, b, c]\,P)$. Q. e. d. Dieser Beweis des Satzes 12 zeigt, daß die Beziehung $\mathfrak{a}_1 \subseteqq N(\mathfrak{a}_0)$ für ass. aufl. Ringe nicht nur dann gilt, wenn $N(\mathfrak{a}_0)$ das Radikal im Sinne von SMILEY ist, d.h., wenn der

Radikalbildung die Zuordnung $g \to F(g) = (\{gx - x + yg - y;\ x, y < \mathfrak{a}_0\})$ zugrunde liegt, sondern auch dann, wenn man von $g \to F'(g) = (\{gx - x;\ x < \mathfrak{a}_0\})$ ausgeht. Auch diese Zuordnung hat die für eine F-Abbildung im Sinne von BROWN und MCCOY charakteristische Eigenschaft (P), so daß sich mit ihr ein F'-Radikal $N'(\mathfrak{a}_0)$ bilden läßt. Auch für dieses ist nach dem Obigen der folgende Satz bewiesen:

Satz 14. *Für das F'-Radikal $N'(\mathfrak{a}_0)$ eines auflösbaren Ringes $\mathfrak{a}_0$ gilt $\mathfrak{a}_1 \subseteqq N'(\mathfrak{a}_0)$, wobei dem F'-Radikal die Abbildung $a_0 \to F'(a_0) = (\{a_0 x - x;\ x < \mathfrak{a}_0\})$ zugrunde liegt.*

Offen ist noch die Frage, ob die Relation $\mathfrak{a}_1 \subseteqq N''(\mathfrak{a}_0)$ auch richtig ist für das Radikal $N''(\mathfrak{a}_0)$ von JACOBSON [5], [2], das von der Abbildung $a_0 \to F''(a_0) = (\{a_0 x - x,\ x < \mathfrak{a}_0\})^{(r)}$ ausgeht, wobei jetzt aber $(\ldots)^{(r)}$ das von den Elementen $a_0 x - x$ erzeugte *Rechts*ideal bedeutet.

§ 3. Die Automorphismengruppe.

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ eines ass. aufl. Ringes $\mathfrak{a}_0$ läßt sich auf die Automorphismengruppen $\mathfrak{g}_k$ der assoziativen Restklassenringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ zurückführen gemäß dem folgenden

Satz 15: *$\mathfrak{a}_0$ sei ass. aufl., und in der Minimalkette $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{a}_1 > \ldots > \mathfrak{a}_n = 0$ enthalte keiner der Restklassenringe $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, universelle Annihilatoren. Dann ist die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{a}_0$ isomorph einer Untergruppe des freien direkten Produktes der Automorphismengruppe $\mathfrak{g}_k$ der assoziativen Ringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Beweis. 1. Ein Assoziator $[a_0, b_0, c_0]$ geht bei einem Automorphismus τ von $\mathfrak{a}_0$ wieder in einen Assoziator über, also wird das ganze von den Assoziatoren erzeugte Ideal $\mathfrak{a}_1$ bei τ auf sich abgebildet. $\mathfrak{a}_1$ ist demnach ein gegenüber allen Automorphismen von $\mathfrak{a}_0$ zulässiges Ideal in $\mathfrak{a}_0$. Da ein Automorphismus von $\mathfrak{a}_0$ einen Automorphismus von $\mathfrak{a}_1$ induziert, ist auch $\mathfrak{a}_2$ gegenüber allen τ aus $\mathfrak{G}$ zulässig usw. Daraus folgt, daß der Automorphismus τ von $\mathfrak{a}_0$ in den Restklassenringen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ Automorphismen τ_k induziert. — Von dem Produkt $\sigma \cdot \tau$ zweier Automorphismen σ und τ aus $\mathfrak{G}$ wird natürlich in $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ das Produkt $\sigma_k \cdot \tau_k$ aus $\mathfrak{g}_k$ induziert. — Zum Beweis des Satzes ist nur noch zu zeigen, daß zwei Automorphismen σ und τ aus $\mathfrak{G}$ nur dann in allen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ denselben Automorphismus induzieren, wenn $\sigma = \tau$ ist; oder anders ausgedrückt, daß nur der identische Automorphismus ε von $\mathfrak{a}_0$ in allen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ den identischen Automorphismus induziert. Beweis durch vollständige Induktion nach i in den $\mathfrak{a}_{n-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$: Der Automorphismus τ aus $\mathfrak{G}$ induziere in allen Restklassenringen den identischen Automorphismus $\tau_k = \varepsilon_k$. Die Verankerung ($i = 1$) liegt bereits in $\mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{a}_{n-1}/\mathfrak{a}_n$, da $\mathfrak{a}_n = 0$ ist. Induktionsannahme: In $\mathfrak{a}_{n-i}$ induziere τ den identischen Automorphismus. Nach Voraussetzung induziert τ in $\mathfrak{a}_{n-i-1}/\mathfrak{a}_{n-i}$ ebenfalls den identischen Automorphismus $\tau_{n-i-1} = \varepsilon_{n-i-1}$. Nun sei a_{n-i-1} ein Element aus $\mathfrak{a}_{n-i-1}$. Dann folgt aus $\tau_{n-i-1}\{\bar{a}_{n-i-1}\} = \bar{a}_{n-i-1}$, daß $\tau\{a_{n-i-1}\} = a_{n-i-1} + a_{n-i}$ ist, wobei der Querstrich die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{a}_{n-i}$ bedeutet und a_{n-i} ein

zu a_{n-i-1} und τ passendes Element aus $\mathfrak{a}_{n-i}$ ist. Zu zeigen ist $a_{n-i}=0$. Es sei x_{n-i} ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}_{n-i}$. Dann liegt das Produkt $a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}$ im Ideal $\mathfrak{a}_{n-i}$, woraus nach Induktionsannahme $\tau\{a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}\}=a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}$ folgt. Andererseits ist aber, da τ ein Automorphismus von $\mathfrak{a}_0$ ist, $\tau\{a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}\}=\tau\{a_{n-i-1}\}\cdot\tau\{x_{n-i}\}=(a_{n-i-1}+a_{n-i})\cdot x_{n-i}=a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}+a_{n-i}\cdot x_{n-i}$. Diese beiden Darstellungen für $\tau\{a_{n-i-1}\cdot x_{n-i}\}$ ergeben sogleich $a_{n-i}\cdot x_{n-i}=0$ für alle x_{n-i} aus $\mathfrak{a}_{n-i}$. Daraus kann man auf die Behauptung $a_{n-i}=0$ schließen, wenn der folgende Hilfssatz gezeigt ist, den man nur auf $\mathfrak{b}_0=\mathfrak{a}_{n-i}$ anzuwenden braucht:

Hilfssatz. *Wenn in der Idealkette* $\mathfrak{b}_0>\mathfrak{b}_1>\ldots>\mathfrak{b}_s=0$ *eines beliebigen Ringes* $\mathfrak{b}_0$ *keiner der Restklassenringe* $\mathfrak{b}_j/\mathfrak{b}_{j+1}$, $j=0,1,\ldots,s-1$, *universelle Annihilatoren enthält, dann gibt es auch in* $\mathfrak{b}_0$ *keine universelle Annihilatoren.*

Beweis durch vollständige Induktion nach s. Die Verankerung ($s=1$) ist trivial. Induktionsannahme: Der Satz sei richtig für eine Kette von der Länge $s-1$. Demnach enthält unter den Voraussetzungen des Satzes der Ring $\mathfrak{b}_1$ keine universelle Annihilatoren. Nun sei $b_0\cdot x_0=0$ für ein Element $b_0<\mathfrak{b}_0$ und alle $x_0<\mathfrak{b}_0$. Da $\mathfrak{b}_0/\mathfrak{b}_1$ keine universelle Annihilatoren hat, muß b_0 in $\mathfrak{b}_1$ liegen. Wegen $b_0\cdot x_0=0$ gilt aber erst recht $b_0\cdot x_1=0$ für alle $x_1<\mathfrak{b}_1$. Daraus folgt $b_0=0$, q. e. d.

§ 4. Erweiterungstheorie.

Der Satz 15 des letzten Paragraphen legt die Frage nahe, wie weit der Ring $\mathfrak{a}_0$ durch die Restklassenringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ festgelegt ist. Man kann diese Frage mit einem Existenzproblem verbinden: Ist es immer möglich, zu n vorgegebenen assoziativen Ringen $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_{n-1}$ einen ass. aufl. Ring $\mathfrak{a}_0$ zu finden, dessen Minimalkette $\mathfrak{a}_0>\mathfrak{a}_1>\ldots>\mathfrak{a}_n=0$ den Isomorphiebedingungen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}\cong\mathfrak{A}_k$ genügt, und wieweit ist $\mathfrak{a}_0$ durch die $\mathfrak{A}_k$ bestimmt?

Die Problemstellung ist analog einer bekannten Frage aus der Gruppentheorie; jedoch ist jetzt die Konstruktion des Ringes $\mathfrak{a}_0$ leichter als die entsprechende Aufgabe in der Erweiterungstheorie der Gruppen, weil man nur dafür zu sorgen braucht, daß alle Elemente aus $\mathfrak{a}_1$ sich durch Assoziatoren von Elementetripeln aus $\mathfrak{a}_0$ erzeugen lassen (daß also das Assoziativgesetz in $\mathfrak{a}_0$ „hinreichend schlecht" erfüllt wird), man aber nicht gezwungen ist, die Multiplikation in $\mathfrak{a}_0$ darüber hinaus noch einem tiefliegenden Gesetz (wie in der Gruppentheorie der Assoziativität der Multiplikation) zu unterwerfen. Auf das Distributivgesetz muß man allerdings achten. — Die Hauptschwierigkeit bei der Konstruktion von $\mathfrak{a}_0$ liegt darin, daß man sich nicht mit den obigen allgemeinen Bemerkungen begnügen kann, sondern die Multiplikation in $\mathfrak{a}_0$ wirklich angeben muß. Wenn aber die Ringe $\mathfrak{A}_k$ Algebren endlichen Ranges über einen gemeinsamen Grundkörper K sind, läßt sich $\mathfrak{a}_0$ als Algebra über K mit Hilfe einer Multiplikationstabelle konstruieren, die aus den Multiplikationstabellen der $\mathfrak{A}_k$ zusammengesetzt ist; es gilt nämlich der folgende

Satz 16: *Vorgegeben seien über einem gemeinsamen Grundkörper* K, *von beliebiger Charakteristik,* n *assoziative Algebren* $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_{n-1}$ *mit den*

Rängen r_k über K. Kein $\mathfrak{A}_k$ bestehe nur aus universellen Annihilatoren. Dann gibt es eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über K vom Range $r_0+r_1+\cdots+r_{n-1}$, die ass. aufl. ist durch eine Minimalkette $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0$, deren Restklassenringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ isomorph sind zu den $\mathfrak{A}_k$.

Vor dem Beweis sei noch bemerkt, daß wegen der komplizierten Bezeichnungen nur der Fall $n=2$ im folgenden vorgeführt wird, der bereits alles Wesentliche zeigt. — Daß man eine Voraussetzung von der Art „Kein $\mathfrak{A}_k$ bestehe nur aus universellen Annihilatoren" machen muß, zeigt das Beispiel: $n=2$, $\mathfrak{A}_0$ gleich Nullring. In diesem Falle müßte $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1 = 0$, also $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ sein, was der wegen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_2 \cong \mathfrak{A}_1$ vorausgesetzten Assoziativität von $\mathfrak{a}_1$ widersprechen würde. — Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die beim Beweis geschilderte Konstruktion von $\mathfrak{a}_0$ so viele willkürliche Bausteine enthält, daß im allgemeinen gar keine Rede davon sein kann, daß $\mathfrak{a}_0$ durch die $\mathfrak{A}_k$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis von Satz 16. Eine Basis von $\mathfrak{A}_1$ über K bestehe aus den Elementen $a_{11}, \ldots, a_{1r_1}$. Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{A}_0$ ein Element a_0, das nicht absoluter Nullteiler ist. 1. *Fall.* Es gibt in $\mathfrak{A}_0$ ein von a_0 linear unabhängiges Element b_0 derart, daß $a_0 \cdot b_0 = c_0 \neq 0$ ist, es ist also c_0 linear unabhängig von a_0 oder b_0. Dann werde $\mathfrak{a}_0$ als Algebra über K erklärt mit einer Basis $a_{01}, \ldots, a_{0r_0}, a_{11}, \ldots, a_{1r_1}$ und folgender Multiplikation: $a_{1i} \cdot a_{1j}$ wie in $\mathfrak{A}_1$. Falls a_0 und c_0 linear unabhängig sind, ergänze man sie zu einer Basis von $\mathfrak{A}_0$. Mit der Zuordnung $a_{01} \leftrightarrow a_0$, $a_{02} \leftrightarrow c_0, \ldots$ werde die Multiplikation der a_{0i} so wie in $\mathfrak{A}_0$ erklärt. Die Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} definiere man durch $a_{1j} \cdot a_{01} = 0$, $a_{1j} a_{02} = -a_{1j}$, $j = 1, \ldots, r_1$. Bei der obigen Zuordnung sei mit a_{00} das Bild des Elementes b_0 aus $\mathfrak{A}_0$ bezeichnet. Dann wird $[a_{1j}, a_{01}, a_{00}] = a_{1j}$, da $a_{01} \cdot a_{00} = a_{02}$ ist. — Die Behandlung des zweiten Falles (b_0 und c_0 linear unabhängig) unterscheidet sich von der des ersten nur durch $a_{01} \leftrightarrow b_0$, $a_{02} \leftrightarrow c_0$, $a_{00} \leftrightarrow a_0$, $a_{01} \cdot a_{1j} = 0$, $a_{02} \cdot a_{1j} = a_{1j}$, $[a_{00}, a_{01}, a_{1j}] = a_{1j}$. — Die übrigen Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} erkläre man *irgendwie* als Elemente des von den a_{1j} über K erzeugten Teilringes $\mathfrak{a}_1$, der dabei natürlich ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{a}_0$ wird. Offenbar ist $\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{A}_0$.

2. *Fall.* Von 0 verschieden sind in $\mathfrak{A}_0$ höchstens Quadrate $a_0^2 = c_0 \neq 0$, darunter eines mit c_0 linear unabhängig von a_0. Dann ergänze man a_0 und c_0 zu einer Basis von $\mathfrak{A}_0$ und definiere nach der Zuordnung $a_{01} \leftrightarrow a_0$, $a_{02} \leftrightarrow c_0, \ldots$ die Produkte der a_{0i} unter sich und der a_{1j} unter sich wie in $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{A}_1$. Ferner definiere man $a_{01} \cdot a_{1j} = 0$, $a_{02} \cdot a_{1j} = a_{1j}$ und erhält wegen $a_{01}^2 = a_{02}$ in den Assoziatoren $[a_{01}, a_{01}, a_{1j}] = a_{1j}$ die Basis eine Untermoduls $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}_0$. Damit $\mathfrak{a}_1$ Ideal in $\mathfrak{a}_0$ wird, erkläre man die restlichen Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} in $\mathfrak{a}_1$ und im übrigen *beliebig*.

3. *Fall.* Für alle von 0 verschiedenen Quadrate gilt $a_0^2 = \varrho\, a_0$, $\varrho < K$. Man ordne zu: $a_{01} \leftrightarrow a_0$, und definiere $a_{01} \cdot a_{1j} = \sigma\, a_{1j}$, $\sigma < K$. Wegen $[a_{01}, a_{01}, a_{1j}] = (\varrho - \sigma)\, \sigma\, a_{1j}$ setze man $\sigma \neq 0$ und $\sigma \neq \varrho$ in K und erkläre im übrigen die Produkte in dem bereits in den ersten beiden Fällen angewandten Sinne. Das geht aber offenbar nur dann, wenn der Grundkörper K nicht gleich dem

Primkörper $C(2)$ der Charakteristik 2 ist. Aber auch in diesem letzten Falle kommt man mit folgenden Definitionen durch: a) Wenn der Rang $r_1 = [\mathfrak{A}_1 : C(2)] = 2s$, also eine gerade Zahl ist, erkläre man

$$a_{01} \cdot a_{1,2l} = 0 \qquad a_{1,2l} \cdot a_{01} = a_{1,2l-1},$$

$$a_{01} \cdot a_{1,2l-1} = a_{1,2l}, \qquad a_{1,2l-1} \cdot a_{01} = 0,$$

$l = 1, 2, \ldots, s$, und erhält, wegen $\varrho = 1$, also $a_{01}^2 = a_{01}$, in den Assoziatoren $[a_{01}, -a_{1,2l}, a_{01}] = a_{1,2l}$, $[a_{01}, a_{1,2l-1}, a_{01}] = a_{1,2l-1}$ wieder eine Basis von $\mathfrak{a}_1$. — b) Wenn $r_1 = 2s+1$ ist, $s = 0, 1, \ldots$, erkläre man die Produkte von a_{01} mit den $a_{1,2l}$ und den $a_{1,2l-1}$ für $l = 1, 2, \ldots, s$ wie unter a), und für das letzte Element $a_{1,2s+1}$ erkläre man $a_{01} \cdot a_{1,2s+1} = 0$, $a_{1,2s+1} a_{01} = a_{1,2s+1}$, jetzt aber a_{01}^2 nicht gleich a_{01}, sondern $a_{01}^2 = a_{01} + a_{1,2s+1}$. Dann erhält man in $a_{1,2s+1} = [a_{01}, a_{01}, a_{01}]$ auch noch das letzte Basiselement von $\mathfrak{a}_1$ als Assoziator. Q. e. d.

§ 5. Beispiele aus der algebraischen Geometrie.

Bereits in der Einleitung wurde ein Beispiel eines ass. aufl. Ringes mit Hilfe einer ebenen algebraischen Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt gegeben. Es läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: $A, B, C, \ldots$ seien über dem Grundkörper k irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten (alg. Mf.) im N-dimensionalen Raum S^N. Sie brauchen nicht alle die gleiche Dimension zu haben. Aus jeweils *endlich* vielen unter ihnen seien mit rationalen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ die gemischtdimensionalen Zyklen $\alpha A + \beta B + \cdots + \gamma C$ zusammengesetzt. Da zwei verschiedene alg. Mfn. dabei als linear unabhängig über dem Körper K der rationalen Zahlen angesehen werden, bilden diese Zyklen einen Modul unendlichen Ranges über K. Aus ihm läßt sich ein Ring, genauer eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über K, dadurch machen, daß man die Produkte $A \cdot B$ der Basiselemente erklärt. Nun besteht, wie in der algebraischen Geometrie gezeigt wird, der Durchschnitt $A \cap B$ aus endlich vielen isolierten Komponenten $D_1, D_2, \ldots, D_s$. *Jeder* von ihnen läßt sich eine natürliche Zahl als Schnittmultiplizität $\mu(A \cdot B, D)$ zuordnen, die gewisse Eigenschaften besitzt, wie P. SAMUEL [6], in Verfolgung der Ideen von C. CHEVALLEY [4], und der Verfasser [1], unter Benutzung der von A. WEIL [9] für eigentliche Komponenten aufgestellten Multiplizitätstheorie, gezeigt haben. Dabei ist jedoch hervorzuheben, daß nicht alle Eigenschaften der Multiplizität, die für eigentliche Komponenten richtig sind, auch für uneigentliche Schnittkomponenten gelten. Insbesondere gilt für μ nicht mehr das sog. Assoziativgesetz (vgl. [1], § 5). Es läßt sich unter Benutzung des oben konstruierten Moduls der gemischtdimensionalen Zyklen folgendermaßen aussprechen: Als Produkt $A \cdot B$ zweier alg. Mfn., also zweier Basiselemente des Moduls, definiere man $A \cdot B = \sum_{i=1}^{s} \mu(A \cdot B, D_i) D_i$, wenn $A \cap B$ die alg. Mfn. $D_1, \ldots, D_s$ als isolierte Komponenten besitzt. Weil die $A, B, \ldots$ linear unabhängig sind, ist damit eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über dem Körper K der rationalen Zahlen erklärt. Sie sei als *Ring der algebraischen Mannigfaltigkeiten*

des S^N bezeichnet. Für ihre Multiplikation gilt nicht durchweg das Assoziativgesetz, wie bereits das in der Einleitung behandelte Beispiel zeigt. Wohl aber gilt es für solche Produkte $A \cdot B$, bei denen alle D_i eigentliche Schnittkomponenten sind (A. WEIL [9]).

Unter die alg. Mfn. des N-dimensionalen Raumes ist auch $S = S^N$ selbst zu rechnen, und natürlich ist $1\,S$ das Einselement von $\mathfrak{a}_0$.

Satz 17. *Der Ring* $\mathfrak{a}_0$ *der alg. Mfn. des* S^N *ist ass. aufl. von der Länge* N.

Beweis. Da in $A \cap B = D_1 \cup D_2 \ldots \cup D_s$ gilt $\operatorname{Dim} D_i \leq \operatorname{Min}\{\operatorname{Dim} A, \operatorname{Dim} B\}$, bilden diejenigen Elemente aus $\mathfrak{a}_0$, die aus alg. Mfn. der Dimensionen kleiner oder gleich $N-2$ linear kombiniert sind, ein Ideal $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{a}_0$. In $\mathfrak{a}_1$ wiederum bilden diejenigen Linearkombinationen a_2, in denen nur alg. Mfn. A der $\operatorname{Dim} A \leq N-3$ auftreten, ein Ideal $\mathfrak{a}_2$ usw., bis schließlich $\mathfrak{a}_N = 0$ erreicht ist. — Übrigens sind alle $\mathfrak{a}_k$ Ideale auch in $\mathfrak{a}_0$. — Behauptet wird, daß diese $\mathfrak{a}_k$ die $\mathfrak{a}_0$ auflösende Minimalkette im Sinne von Satz 5 bilden. Dazu werde zunächst die Assoziativität des Restklassenringes $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ gezeigt. Nach der Multiplizitätstheorie sind die Basiselemente sämtlich idempotent, da $\mu(A \cdot A, A) = 1$ ist. Wegen $\operatorname{Dim} D_i < \operatorname{Min}\{\operatorname{Dim} A, \operatorname{Dim} B\}$, falls A und B beide ungleich S und voneinander verschieden sind, ist $1\,A \cdot 1\,B \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}_1$. Damit ergibt sich, daß $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ eine Algebra über K ist mit einer Basis, die aus dem Einselement und im übrigen aus lauter orthogonalen Idempotenten besteht. Natürlich zieht das die Assoziativität von $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ nach sich. — Analog erweist sich $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_2$ als Algebra über K mit einer aus orthogonalen Idempotenten bestehenden Basis usw. — Also ist $\mathfrak{a}_0$ auflösbar von einer Länge, die höchstens gleich N ist. Daß die $\mathfrak{a}_0$ auflösende Kette der $\mathfrak{a}_k$ sich nicht mehr verkürzen läßt, folgt nun einfach daraus, daß es für $l \geq 1$ zu jeder vorgegebenen alg. Mf. A der $\operatorname{Dim} A = N-l-1$ eine alg. Mf. B der $\operatorname{Dim} B = N-l$ gibt, die A als singulären Bestandteil enthält. Dann ist $\mu(A \cdot B, A) \geq 2$, und wegen $[1\,A, 1\,B, 1\,B] = \mu^2 A - \mu A = \mu(\mu-1)\,A$ ist A Assoziator eines Elementetripels aus $\mathfrak{a}_{l-1}$. Nun besteht $\mathfrak{a}_k$ aus den Linearkombinationen von alg. Mfn. der Dimensionen l, $l \leq N-k-1$. Also ist nach dem Vorangegangenen jedes Basiselement aus $\mathfrak{a}_k$ Assoziator eines Tripels von Elementen, die in $\mathfrak{a}_{k-1}$ liegen. Da überdies $\mathfrak{a}_k$ Ideal in $\mathfrak{a}_{k-1}$ ist, folgt, daß $\mathfrak{a}_k$ das von den Assoziatoren der Elementetripel aus $\mathfrak{a}_{k-1}$ erzeugte Ideal ist, daß die $\mathfrak{a}_k$ also die Minimalkette von $\mathfrak{a}_0$ bilden. Q. e. d.

Nach Satz 4 ist jeder Unterring des Ringes der algebraischen Mannigfaltigkeiten des S^N ebenfalls assoziativ auflösbar. Unter diesen gibt es Ringe endlichen Ranges über K. Man erhält sie, indem man von endlichen vielen alg. Mfn. ausgeht und beachtet, daß der Durchschnitt zweier Mannigfaltigkeiten aus nur endlich vielen isolierten Komponenten besteht, so daß bei fortwährendem Schneiden (Multiplizieren) nur endlich viele Mannigfaltigkeiten ins Spiel kommen. — Unter den Unterringen gibt es natürlich auch solche, die auflösbar sind von kürzerer Länge als N. So ist z. B. der aus den linearen Räumen des S^N erzeugte Unterring bereits assoziativ nach folgendem etwas allgemeinerem

Satz 18: *Ein Unterring $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^N ist dann und nur dann assoziativ, wenn in ihm alle Multiplizitäten $\mu = 1$ sind und ein in $\mathfrak{a}_0$ auftretender Durchschnitt $A \cap B$ entweder nur eine Komponente hat oder jeweils zwei seiner Komponenten einander nicht schneiden.*

Beweis. Zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen. 1. Fall: Wäre $\mu(A \cdot B, B) \geq 2$, also B singulärer Bestandteil von A, dann wäre in $\mathfrak{a}_0$ der Assoziator $[A, A, B] = \mu B - \mu^2 B = 0$. 2. Fall: In $A \cdot B = \sum_{i=1}^{s} \mu(A \cdot B, D_i) D_i$ sei D_1 echte Untermenge von A und B. Falls D_1 singulärer Bestandteil von A oder von B ist, etwa von A, ist wieder $[A, A, D_1] \neq 0$. Wenn aber D_1 nichtsingulärer Bestandteil sowohl von A als auch von B ist, also $\mu(A \cdot D_1, D_1) = \mu(B \cdot D_1, D_1) = 1$ ist, dann ist der Assoziator $[A, B, D_1] = \mu(A \cdot B, D_1) D_1 - D_1 + \sum_{k=2}^{s} \mu(A \cdot B, D_k)\, D_k \cdot D_1$ nur dann gleich 0, wenn $\mu(A \cdot B, D_1) = 1$ und entweder $s = 1$ ist, so daß die Summe über $k = 2, \ldots, s$ auf der rechten Seite wegfällt, oder wenn alle $D_k \cdot D_1 = 0$ sind. Aus Symmetriegründen folgt $\mu(A \cdot B, D_i) = 1$ und $D_i \cdot D_k = 0$ für alle $i \neq k$. — Die Bedingungen sind auch hinreichend: In $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = D_1 \cup \ldots \cup D_u$ sei $A \cdot B = \sum_{i=1}^{s} X_i$ und $B \cdot C = \sum_{t=1}^{w} Y_t$. Also tritt jedes D_k in mindestens einem $X_i \cdot C$ und in mindestens einem $A \cdot Y_t$ auf. D_k kann aber nicht in zweien der $X_i \cdot C$ auftreten, weil sonst diese beiden X_i zumindest D_k in ihrem Durchschnitt enthielten, was der Voraussetzung widersprechen würde. Ebensowenig kann D_k in zweien der Y_t auftreten. Hieraus und aus $\mu = 1$ folgt $\sum_{i=1}^{s} X_i \cdot C = \sum_{k=1}^{u} D_k = \sum_{t=1}^{w} A \cdot Y_t$ und damit $[A, B, C] = 0$.

Korollar. *Ein Unterring des Ringes der alg. Mfn. des S^2 ist dann und nur dann assoziativ, wenn in ihm alle Multiplizitäten $\mu = 1$ sind.*

Beweis. In diesem Fall ist jedes D_i aus dem Durchschnitt zweier irreduzibler Kurven A und B ein Punkt, und zwei Punkte schneiden einander nicht.

Satz 19. *Ein Unterring $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^N ist dann und nur dann potenzassoziativ, wenn er bereits assoziativ ist.*

Zu zeigen ist nur, daß die Bedingung notwendig ist. Dazu genügt der Nachweis, daß die Bedingungen des Satzes 18 erfüllt sind. Sie folgen nach leichter, aber etwas umständlicher Rechnung aus dem Vergleich von $((A + \beta B)^2)^2$ mit $((A + \beta B)^2 \cdot (A + \beta B)) \cdot (A + \beta B)$, wobei β die Menge der rationalen Zahlen durchläuft.

Zum Schluß sei noch mit Hilfe des Satzes 15 aus § 3 die Automorphismengruppe des folgenden Unterringes $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^2 bestimmt. Die Basis von $\mathfrak{a}_0$ bestehe aus der Ebene S^2, im folgenden S genannt, einer Kurve C mit singulärem Punkt P und aus diesem Punkt P. Seine Elemente sind also $\alpha S + \beta C + \gamma P$. Wegen $\mu(C \cdot P, P) \geq 2$ ist $\mathfrak{a}_0$ nicht assoziativ. $\mathfrak{a}_1$

besteht aus den Elementen γP. τ sei ein Automorphismus von $\mathfrak{a}_0$, unter dem der Körper K der rationalen Zahlen invariant ist. $\mathfrak{a}_1$ ist zulässig bei τ und daher wird jedes γP auf sich abgebildet. In $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ induziert τ einen Automorphismus τ_0, bei dem von den beiden einzigen Idempotenten S und $S-C$ in $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ entweder jedes auf sich abgebildet wird oder bei dem S und $S-C$ miteinander vertauscht werden. Im ersten Falle induziert τ auch in $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1$ den identischen Automorphismus und muß daher nach Satz 15 auch in $\mathfrak{a}_0$ der identische Automorphismus sein. Im zweiten Falle werden von den drei Basiselementen von $\mathfrak{a}_0$ bei τ das Einselement S und P auf sich abgebildet und C auf $S-C+\gamma P$. Aus $\tau\{C\cdot P\}=\tau\{\mu P\}=\mu P$ zusammen mit $\tau(C)\cdot\tau(P)=(S-C+\gamma P)P=(1-\mu+\gamma)P$ folgt als einzige Möglichkeit für τ, daß $\gamma=2\mu-1$ ist. Man verifiziert mühelos, daß die Zuordnung $S\to S$, $C\to S-C+(2\mu-1)P$, $P\to P$ in der Tat einen Automorphismus τ von $\mathfrak{a}_0$ liefert. Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{a}_0$ besteht also aus diesem τ und dem identischen Automorphismus.

Literatur.

[1] BEHRENS, E.-A.: Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie. Math. Z. **55**, 199—215 (1952). — [2] BROWN, B.: An extension of the Jacobson radical. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 114—117 (1951). — [3] BROWN, B., and N. H. MCCOY: Some theorems on groups with applications to ring theory. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 302—311 (1950). — [4] CHEVALLEY, C.: Intersections of algebraic and algebroid varietys. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 1—85 (1945). — [5] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [6] SAMUEL, P.: La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique I, II. J. Math. Pures Appl. (9) **30**, 159—205 und 207—274 (1951). — [7] SMILEY, M. F.: Application of a radical of Brown and McCoy to nonassociative rings. Amer. J. Math. **72**, 93—100 (1950). — [8] WAERDEN, B. L. VAN DER: Moderne Algebra, Bd. 1. — [9] WEIL, A.: Foundations of Algebraic Geometry. New York 19[illegible]

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 15. Oktober 1952.)

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 41—45 (1953)

Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand.

Von
K. P. GROTEMEYER.

In den Arbeiten von A. D. ALEKSANDROV und seinem Schüler A. V. POGORELOV über konvexe Flächen wird häufig der Satz benutzt, daß zwei isometrische „Mützen" (Übersetzung von W. BURAU) mit kongruenten Randkurven zueinander kongruent sind. Unter den „Mützen" werden dabei positiv gekrümmte Flächenstücke verstanden, die von einer Kurve berandet werden, und die eine eindeutige Projektion besitzen. Dieser Satz soll mit Hilfe der klassischen Flächentheorie in sehr einfacher Weise, allerdings unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, bewiesen werden. Weiter wird die endliche Verbiegung einer Mütze mit ebenem Rand untersucht. Es werden die Bezeichnungen einer früheren Arbeit benutzt[1]).

1. Unter einer *Mütze* wollen wir ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit positiver GAUSSscher Krümmung K verstehen, welches in der Richtung des Vektors $\mathfrak{e}$ eine eindeutige Projektion besitzt und von einer geschlossenen, zweimal stetig differenzierbaren Kurve berandet wird.

Ist ξ der Flächennormalenvektor einer Mütze, so ist auf der gesamten Fläche:

$$(1) \qquad (\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0 \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{e}\,\xi) \leq 0\ ^{2}).$$

Es sei nun $\mathfrak{M}$ eine Mütze und $\mathfrak{M}^*$ eine zu $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist und eine zweimal stetig differenzierbare Randkurve besitzt. ($\mathfrak{M}^*$ ist nicht notwendig eine Mütze.) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß die Tensoren B_{ik} und B^*_{ik} der zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ beide positiv definit sind. Für den Nachweis der Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ muß das Verschwinden von $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik}$ nachgewiesen werden. Nach Satz 1 der unter [1]) zitierten Arbeit gilt bei positivem K: $\|A_{ik}\| \leq 0$, und aus $\|A_{ik}\| = 0$ folgt $A_{ik} = 0$, d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen.

Da die Voraussetzung $K > 0$ bei den Mützen erfüllt ist, genügt es hier die Determinante $\|A_{ik}\|$ zu untersuchen. Wir benutzen weiter den in der genannten Arbeit hergeleiteten Integralsatz mit vektoriellen Integranden:

$$[\text{III}, 4] \qquad \iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,do = -\oint \underline{A}^{ik} n_i \mathfrak{x}_k\,ds.$$

[1]) Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). Die dortigen Gleichungen werden hier durch eckige Klammern zitiert.

[2]) Das sphärische Bild einer Mütze liegt daher ganz auf einer Halbkugel.

Macht man für den Vektor $\mathfrak{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i$ den Ansatz:

$$\mathfrak{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i = \alpha \dot{\mathfrak{x}} + \beta \eta,$$

so erhält man durch innere Multiplikation nach [I, 17]:

$$-\mathfrak{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i = (a - a^*) \dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*) \eta.$$

Setzt man dieses in den vorstehenden Integralsatz ein, den wir auf die Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ anwenden, so beziehen sich die mit einem Stern versehenen Größen auf $\mathfrak{M}^*$. Multiplizieren wir nun noch den Integralsatz mit dem Vektor $\mathfrak{e}$, so gilt:

$$(2) \qquad \iint^{(\mathfrak{M})} \frac{\|A_{ik}\|}{g} (\mathfrak{e}\, \xi)\, do = \oint^{R(\mathfrak{M})} \{(a - a^*)(\mathfrak{e}\, \dot{\mathfrak{x}}) + (b - b^*)(\mathfrak{e}\, \eta)\}\, ds.$$

Hier bedeutet $R(\mathfrak{M})$: Rand von $\mathfrak{M}$.

Nach oben Bemerktem ist $\|A_{ik}\| \leqq 0$, und wegen (1) ändert daher der Integrand des Oberflächenintegrals in (2) auf der Mütze $\mathfrak{M}$ nirgends das Vorzeichen. Aus dem Verschwinden des Randintegrals in (2) wird also $\|A_{ik}\| = 0$ folgen und damit die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$. Wir wählen daher solche Voraussetzungen über den Rand von $\mathfrak{M}^*$, daß das betreffende Randintegral verschwinden muß:

Satz 1. *Jede zur Mütze $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche $\mathfrak{M}^*$ ist kongruent oder symmetrisch zu $\mathfrak{M}$, wenn die Randkurven der beiden Flächen zueinander kongruent oder symmetrisch sind. (Das heißt in entsprechenden Punkten der Randkurven von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ stimmen Krümmung und Windung überein.)*

Beweis. Nach dem Gesagten genügt es, das Verschwinden des Randintegrals von (2) nachzuweisen. Für das isometrische Bild $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$ gilt längs der Randkurve:

$$(3) \qquad k(s) = k^*(s); \qquad \varkappa(s) = \varkappa^*(s).$$

Hier sind k und $\varkappa$ bzw. k^* und $\varkappa^*$ Krümmung und Windung der Randkurve von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$. Nun besteht nach W. BLASCHKE[3]) zwischen $k, \varkappa$ und den „Streifengrößen" a, b, c der Zusammenhang:

$$(4) \qquad b = \sqrt{k^2 - c^2} \quad \text{und} \quad -\varkappa = a + \frac{\dot{c}\, b - \dot{b}\, c}{k^2}.$$

Da entsprechende Gleichungen für die Größen mit einem Stern gelten, so ist im vorliegenden Fall wegen der isometrischen Abbildung und wegen (3):

$$c(s) = c^*(s), \qquad \text{(geodätische Krümmung)}$$

also

$$(5) \qquad b^* = \sqrt{k^{*2} - c^2} = \sqrt{k^2 - c^2} = b$$

und

$$(6) \qquad -\varkappa^* = a^* + \frac{\dot{c}\, b - \dot{b}\, c}{k^2}; \qquad \varkappa^* - \varkappa = a - a^* = 0.$$

Es verschwindet somit das Randintegral von (2), und der Satz ist bewiesen.

[3]) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl., S. 71.

Aus den Gln. (3), (4), (5) und (6) liest man ab, daß aus der Kongruenz zweier „Trägerkurven" von isometrischen Streifen ($c = c^*$) die Kongruenz der Streifen selbst folgt. Man kann daher die Voraussetzungen über die Streifengrößen $a(s)$ und $b(s)$ in den Sätzen 6, 7, 8 der unter [1]) zitierten Arbeit in Voraussetzungen über $k(s)$ und $\varkappa(s)$ der Randkurven verwandeln.

Betrachten wir nun Mützen mit ebener Randkurve, so gilt:

Satz 2. *Jede zur Mütze $\mathfrak{M}$ mit ebenem Rand isometrische Fläche $\mathfrak{M}^*$ ist kongruent oder symmetrisch zu $\mathfrak{M}$, wenn nur die Krümmungen in einander entsprechenden Punkten der Randkurven übereinstimmen: $k(s) = k^*(s)$* [4]).

Beweis. Die Projektion einer Mütze mit ebenem Rand auf die Randebene ist eindeutig. Es sei also $\mathfrak{e}$ der Stellungsvektor der Randebene, dann ist auf der gesamten Mütze wieder eine der Ungleichungen von (1) gültig. Längs der Randkurve gilt $(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 0$. Der Integralsatz (2) nimmt damit die Form an:

$$\iint^{(\mathfrak{M})} \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do = \oint^{R(\mathfrak{M})} (b - b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\,ds. \tag{7}$$

Weil am Rand $k = k^*$ sein soll, so ist nach (4) wieder $b - b^* = 0$, und das Randintegral verschwindet. Damit ist der Satz 2 ebenfalls bewiesen.

2. Sprechen wir nun noch die Sätze 1 und 2 als Sätze über endliche Verbiegungen von Mützen aus. Der Satz 1 besagt jetzt:

Satz 1'. *Eine Mütze ist gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Randkurve festlassen.*

Satz 2'. *Eine Mütze mit ebenem Rand ist gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Krümmung der Randkurve nicht ändern.*

3. Diesen beiden Sätzen über die endlichen Verbiegungen von Mützen entsprechen zwei Sätze über die infinitesimale Verbiegung von Mützen, die so lauten:

Eine Mütze ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Krümmung und Windung der Randkurve stationär lassen;

---

[4]) Die Voraussetzung über die Krümmungen der Randkurven von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ können wir noch etwas abschwächen, indem wir längs der Randkurve nur $k \geq k^*$ verlangen. Man sieht leicht ein, daß unter den angegebenen Voraussetzungen in dieser Ungleichung nur das Gleichheitszeichen gelten kann: Da die Randkurve von $\mathfrak{M}$ eben ist, so gilt nach W. Fenchel [Math. Ann. **101**, S. 238ff. (1929)]

$$\oint k\,ds = 2\pi.$$

Da die entsprechende Kurve von $\mathfrak{M}^*$ nicht notwendig eben zu sein braucht, so ist

$$\oint k^*\,ds \geq 2\pi.$$

Es ist daher

$$\oint (k - k^*)\,ds \leq 0.$$

Wegen $k - k^* \geq 0$ folgt daraus aber die Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

[5]) Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. Berl. Akad. 1930, S. 127ff.

und:

Eine Mütze mit ebenem Rand ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Krümmung der Randkurve stationär lassen.

Der Beweis dieser Sätze läßt sich sehr einfach mit Hilfe der Integralformel von E. REMBS[5]) führen, wenn man die Ableitung des Drehrisses $\mathfrak{y}$ längs der Randkurve als lineares Kompositum von $\dot{\mathfrak{x}}$ und η darstellt. Bezeichnet man etwa mit δa und δb die „Variation" von geodätischer Torsion und Normalkrümmung längs der Randkurve bei der infinitesimalen Verbiegung der Mütze, so ist nämlich:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta \quad (8)$$

Trägt man diese Darstellung in den REMBSschen Integralsatz ein, und beachtet man, daß wegen $\delta c = 0$ aus $\delta k = 0$ und $\delta \varkappa = 0$ auch folgt $\delta a = 0$ und $\delta b = 0$, so ergibt sich sofort der erste der beiden oben genannten Sätze. Für den Beweis des zweiten Satzes müssen wir nur noch beachten, daß aus $\delta k = 0$ schon $\delta b = 0$ folgt.

4. In allen Sätzen über die Kongruenz oder Symmetrie von Flächen in der vorliegenden und in der unter [1]) genannten Arbeit wurde vorausgesetzt, daß die betrachteten Flächen positive GAUSSsche Krümmung haben. Diese Voraussetzung wurde insofern gebraucht, als man daraus die, bei den Beweisen unbedingt erforderlichen Eigenschaften des Tensors A_{ik} gewinnt, die so lauten:

$$\|A_{ik}\| \leq 0, \quad \text{und aus} \quad \|A_{ik}\| = 0 \quad \text{folgt} \quad A_{ik} = 0.$$

Wir behaupten jetzt, daß A_{ik} auch im Falle $H = H^*$ diese Eigenschaften aufweist. (H und H^* sind die mittleren Krümmungen der isometrischen Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$.)

Es ist

$$A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik}; \qquad A^k_k = 2H - 2H^* = 0$$

und

$$2\frac{\|A_{ik}\|}{g} = (A^l_l)^2 - A_{ik}A^{ik}$$

daher

$$2\frac{\|A_{ik}\|}{g} = -A_{ik}A^{ik}. \quad (9)$$

Weil der Tensor A_{ik} symmetrisch ist, so hat die charakteristische Gleichung

$$\|A_{ik} - \lambda g_{ik}\| = 0$$

---

[6]) *Anmerkung bei der Korrektur:* Diese Beziehung wird in einer demnächst im Archiv d. Math. erscheinenden Arbeit: „Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen" hergeleitet und dazu benutzt, Größen, die in „Starrheitsintegralsätzen" auftreten, geometrisch zu interpretieren.

Die zum Satz 1 und 2 der vorliegenden und zu den Sätzen 6, 7, 8 der unter[1]) zitierten Arbeit gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen lassen sich noch etwas abschwächen. Dazu vergleiche man A. WINTER: Amer. J. of Math. 74, 198—214 (1952).

reelle Wurzeln. Aus der Ungleichung für die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung folgt daher $\|A_{ik}\| \leq 0$. Ist jetzt etwa $\|A_{ik}\| = 0$, so ist die Zerlegung gültig:

$$A_{ik} = a_i a_k,$$

und aus (9) folgt $(a_l a^l)^2 = 0$ d.h. $a_l = 0$, oder $A_{ik} = 0$. Damit haben wir die genannten Eigenschaften nachgewiesen. Wir können daher in den Sätzen 5, 6, 7 und 8 der unter [1]) zitierten Arbeit und in den Sätzen 1 und 2 der vorliegenden Arbeit die Voraussetzung $K > 0$ durch die Voraussetzung $H - H^* = 0$ ersetzen. Unter der Voraussetzung $H - H^* = 0$ erhält man so einige Kongruenzsätze für beliebig gekrümmte Flächenstücke.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. Oktober 1952.)

ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 46—48 (1953)

FK-Räume und Matrixtransformationen.

Von
KARL ZELLER.

Ein *FK*-Raum ist ein lokalkonvexer *F*-Raum, der aus Folgen komplexer Zahlen $\mathfrak{x} = \{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$ besteht und in dem die Abbildungen $\mathfrak{x} \to x_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ linear und stetig sind.

Eine Matrixtransformation in unserem Sinn hat die Gestalt

$$\mathfrak{y} = A\,\mathfrak{x} \quad \equiv \quad y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Sie gilt als erklärt, wenn alle Summen y_n konvergieren.

In einer früheren Arbeit ([1951] — wir verwenden dieselben Bezeichnungen) hat Verf. die Zusammenhänge zwischen Matrixtransformationen und *FK*-Räumen untersucht. Verf. verdankt Herrn W. MEYER-KÖNIG und Herrn A. WILANSKY den Hinweis auf einen Fehler beim Beweise des dortigen Satzes 4.10c (hier Satz 2). Wir schließen diese Beweislücke, erhalten ein neues Ergebnis (Satz 1) und kommen auf einige kleine Versehen in dem bekannten Buch von BANACH [1932] zu sprechen, die von Herrn G. LORENTZ und Herrn A. WILANSKY bemerkt worden sind.

Satz 1. *$[\mathfrak{E}; p_j]$ und $[\mathfrak{F}; q_j]$ seien FK-Räume, A eine Matrix. Jedem $\mathfrak{y} \in \mathfrak{F}$ entspreche vermittels $\mathfrak{y} = A\,\mathfrak{x}$ genau ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{F}A$ (die Menge der von A in $\mathfrak{F}$ abgebildeten $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$) ein FK-Raum mit den Quasinormen $q_j(A\,\mathfrak{x})$. Insbesondere sind die Abbildungen $\mathfrak{y} \to x_k$ im Raum $[\mathfrak{F}]$ linear und stetig.*

Beweis. Nach Verf. [1951, 4.10 und 4.7] ist $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{F}\,A = \mathfrak{G}$ mit gewissen Quasinormen r_j ein *FK*-Raum. Die Abbildung $\mathfrak{x} \to A\,\mathfrak{x}$ von $[\mathfrak{G}]$ auf $[\mathfrak{F}]$ ist linear und stetig, also hat auch die Umkehrabbildung $A\,\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ von $[\mathfrak{F}]$ auf $[\mathfrak{G}]$ diese beiden Eigenschaften (BANACH [1932, S. 41, Th. 5]). Daher sind $[\mathfrak{G}; r_j]$ und $[\mathfrak{F}; q_j]$ isomorphe *F*-Räume, was die Behauptung ergibt. Vgl. BANACH [1932, S. 47, Th. 10].

Bemerkung. Mit Hilfe einer HAMEL-Basis können wir im *FK*-Raum $[\mathfrak{F}]$ ein lineares unstetiges Funktional $u(\mathfrak{y})$ erklären. Der Raum $\mathfrak{F}'$ der Folgen $\{y'_0 = u(\mathfrak{y}), y'_1 = y_0, \ldots\}$ $(\mathfrak{y} \in \mathfrak{F})$ läßt sich als ein zu $\mathfrak{F}$ isomorpher *F*-Raum auffassen, ist jedoch kein *FK*-Raum, da die Abbildung $\mathfrak{y}' \to y'_0$ wohl linear, aber nicht stetig ist. Mit $\mathfrak{F}'$ an Stelle des *FK*-Raumes $\mathfrak{F}$ ist insbesondere die Behauptung über $\mathfrak{y} \to x_k$ in Satz 1 falsch: Man setze $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_K$ (Raum aller Zahlenfolgen), $A \doteq$ Einheitsmatrix, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$. Räume wie $\mathfrak{F}'$ hat BANACH [1932, S. 47, Th. 10] nicht ausdrücklich ausgeschlossen. Ferner ist dort die Behauptung über die Beschränktheit der C_k (S. 50 oben) wohl ein Versehen. Wäre sie

allgemein richtig, so müßten sogar fast alle c_k verschwinden. Verlangt man von A nur Umkehrbarkeit bezüglich eines gewissen Urraumes, so wird ein „Gegenbeispiel" durch die Matrix mit den Elementen $a_{n0}=1$, $a_{n,n+1}=\frac{1}{n+1}$, $a_{nk}=0$ sonst, geliefert.

Satz 2. *Die Matrix A sei zeilenfinit, aus $A\,\mathfrak{x}=\mathfrak{o}$ folge $\mathfrak{x}=\mathfrak{o}$ (Nullelement). $[\mathfrak{F}; q_j]$ sei ein FK-Raum. Dann ist $\mathfrak{F}A$ (die Menge der von A in $\mathfrak{F}$ abgebildeten $\mathfrak{x}$) ein FK-Raum mit den Quasinormen $q_j(A\,\mathfrak{x})$.*

Beweis. Nach Toeplitz [1909] ist ein $\mathfrak{y}$ genau dann in der Form $\mathfrak{y}=A\,\mathfrak{x}$ (A zeilenfinit) darstellbar, wenn jede Beziehung der Form $\sum_{n=0}^{m}\alpha_n a_{nk}=0$ ($k=0,1,\ldots$) die Gleichung $\sum_{n=0}^{m}\alpha_n y_n=0$ nach sich zieht. Das besagt, daß die $\mathfrak{y}$ einen linearen abgeschlossenen Unterraum $\mathfrak{T}$ im FK-Raum $\mathfrak{S}_K$ aller Zahlenfolgen bilden: $\mathfrak{T}$ ist dadurch charakterisiert, daß die eben genannten linearen stetigen Funktionale in $\mathfrak{T}$ verschwinden. $\mathfrak{T}\cap\mathfrak{F}$ ist ein FK-Raum mit denselben Quasinormen wie $\mathfrak{F}$. Satz 1 vollendet den Beweis.

Bemerkung. Satz 2 und das Toeplitzsche Ergebnis gelten nicht für beliebige Matrizen: Betrachte die Matrix A mit $a_{nk}=1$ für $n=0$ und $n=k$, $a_{nk}=0$ sonst, und setze $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_K$. Bei Banach [1932, S. 51, Th. 12] ist demnach der Toeplitzsche Satz ungenau zitiert. Beim Beweise des darauffolgenden Th. 13 (= Satz 3) hat sich ein Druckfehler eingeschlichen, weswegen wir den Beweis wiederholen.

Satz 3. *Ist die Matrix A so beschaffen, daß es zu jedem $\mathfrak{y}$ genau ein $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}=A\,\mathfrak{x}$ gibt, so ist A zeilenfinit.*

Beweis. Nach Satz 1 (mit $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_K$) sind die Abbildungen $\mathfrak{y}\to x_k$ lineare stetige Funktionale in $[\mathfrak{S}_K]$, also von der Form $\sum_{n=0}^{m}b_{kn}y_n=x_k$. Die Umkehrabbildung zu A wird also durch eine zeilenfinite Matrix B dargestellt. Der Bildraum von B enthält alle abbrechenden Folgen, daher tritt nach Toeplitz jedes $\mathfrak{x}$ als Bildelement von B auf. Somit ist $\mathfrak{y}=A\,\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ erklärt und A zeilenfinit.

Wir skizzieren noch einen zweiten Beweisweg. $\mathfrak{S}_KA$ ist nach Satz 1 ein FK-Raum mit den Quasinormen $|y_0|, |y_1|, \ldots$ $(\mathfrak{y}=A\,\mathfrak{x})$.

$$q(\mathfrak{x})=\overline{\underset{l=0,1,\ldots}{\operatorname{fin}}}\left|\sum_{k=0}^{l}a_{0k}x_k\right|$$

ist eine stetige Quasinorm in $\mathfrak{S}_KA$, also gilt eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{x})\leq\varrho\cdot(|y_0|+\cdots+|y_m|).$$

Hat a_{0k} mehr als $m+1$ Nichtnullen, so erhält man auf Grund elementarer Sätze über $m+1$ Gleichungen mit $m+2$ Unbekannten ein $\mathfrak{x}\in\mathfrak{S}_KA$ mit

$y_0 = \cdots = y_m = 0$ und $q(\xi) \neq 0$, also einen Widerspruch. Ebenso werden die andern Zeilen von A behandelt.

Eine Bemerkung zum Beweis von Th. 7 bei BANACH, S. 41, steht bei Verf. [1953, § 6].

Literatur.

BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. 252 S. Warschau 1932. — TOEPLITZ, O.: Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rend. Circ. Mat. Palermo **28**, 88—96 (1909). — ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). — FK-Räume in der Funktionentheorie. Erscheint in Math. Z. **58** (1953).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 8. Dezember 1952.)

NICKEL, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 49—62 (1953)

Lösung von zwei verwandten Integralgleichungssystemen.

Von
KARL NICKEL.

1. Einleitung.

Das Integralgleichungssystem (IGlS)

$$\frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\, f_\nu(y_\nu)\operatorname{ctg} k(x_\mu - y_\nu)\, dy_\nu = g_\mu(x_\mu)\ ^{1}) \tag{1}$$

ist bisher nur für $n=1$ gelöst worden. Die Lösung haben J. DÖRR[2]) und der Verfasser[3]) unabhängig voneinander angegeben.

Das verwandte IGlS

$$\frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{f_\nu(y_\nu)}{\sin k(x_\mu - y_\nu)}\, dy_\nu = g_\mu(x_\mu) \tag{2}$$

scheint bisher auch in Sonderfällen noch nicht gelöst zu sein. Seine Lösung für $n=1$ läßt sich in einfacher Weise aus der von (1) gewinnen.

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden IGlS (1) und (2) auf die Fälle $n=1$ zurückgeführt und dadurch gelöst. Das Beweisverfahren arbeitet mit vollständiger Induktion und ist schon bei der Lösung des IGlS

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu - y_\nu}\, dy_\nu = g_\mu(x_\mu) \tag{3}$$

beschrieben worden[4]). Als einzige Neuheit gegenüber der Lösung von (3) ergibt sich im vorliegenden Falle folgendes: Bei der Reduktion des IGlS (1) von n auf $n-1$ Gleichungen kommt man auf ein IGlS der Gestalt (2), und umgekehrt. Es ist also zweckmäßig, (1) und (2) zusammen zu lösen.

---

[1]) Für $\nu=\mu$ ist das dann für $y_\nu = x_\mu$ singulär werdende Integral als CAUCHYscher Hauptwert aufzufassen, woran der Akzent beim Integralzeichen erinnern soll. Wegen der Permanenz des CAUCHYschen Hauptwertes darf dieser Akzent hier an sämtlichen Integralzeichen angebracht werden.

[2]) DÖRR, J.: Strenge Lösung der Integralgleichung für die Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter. Ing.-Arch. **19**, 66—68 (1951).

[3]) NICKEL, K.: Integralgleichungen erster Art in der Strömungslehre und ihre Auflösung. Z. angew. Math. Mech. **31** 285—286 (1951). Siehe auch NICKEL, K.: Zusatz zu J. DÖRR: Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter. Ing.-Arch. **20**, 6—7 (1952).

[4]) NICKEL, K.: Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie. Math. Z. **54**, 81—96 (1951).

Zur Vereinfachung werden nur reelle oder rein imaginäre Werte des Parameters k in den beiden Systemen (1) und (2) zugelassen. Ersetzt man im zweiten Fall k durch ik (k dann reell), so gehen die trigonometrischen Funktionen in den Kernen der beiden IGlS und ihrer Lösungen in die entsprechenden Hyperbelfunktionen über und man hat wieder rein reelle Gleichungen. Daß die angegebenen Lösungen tatsächlich für beliebige komplexe Werte des Parameters k und übrigens auch für nichtgeradlinige Integrationswege in der komplexen Zahlenebene gültig bleiben, soll in einer weiteren Arbeit nachgewiesen werden[4a]).

Geht man in (1) oder (2) mit k gegen Null, so ergibt sich das IGlS (3), das sich somit als Sonderfall von (1) und (2) erweist.

Der Sonderfall $k=\frac{1}{2}$, $n=1$, $a_1=0$, $b_1=2\pi$ führt bei (1) auf die zuerst von HILBERT[5]) gelöste Integralgleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}' f(y)\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,dy=g(x). \tag{1a}$$

Es besteht nun die bemerkenswerte Tatsache, daß die Lösung der beiden allgemeinen IGlS (1) und (2) auf die Lösung dieses einen Sonderfalls (1a) zurückgeführt werden kann. Durch elementare Umformungen läßt sich nämlich der Fall $n=1$ des Systems (3)

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b{}' \frac{f(y)}{x-y}\,dy=g(x) \tag{3a}$$

in (1a) überführen [vgl. etwa [4]), S. 84]. Aus dieser Integralgleichung findet man durch weitere Umformungen [vgl. J. DÖRR[2])] die Gl. (1) für $n=1$

$$\frac{k}{\pi}\int_a^b{}' f(y)\operatorname{ctg}k(x-y)\,dy=g(x) \tag{1b}$$

und gerade auf diese werden im folgenden die Systeme (1) und (2) reduziert. Damit lassen sich sämtliche Aussagen über die Integralgleichung (1a) und ihre Lösung, insbesondere über die notwendigen Voraussetzungen[6]), sogleich auf (1) und (2) übertragen.

2. Ergebnisse.

Alle vorkommenden Integrale sollen im LEBESGUEschen Sinne aufgefaßt werden. Funktionen, die außer in Punkten einer Menge vom LEBESGUEschen Maße Null übereinstimmen, sollen nicht unterschieden werden.

[4a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Wurde für (1) im Falle $n=1$ inzwischen von J. DÖRR gezeigt. DÖRR, J.: Über zwei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen. Ing. Arch. **20**, 88—90 (1952).

[5]) HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 75. Leipzig: G. B. Teubner 1912.

[6]) Man vgl. etwa RIESZ, M.: Sur les fonctions conjuguées. Math. Z. **27**, 218—244 (1928).

Die n abgeschlossenen Intervalle $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ seien punktfremd und von links nach rechts numeriert, d.h. es sei $a_\nu < b_\mu$ für $\nu \leq \mu$, aber $a_\nu > b_\mu$ für $\nu > \mu$. Die Veränderlichen x_ν und y_ν sollen im folgenden stets im Intervall $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ liegen. Die reelle Zahl $p > 1$ sei beliebig gewählt. Die n reellen Funktionen $g_\nu(x_\nu)$ $(a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu;\ \nu = 1, \ldots, n)$ seien meßbar und die Integrale

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} |g_\nu(x_\nu)|^p \sqrt{(b_\nu - x_\nu)(x_\nu - a_\nu)}^{p-1} \, d x_\nu$$

mögen existieren. Weiter sei der Parameter k reell oder rein imaginär, im reellen Falle mit der Einschränkung

$$|k| \leq \frac{\pi}{b_n - a_1}. \tag{4}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz: *a) Die allgemeinste Lösung des IGlS*

$$\frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(y_\nu) \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_\nu) \, d y_\nu = g_\mu(x_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

lautet

$$\left\{ \begin{aligned} f_\nu(y_\nu) = {} & \frac{k}{\pi} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \sin k(b_\varkappa - y_\nu) \sin k(a_\varkappa - y_\nu)}} \times \\ & \times \left[P_n(y_\nu) + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \int_{a_\mu}^{b_\mu} g_\mu(x_\mu) \begin{cases} \dfrac{1}{\sin k(x_\mu - y_\nu)} & n = 2m+1 \\ \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_\nu) & n = 2m \end{cases} \right] \times \\ & \times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \sin k(b_\lambda - x_\mu) \sin k(a_\lambda - x_\mu)} \, d x_\mu \end{aligned} \right| \quad [7] \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

mit

$$\left\{ \begin{aligned} P_n(y) = {} & A_n \cos k\left(y - \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{a_\varrho + b_\varrho}{2}\right) \sin^{n-1} k y + \\ & + \begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(A_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k y + A_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k y\right) & n = 2m+1 \\ A_{n-1} + \cos k y \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(A_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k y + A_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k y\right) & n = 2m \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad [8] \tag{6}$$

und beliebigen (reellen) Koeffizienten A_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$.

[7]) $n = 2m+1$ soll bedeuten: für alle ungeraden Werte von n. $n = 2m$ entsprechend: für alle geraden.

[8]) Leere Summen und nichtdefinierte Größen (z.B. A_0 für $n = 1$) sollen weggelassen werden.

b) Die allgemeinste Lösung des IGlS

$$(2)\qquad \frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{f_\nu(y_\nu)}{\sin k(x_\mu-y_\nu)}\,dy_\nu=g_\mu(x_\mu)\qquad(\mu=1,\ldots,n)$$

lautet

$$(7)\quad \begin{cases} f_\nu(y_\nu)=\dfrac{k}{\pi}\dfrac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod\limits_{\varkappa=1}^{n}\sin k(b_\varkappa-y_\nu)\sin k(a_\varkappa-y_\nu)}}\times \\ \quad\times\left[Q_n(y_\nu)+\sum\limits_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\int\limits_{a_\mu}^{b_\mu}g_\mu(x_\mu)\begin{cases}\operatorname{ctg}k(x_\mu-y_\nu) & n=2m+1\\ \dfrac{1}{\sin k(x_\mu-y_\nu)} & n=2m\end{cases}\times\right. \\ \quad\left.\times\sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\sin k(b_\lambda-x_\mu)\sin k(a_\lambda-x_\mu)}\,dx_\mu\right] \qquad(\nu=1,\ldots,n)\end{cases}$$

mit

$$(8)\quad Q_n(y)=\begin{cases} B_n+\cos k\,y\sum\limits_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(B_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}k\,y+B_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}k\,y\right) & n=2m+1\\ \sum\limits_{\varkappa=1}^{\frac{n}{2}}\left(B_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}k\,y+B_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}k\,y\right) & n=2m\end{cases}$$

und beliebigen (reellen) Koeffizienten B_ν $(\nu=1,\ldots,n)$.

Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Funktionen $f_\nu(y_\nu)$ *aus* (5) *und* (7) *meßbar und die Integrale*

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f_\nu(y_\nu)|^p\sqrt{(b_\nu-y_\nu)(y_\nu-a_\nu)}^{p-1}\,dy_\nu$$

existieren.

Sind sogar die Funktionen

$$|g_\mu(x_\mu)|^p\left\{\frac{\sqrt{b_\mu-x_\mu}^{p-1}}{\sqrt{x_\mu-a_\mu}^{p+1}}\right\}^{\pm1}$$

integrierbar, so gilt der folgende

Zusatz:

$$a)\ (5a)\quad \begin{cases} f_\nu(y_\nu)=\dfrac{k}{\pi}\left\{\sqrt{-\prod\limits_{\varkappa=1}^{n}\dfrac{\sin k(a_\varkappa-y_\nu)}{\sin k(b_\varkappa-y_\nu)}}\right\}^{\pm1}\sum\limits_{\mu=1}^{n}\int\limits_{a_\mu}^{b_\mu}g_\mu(x_\mu)\times \\ \times\left[\operatorname{ctg}k(x_\mu-y_\nu)\mp\operatorname{tg}k\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\dfrac{b_\varrho-a_\varrho}{2}\right]\left\{\sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\dfrac{\sin k(b_\lambda-x_\mu)}{\sin k(a_\lambda-x_\mu)}}\right\}^{\pm1}dx_\mu \\ (\nu=1,\ldots,n)\end{cases}$$

ist eine spezielle Lösung des IGlS (1).

$$b)\ (7a)\quad \left\{\begin{aligned} f_\nu(y_\nu) = \frac{k}{\pi}\left\{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{\sin k(a_\varkappa - y_\nu)}{\sin k(b_\varkappa - y_\nu)}}\right\}^{\pm 1} \sum_{\mu=1}^{n}{}' \int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{g_\mu(x_\mu)}{\sin k(x_\mu - y_\nu)} \times \\ \times \left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{\sin k(b_\lambda - x_\mu)}{\sin k(a_\lambda - x_\mu)}}\right\}^{\pm 1} d x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)\end{aligned}\right.$$

ist eine spezielle Lösung des IGlS (2).

Für $f_\nu(y_\nu)$ *aus* (5a) *und* (7a) *gilt sogar*:

$$|f_\nu(y_\nu)|^p \left\{\frac{\sqrt{b_\nu - y_\nu}^{p-1}}{\sqrt{y_\nu - a_\nu}^{p+1}}\right\}^{\pm 1}$$

ist integrierbar.

Bemerkung. *Die Funktionen* P_n *und* Q_n *aus Gl.* (6) *bzw.* (8) *lassen sich auch in folgender Weise darstellen*:

$$(6a)\qquad P_n(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \cos k\left(y - a_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\varkappa}}^{n}\sin k(a_\lambda - y)\ ^{9})$$

$$(8a)\qquad Q_n(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} D_\varkappa \prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\varkappa}}^{n}\sin k(a_\lambda - y)\ ^{9})$$

mit beliebigen (reellen) Konstanten $C_\varkappa$ *und* $D_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n)$. *Dabei können in* (6a) *und* (8a) *die unteren Integrationsgrenzen* a_λ *auch durch die oberen* b_λ *ersetzt werden.*

Die Darstellungen (6a) und (8a) sind für manche Zwecke besonders bequem, so z. B. für den oben erwähnten Grenzübergang $k \to 0$.

3. $n = 1$.

a) Das IGlS (1) reduziert sich für $n = 1$ auf

$$(1b)\qquad \frac{k}{\pi}\int_a^b{}' f(y)\operatorname{ctg} k(x-y)\,dy = g(x).$$

Man sucht (1b) auf (3a) zurückzuführen und so zu lösen [vgl. dazu J. Dörr[2])]. Dazu spaltet man $f(y)$ bzw. $g(x)$ auf:

$$f(y) = f_+(y) + f_-(y), \qquad g(x) = g_+(x) + g_-(x),$$

wo f_+ und g_+ zum Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ der Strecke $\langle a, b\rangle$ symmetrisch, f_- und g_- dagegen antimetrisch sind. Mit der Setzung $X = x - \frac{a+b}{2}$, $Y = y - \frac{a+b}{2}$ und der Identität

$$\operatorname{ctg} k(x-y) = \frac{\sin kX\cos kX + \sin kY\cos kY}{\sin^2 kX - \sin^2 kY}$$

[9]) Leere Produkte sollen 1 bedeuten.

ergibt sich dann aus (1b)

$$g_+(x) = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}{}' f_-(y) \frac{\sin kY \cos kY}{\sin^2 kX - \sin^2 kY}\, dY = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}{}' f_-(y) \frac{\cos kY}{\sin kX - \sin kY}\, dY,$$

$$g_-(x) = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}{}' f_+(y) \frac{\sin kX \cos kX}{\sin^2 kX - \sin^2 kY}\, dY = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}{}' f_+(y) \frac{\cos kX}{\sin kX - \sin kY}\, dY.$$

Man setzt nun $u = \sin kX$, $v = \sin kY$, $\alpha = \sin k\frac{b-a}{2}$ und wendet die Schreibweise an $g(x) = g(u)$, $f(y) = f(v)$. Dies liefert aus den obigen Gleichungen:

$$g_+(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha}{}' f_-(v) \frac{dv}{u-v}, \qquad g_-(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha}{}' \frac{f_+(v)}{u-v} \sqrt{\frac{1-u^2}{1-v^2}}\, dv.$$

Mit der bekannten [vgl. [4])] Auflösungsformel

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(b-y)(y-a)}} \left[\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b{}' \frac{g(x)}{x-y} \sqrt{(b-x)(x-a)}\, dx \right]$$

von (3a) lassen sich nun diese beiden Integralgleichungen für f_+ und f_- auflösen. Macht man dann die obigen Transformationsschritte wieder rückgängig, so ergibt sich schließlich die gesuchte allgemeinste Lösung von (1b):

(4b)
$$\begin{cases} f(y) = \dfrac{k}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin k(b-y) \sin k(y-a)}} \left[\cos k\left(y - \dfrac{a+b}{2}\right) \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \right. \\ \left. + \displaystyle\int_a^b{}' \frac{g(x)}{\sin k(x-y)} \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)}\, dx \right]. \end{cases}$$

Dabei ist die Umkehrbarkeit der durchgeführten Transformationen wegen der Monotonie der verwendeten Sinusfunktion in dem betrachteten Intervall durch die Bedingung (4) auch für reelle k sichergestellt.

b) Das IGlS (2) reduziert sich für $n = 1$ auf

(2a)
$$\frac{k}{\pi} \int_a^b{}' \frac{f(y)}{\sin k(x-y)}\, dy = g(x).$$

Man findet die zugehörige Lösung aus (4b) durch einige Umformungen. Da diese typisch für die Behandlung solcher Aufgaben sind, sollen sie hier etwas ausführlicher gebracht werden.

Setzt man die trigonometrische Identität

$$\frac{1}{\sin k(x-y)} = \operatorname{ctg} k(x-y)\,\frac{\sin k(y-a)}{\sin k(x-a)} + \frac{\cos k(y-a)}{\sin k(x-a)} \tag{9}$$

in (2a) ein, so ergibt sich

$$\frac{k}{\pi}\int_a^{b}{}' f(y)\sin k(y-a)\operatorname{ctg} k(x-y)\,dy = g(x)\sin k(x-a) - \frac{k}{\pi}\int_a^b f(y)\cos k(y-a)\,dy$$

oder

$$\frac{k}{\pi}\int_a^{b}{}' F(y)\operatorname{ctg} k(x-y)\,dy = G(x)$$

mit

$$F(y) = f(y)\sin k(y-a), \quad G(x) = g(x)\sin k(x-a) - \frac{k}{\pi}\int_a^b f(y)\cos k(y-a)\,dy.$$

Diese Integralgleichung für $F(y)$ hat nun nach (1b) und (4b) als allgemeinste Lösung

$$F(y) = \frac{k}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}\times$$

$$\times\left[\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b F(x)\,dx + \int_a^{b}{}' \frac{G(x)}{\sin k(x-y)}\sqrt{\sin k(b-x)\sin k(x-a)}\,dx\right]$$

oder mit (9) und (19)

$$f(y) = \frac{k}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}\left[\frac{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin k(y-a)}\int_a^b f(x)\sin k(x-a)\,dx + \right.$$

$$+\frac{\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin k(y-a)}\int_a^b f(x)\cos k(x-a)\,dx + \operatorname{ctg} k(y-a)\times$$

$$\times\int_a^b g(x)\sqrt{\sin k(b-x)\sin k(x-a)}\,dx +$$

$$\left.+\int_a^{b}{}' g(x)\operatorname{ctg} k(x-y)\sqrt{\sin k(b-x)\sin k(x-a)}\,dx\right].$$

Aus (2a) ergibt sich nun durch Integration mit (19)

$$\int_a^b g(x)\sqrt{\sin k(b-x)\sin k(x-a)}\,dx = -\cos k\frac{b-a}{2}\int_a^b f(y)\sin k(y-a)\,dy +$$

$$+\sin k\frac{b-a}{2}\int_a^b f(y)\cos k(y-a)\,dy.$$

Also lautet die Lösung von (2a)

$$(6b)\qquad \begin{cases} f(y) = \dfrac{k}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}} \left[\displaystyle\int_a^b f(x) \cos k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\int_a^b{}' g(x) \operatorname{ctg} k(x-y) \sqrt{\sin k(b-x)\sin k(x-a)}\, dx \right]. \end{cases}$$

4. Lösungsverfahren für $n > 1$.

Der Beweis der in 2. ausgesprochenen Behauptungen geht nun folgendermaßen vor sich: Mit den in 3. erhaltenen beiden Lösungsformeln (4b) und (6b) für $n = 1$ gewinnt man aus der m-ten Zeile von (1) bzw. (2) die Funktion $f_m(y_m)$ in Abhängigkeit von $g_m(x_m)$ und den übrigen $n-1$ gesuchten Funktionen $f_\nu(y_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n;\ \nu \neq m)$, und setzt sie in die restlichen $n-1$ Zeilen ein. Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m = n$ gewählt werden. Das damit aus (1) bzw. (2) entstehende lineare IGlS aus $n-1$ Gleichungen ist nun von der Art (2) bzw. (1). Man hat also die Anzahl der Gleichungen um eine reduziert, ohne dafür ein schwierigeres Gleichungssystem einzutauschen und kann so die behaupteten Formeln durch vollständige Induktion beweisen.

Zu den genannten Schritten benötigt man die Kenntnis von einigen Hilfsformeln, die sich entweder elementar berechnen oder ebenfalls mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung beweisen lassen. Die speziellen Lösungsformen (5a) und (7a) lassen sich auf die Lösungen (5) und (7) zurückführen, es ist also nicht notwendig, den beschriebenen Beweisgang dafür noch einmal zu wiederholen.

Der gesamte Beweis wurde mit allen seinen Schritten für das IGlS (3) in [4]) ausführlich gebracht und verläuft für die IGlS (1) und (2) Punkt für Punkt entsprechend. Daher soll hier von einer nochmaligen Durchführung des Beweises abgesehen und es sollen nur sämtliche notwendigen Hilfsformeln angegeben werden. Mit diesen läßt sich der oben skizzierte Beweisgang ohne jede Schwierigkeit verfolgen. Dabei ergibt sich eine angenehme Kontrollmöglichkeit aus der Tatsache, daß (1) und (2) für $k \to 0$ in (3) übergehen. Man kann daher an jeder Stelle des Rechnungsganges das Ergebnis durch den Grenzübergang $k \to 0$ mit dem entsprechenden in [4]) vergleichen. Auch die Existenz der vorkommenden Integrale und die Zulässigkeit der Vertauschungen der Integrationsreihenfolgen lassen sich sofort nach [4]) sicherstellen.

Es bleibt nur noch eine Bemerkung über die Bedingung (4) nachzuholen. Diese Bedingung schränkt nicht, wie man zuerst glauben könnte, die Lösbarkeit der IGlS (1) und (2) willkürlich ein, sondern ist eine direkte Folgerung aus der Tatsache, daß die Kerne von (1) und (2) für reelles k periodisch sind mit der (primitiven) Periode $x_\mu - y_\nu = \frac{\pi}{k}$. Wäre nämlich (4) nicht erfüllt, so könnte man jedenfalls durch die Transformation $x'_\mu = x_\mu + l\frac{\pi}{k}$ (l eine passend gewählte ganze Zahl) dafür sorgen, daß sämtliche transformierten

Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu\rangle$ auf eine Strecke der Länge π/k zu liegen kommen, oder, anders ausgedrückt, daß (4) jetzt befriedigt ist.

Falls die neuen Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu\rangle$ punktfremd[10]) bleiben, kann man dieselbe Transformation auch auf die y_ν anwenden und erhält damit die IGlS (1) und (2) in derselben Gestalt wieder, wobei die Bedingung (4) diesmal erfüllt ist. Bei diesem Falle ergeben sich also die IGlS (1) und (2) aus Systemen, bei denen die Bedingung (4) nicht verletzt ist, indem man von der durch die Periodizität der Kerne gegebenen Freiheit Gebrauch macht.

Haben jedoch die neuen Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu\rangle$ innere Punkte gemein, so gibt es also solch einen Punkt $x_\varrho \in \langle a_\varrho, b_\varrho\rangle$ derart, daß auch $x_\sigma = x_\varrho + l\frac{\pi}{k}$ (l nach oben gewählt) innerer Punkt des Intervalls $\langle a_\sigma, b_\sigma\rangle$ ist. Wegen der Periodizität der Kerne von (1) und (2) müßte dann gelten $g_\varrho(x_\varrho) = g_\sigma(x_\sigma)$, d. h., die Funktionen $g_\mu(x_\mu)$ müßten überall dort, wo die nach oben transformierten Intervalle sich überdecken, übereinstimmen, könnten also nicht mehr willkürlich gewählt werden.

Also ergibt sich: Für reelle Werte von k mit $k > \frac{\pi}{b_n - a_1}$ sind die IGlS (1) und (2) i. a. nicht mehr für beliebige Funktionen $g_\mu(x_\mu)$ lösbar.

5. Hilfsformeln.

Vorbemerkungen. Der Beweis der trigonometrischen Umrechnungsformeln (9) bis (14) macht keine Schwierigkeiten.

Die Integrale (15) bis (20) lassen sich elementar berechnen, etwa, indem man die trigonometrischen Funktionen der Integranden nach 3. in rationale Funktionen umwandelt, worauf die Integration elementar ausführbar wird.

Von den Formeln (21) bis (29) genügt es, allein (25) zu beweisen, etwa unter Mitwirkung des IGlS (1) oder (2), wie in [4]) S. 91/92 für die entsprechende Formel des IGlS (3) durchgeführt. Die restlichen Formeln lassen sich dann durch einfache Umformungen, entsprechend zu [4]) S. 92/93, auf (25) zurückführen.

Die $C_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n$) in den Formeln (12), (13), (14), (23), (24) sollen gewisse Konstante bedeuten, die sich von Formel zu Formel im allgemeinen ändern werden. Da ihre genaue Bestimmung im Rahmen dieser Arbeit nicht notwendig ist, wurde darauf verzichtet, etwa durch weitere Indizes ihre Veränderlichkeit anzumerken.

Es werde sign $0 = 0$ gesetzt, weiter sei

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu \begin{cases} > b_\mu & \text{für} \quad \nu > \mu \\ \in \langle a_\mu, b_\mu\rangle & \text{für} \quad \nu = \mu \\ < a_\mu & \text{für} \quad \nu < \mu. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sin(x-y)} = \operatorname{ctg}(x-y)\frac{\sin(y-a)}{\sin(x-a)} + \frac{\cos(y-a)}{\sin(x-a)} \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\sin x \cos x + \sin y \cos y}{\sin^2 x - \sin^2 y} \tag{10}$$

[10]) Bis eventuell auf die Endpunkte.

$$(11)\quad \left\{ \operatorname{ctg}(x-y)\left[\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}^{2\varkappa-2}x-\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}^{2\varkappa-2}y\right] = \pm(\sin x\cos x+\sin y\cos y)\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}^{2\lambda-2}x\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}^{2\varkappa-2\lambda-2}y \right\}^{8)}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots$$

$$(12)\quad \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{n}\sin(a_\lambda - x)} = \left\{ \begin{matrix} \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \dfrac{1}{\sin(a_\varkappa - x)} & n = 2m+1 \\ \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \operatorname{ctg}(a_\varkappa - x) & n = 2m \end{matrix} \right\}$$

$$(13)\quad \left\{ \prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\sigma}}^{n}\sin(a_\lambda - x) = \left\{ \begin{matrix} C_n + \cos x \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(C_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}x + C_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}x\right) & n = 2m+1 \\ \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n}{2}}\left(C_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}x + C_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}x\right) & n = 2m \end{matrix} \right\} \right.$$

$$\left. (\sigma = 1, \ldots, n)^{8),9)} \right\}$$

$$(14)\quad \left\{ \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\left(x - a_\sigma - \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\sigma}}^{n}\sin(a_\lambda - x) = \right.$$

$$= \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\left(x - \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{a_\varrho + b_\varrho}{2}\right)\sin^{n-1}x +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(C_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}x + C_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}x\right) & n = 2m+1 \\ C_{n-1} + \cos x \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(C_{2\varkappa-1}\sin^{2\varkappa-1}x + C_{2\varkappa}\cos^{2\varkappa-1}x\right) & n = 2m \end{matrix} \right\}$$

$$\left. (\sigma = 1, \ldots, n)^{8),9)} \right\}$$

$$(15)\quad \frac{k}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)}\frac{dx_\nu}{\sqrt{\sin k(b_\nu - x_\nu)\sin k(x_\nu - a_\nu)}} = \frac{\operatorname{sign}(\mu-\nu)}{\sqrt{\sin k(b_\nu - y_\mu)\sin k(a_\nu - y_\mu)}}$$

$$(16)\quad \left\{ \frac{k}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu)\frac{\cos k\left(x_\nu - \frac{a_\nu + b_\nu}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b_\nu - x_\nu)\sin k(x_\nu - a_\nu)}}dx_\nu = \right.$$

$$\left. = \frac{\operatorname{sign}(\mu-\nu)\cos k\left(y_\mu - \frac{a_\nu + b_\nu}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b_\nu - y_\mu)\sin k(a_\nu - y_\mu)}} \right\}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'' \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu)\operatorname{ctg} k(z_\varrho - x_\nu)\left\{\sqrt{\dfrac{\sin k(x_\nu - a_\nu)}{\sin k(b_\nu - x_\nu)}}\right\}^{\pm 1} d x_\nu = \\ \qquad = -\sin k\,\dfrac{b_\nu - a_\nu}{2} \mp \operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu)\times \\ \times\left[\operatorname{sign}|\varrho-\nu|\left\{\sqrt{\dfrac{\sin k(a_\nu - z_\varrho)}{\sin k(b_\nu - z_\varrho)}}\right\}^{\pm 1} - \operatorname{sign}|\mu-\nu|\left\{\sqrt{\dfrac{\sin k(a_\nu - y_\mu)}{\sin k(b_\nu - y_\mu)}}\right\}^{\pm 1}\right] \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'' \dfrac{\operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu)}{\sin k(z_\varrho - x_\nu)}\dfrac{d x_\nu}{\sqrt{\sin k(b_\nu - x_\nu)\sin k(x_\nu - a_\nu)}} = \\ \qquad = -\dfrac{\operatorname{sign}(\varrho-\nu)\operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu)}{\sqrt{\sin k(b_\nu - z_\varrho)\sin k(a_\nu - z_\varrho)}} + \\ \qquad + \dfrac{\operatorname{sign}(\mu-\nu)}{\sin k(z_\varrho - y_\mu)}\dfrac{1}{\sqrt{\sin k(b_\nu - y_\mu)\sin k(a_\nu - y_\mu)}} \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'' \dfrac{\sqrt{\sin k(b_\nu - x_\nu)\sin k(x_\nu - a_\nu)}}{\sin k(y_\mu - x_\nu)} d x_\nu = \\ \qquad = \sin k\left(y_\mu - \dfrac{a_\nu + b_\nu}{2}\right) - \operatorname{sign}(\mu-\nu)\sqrt{\sin k(b_\nu - y_\mu)\sin k(a_\nu - y_\mu)} \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'' \dfrac{\operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu)}{\sin k(z_\varrho - x_\nu)}\sqrt{\sin k(b_\nu - x_\nu)\sin k(a_\nu - x_\nu)}\, d x_\nu = \\ \qquad = -\cos k\left(z_\varrho - \dfrac{a_\nu + b_\nu}{2}\right) + \operatorname{sign}(\varrho-\nu)\operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu)\times \\ \qquad \times\sqrt{\sin k(b_\nu - z_\varrho)\sin k(a_\nu - z_\varrho)} \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu)\left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\dfrac{\sin k(a_\lambda - x_\nu)}{\sin k(b_\lambda - x_\nu)}}\right\}^{\pm 1} d x_\nu = \\ \qquad = \mp\cos k\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

für $a_\mu \leqq y_\mu < b_\mu$ oder $a_\mu < y_\mu \leqq b_\mu$ je nachdem, ob der Exponent $+1$ oder -1 ist.

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\operatorname{ctg} k(z - x_\nu)\left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\dfrac{\sin k(a_\lambda - x_\nu)}{\sin k(b_\lambda - x_\nu)}}\right\}^{\pm 1} d x_\nu = \\ \qquad = \pm\left[-\cos k\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} + \left\{\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n}\dfrac{\sin k(a_\lambda - z)}{\sin k(b_\lambda - z)}}\right\}^{\pm 1}\right] \end{cases}$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}''\left\{\begin{matrix}\operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) & n = 2m+1 \\ \dfrac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)} & n = 2m\end{matrix}\right\}\times \\ \times\sqrt{-\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n-1}\sin k(b_\lambda - x_\nu)\sin k(a_\lambda - x_\nu)}\, d x_\nu = R_1(y_\mu) \quad (\mu = 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

mit

$$R_1(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n-1} C_\varkappa \sin k\left(y - a_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \varkappa}}^{n-1} \sin k(a_\lambda - y)\ ^{9}) =$$

$$= C_{n-1} \sin k\left(y - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{a_\varrho + b_\varrho}{2}\right) \sin^{n-2} k\,y +$$

$$+ \begin{cases} C_{n-2} + \cos k\,y \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(C_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k\,y + C_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k\,y\right) & n = 2m+1 \\ \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(C_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k\,y + C_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k\,y\right) & n = 2m \end{cases}\ ^{9})$$

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \cos k\left(x_\nu - \frac{a_n + b_n}{2}\right) \begin{cases} \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)} & n = 2m+1 \\ \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) & n = 2m \end{cases} \times \\ \times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - x_\nu) \sin k(a_\lambda - x_\nu)}\, dx_\nu = R_2(y_\mu) \quad (\mu = 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

mit

$$R_2(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \cos k\left(y - a_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \varkappa}}^{n} \sin k(a_\lambda - y)\ ^{9}) =$$

$$= C_n \cos k\left(y - \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right) \sin^{n-1} k\,y +$$

$$+ \begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(C_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k\,y + C_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k\,y\right) & n = 2m+1 \\ C_{n-1} + \cos k\,y \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(C_{2\varkappa-1} \sin^{2\varkappa-1} k\,y + C_{2\varkappa} \cos^{2\varkappa-1} k\,y\right) & n = 2m \end{cases}\ ^{9})$$

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) \operatorname{ctg} k(z - x_\nu) \left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin k(a_\lambda - x_\nu)}{\sin k(b_\lambda - x_\nu)}}\right\}^{\pm 1} dx_\nu = \\ = -\sin k \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \mp \operatorname{ctg} k(z - y_\mu) \left\{\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin k(a_\lambda - z)}{\sin k(b_\lambda - z)}}\right\}^{\pm 1} \\ (\mu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\operatorname{ctg} k(y_n - x_\nu)\begin{cases}\operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) & n = 2m+1\\ \dfrac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)} & n = 2m\end{cases}\times\\
&\qquad\times\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\sin k(b_\lambda - x_\nu)\sin k(a_\lambda - x_\nu)}\,dx_\nu =\\
&\qquad = (-1)^{n-1}\begin{cases}\operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m+1\\ \dfrac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m\end{cases}\times\\
&\qquad\times\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n-1}\sin k(b_\lambda - y_n)\sin k(a_\lambda - y_n)} +\\
&\qquad + \begin{cases}[R_1(y_\mu) - R_1(y_n)]\operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m+1\\ R_1(y_\mu)\operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) - \dfrac{R_1(y_n)}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m\end{cases}
\end{aligned}
\right.
$$

$(\mu = 1, \ldots, n-1)$

mit $R_1(y)$ aus (23).

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{1}{\sin k(y_n - x_\nu)}\begin{cases}\dfrac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)} & n = 2m+1\\ \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) & n = 2m\end{cases}\times\\
&\qquad\times\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\sin k(b_\lambda - x_\nu)\sin k(a_\lambda - x_\nu)}\,dx_\nu =\\
&\qquad = (-1)^{n-1}\begin{cases}\dfrac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m+1\\ \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m\end{cases}\times\\
&\qquad\times\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n-1}\sin k(b_\lambda - y_n)\sin k(a_\lambda - y_n)} +\\
&\qquad + \begin{cases}[R_1(y_\mu) - R_1(y_n)]\dfrac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m+1\\ \dfrac{R_1(y_\mu)}{\sin k(y_n - y_\mu)} - R_1(y_n)\operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m\end{cases}
\end{aligned}
\right.
$$

$(\mu = 1, \ldots, n)$

mit $R_1(y)$ aus (23).

$$
(28)\quad \left\{
\frac{k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{1}{\sin k(y_\mu - x_\nu)}\,\frac{\prod\limits_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq m}}^{n}\sin k(a_\varkappa - x_\nu)}{\sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\sin k(b_\lambda - x_\nu)\sin k(a_\lambda - x_\nu)}}\,dx_\nu = 0
\right.
$$

$(\mu, m = 1, \ldots, n)$ [9])

$$(29)\quad \left\{ \frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_\nu) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\cos k\left(x_\nu - c_m - \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}\right) \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq m}}^{n} \sin k(a_\varkappa - x_\nu)}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \sin k(b_\lambda - x_\nu) \sin k(a_\lambda - x_\nu)}} \, dx_\nu = 0 \right.$$

$$(\mu, m = 1, \ldots, n)^{9}).$$

Nickel, Estafeta 11, Córdoba (Argentinien).

(Eingegangen am 13 Juni 1952.)

UNKELBACH, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 63—70 (1953)

Über die Approximation schlichter konformer Abbildungen durch kongruente Iterationen spezieller sterniger oder konvexer konformer Abbildungen.

Von
HELMUT UNKELBACH.

Wenn man den Einheitskreis $|z_1|<1$ durch eine analytische Funktion $z_2=f_1(z_1)$ normiert (d.h. $f_1(0)=0$ und $f_1'(0)>0$) auf ein konvexes Teilgebiet $\mathfrak{K}_2$ des Kreises $|z_2|<1$ abbildet, hierauf den Einheitskreis $|z_2|<1$ in analoger Weise durch eine analytische Funktion $z_3=f_2(z_2)$ auf ein konvexes Teilgebiet $\mathfrak{K}_3$ des Kreises $|z_3|<1$ usw., bis zu einem konvexen Gebiet $\mathfrak{K}_{n+1}$, dann wird durch diese n-fach iterierte konforme Abbildung der Kreis $|z_1|<1$ im allgemeinen zwar nicht auf ein konvexes, aber doch auf ein schlichtes Teilgebiet des Kreises $|z_{n+1}|<1$ abgebildet. Hierbei entsteht die Frage, ob sich *jede* normierte, beschränkte und schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises durch iterierte konvexe Abbildungen der soeben beschriebenen Art approximieren läßt. Diese Frage wird in den nachstehend bewiesenen Sätzen I und Ia in positivem Sinne beantwortet. Dabei wird sich noch zeigen, daß die Approximation sogar so durchgeführt werden kann, daß alle bei der Iteration benutzten Gebiete $\mathfrak{K}_\nu$ kongruent sind. Speziell können die Gebiete $\mathfrak{K}_\nu$ „Nahezu-Kreise" sein im Sinne der nachstehenden Definition II $(1-\Theta<\varepsilon)$. Statt der Gebiete $\mathfrak{K}_\nu$ können auch nichtkonvexe, sternige Gebiete und die zugehörigen Abbildungsfunktionen entsprechend den Voraussetzungen des Satzes I gewählt werden. Hierdurch wird der Satz von PESCHL[1]), wonach sich jede normierte, beschränkte und schlichte konforme Abbildung durch Iteration beschränkter elementarer Schlitzabbildungen approximieren läßt, verallgemeinert.

Satz I läßt Anwendungen zu bei der Lösung der Frage, inwieweit sich gewisse Eigenschaften der Gesamtfamilie der normierten, beschränkten und schlichten analytischen Funktionen auf gewisse Teilfamilien übertragen lassen. Als Beispiel hierfür betrachten wir einen Problemkreis, der mit dem nachstehenden Ergebnis von DIEUDONNÉ[2]) zusammenhängt:

Ist $f(z)$ eine unimodular beschränkte analytische Funktion, die im Punkte $z=0$ verschwindet, dann gilt für $|z|\leq\sqrt{2}-1$

$$|f'(z)|\leq 1. \tag{1}$$

[1]) PESCHL, E.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. J. angew. Math. **176**, S. 61—94 (1937).

[2]) Siehe C. CARATHÉODORY, Funktionentheorie II, Basel 1950, S. 18. CARATHÉODORY hat den betreffenden Satz unabhängig von DIEUDONNÉ bewiesen. Der Satz enthält auch für $|z|>\sqrt{2}-1$ die genaue obere Schranke von $|f'(z)|$ als Funktion von $|z|$.

Dagegen gibt es zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2}-1$ stets eine Funktion $f(z)$, für welche gilt

$$|f'(z_0)| > 1. \tag{2}$$

Die Ungleichung (2) wird bei DIEUDONNÉ und CARATHÉODORY durch Einheitsfunktionen zweiten Grades, also durch nichtschlichte Funktionen verifiziert. Hierbei ergibt sich zunächst die Frage, ob sich zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2}-1$ auch eine schlichte Funktion $f(z)$ angeben läßt, welche die Ungleichung (2) erfüllt, oder ob für die Familie der schlichten Funktionen $f(z)$ die Ungleichung (1) auch noch in einem größeren Kreis $|z| \leq \sqrt{2}-1+c$, $c>0$ erfüllt ist. Diese Frage wird durch Satz II im ersteren Sinn beantwortet.

An dieses Ergebnis knüpfen weitere Fragen an, z.B.: Läßt sich zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2}-1$ auch eine konvexe Abbildungsfunktion $f(z)$ angeben, welche die Ungleichung (2) erfüllt, oder gilt für die Familie der konvexen Abbildungsfunktionen $f(z)$ die Ungleichung (1) auch noch in einem größeren Kreis $|z| \leq \sqrt{2}-1+c$? Diese Frage wird durch Satz III im ersteren Sinne beantwortet. Darüber hinaus zeigt Satz III, der als Folgerung aus den Sätzen I und II gewonnen wird, noch einen wesentlich allgemeineren Sachverhalt auf: Zu *jedem* Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2}-1$ und *jeder* der in Satz I definierten Funktionenfolgen $\{S_k(z)\}$ läßt sich eine natürliche Zahl k_* finden, so daß die Funktion $S_{k_*}(z)$ die Ungleichung (2) erfüllt. Daraus folgt, daß der Kreis $|z| = \sqrt{2}-1$ für die Familie der Funktionen $f(z)$ von ganz besonderer Bedeutung ist: Innerhalb dieses Kreises gilt stets die Ungleichung (1), während außerhalb dieses Kreises für gewisse Funktionen aus einer *beliebigen* Folge $\{S_k(z)\}$ und für gewisse Werte z_0 in *beliebiger Nähe des Kreises* auch die Ungleichung (2) gilt.

Satz I kann auch für die Lösung solcher Probleme von Nutzen sein, die mit der sog. „BIEBERBACHschen Vermutung" ($|a_n| \leq n$) zusammenhängen. Obwohl sich diese Vermutung auf die Familie der beschränkten *und* nichtbeschränkten schlichten Funktionen bezieht, läßt sie sich bekanntlich auf ein Abschätzungsproblem der beschränkten schlichten Funktionen zurückführen. Die Schwierigkeiten beim Beweis dieser Vermutung sowie bei der Lösung gewisser verwandter Abschätzungsprobleme beruhen zum Teil darauf, daß das Bildungsgesetz der Koeffizienten der elementaren beschränkten Schlitzabbildungsfunktionen — vor allem in der Iteration — nicht leicht zu übersehen ist, trotz der Einfachheit des Bildgebietes. Demgegenüber ergibt sich durch Satz I eine reiche Auswahl von Folgen von Funktionen $S_k(z)$, deren kongruente Iterationen eine beliebige schlichte Funktion $f(z)$ approximieren. Unter den Folgen $\{S_k(z)\}$ lassen sich möglicherweise auch solche finden, bei welchen das Bildungsgesetz der Koeffizienten leichter zu übersehen ist als bei den elementaren beschränkten Schlitzabbildungen. Solche Funktionenfolgen könnten dann einen Zugang zu allgemeinen Abschätzungen der Koeffizienten der schlichten Funktionen eröffnen. Wir definieren nun zunächst den Begriff der kongruenten Iteration:

Definition I. *Ist $w=f(z)$ eine Funktion, welche die Bedingungen des* Schwarz*schen Lemmas erfüllt, so bezeichnen wir die Funktion*

$$z_{n+1}=F_n(z_1)\equiv f_n(f_{n-1}(\cdots(f_1(z_1))\cdots))$$

als eine kongruente Iteration der Funktion $f(z)$, wenn jede Funktion $z_{\nu+1}=f_\nu(z_\nu)$ aus $w=f(z)$ durch eine Drehung

$$z_{\nu+1}=e^{i\psi_\nu}w, \qquad z_\nu=e^{i\beta_\nu}z$$

der Kreise $|w|<1$ und $|z|<1$ hervorgeht.

Um den Begriff „Nahezu-Kreise" fixieren zu können, wollen wir noch für beschränkte konvexe Gebiete ein „Maß der Konvexität" einführen, welches wir mit Θ bezeichnen und folgendermaßen definieren:

Definition II. *Ist $\mathfrak{R}$ ein beschränktes konvexes Gebiet, R_1 der Radius des kleinsten Kreises, welcher $\mathfrak{R}$ in seinem Innern enthält, und ist R_2 die obere Grenze der Radien der Kreise, deren Peripherie mit dem Rand von $\mathfrak{R}$ mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, dann ist das Maß der Konvexität Θ von $\mathfrak{R}$ definiert durch*

$$\Theta=\frac{R_1}{R_2}.$$

Aus Definition II folgert man, daß Θ alle Werte des abgeschlossenen Intervalls $0\leq\Theta\leq 1$ annimmt. Für $\Theta=1$ ist $\mathfrak{R}$ ein Kreis und $\Theta=0$ ergibt sich z.B. in denjenigen Fällen, in welchen der Rand von $\mathfrak{R}$ ein geradliniges Stück enthält. Durch $1-\Theta$ wird gewissermaßen die Abweichung des Gebietes $\mathfrak{R}$ von der Kreisgestalt gemessen.

Mit Benutzung der vorstehenden Definitionen können wir die folgenden Sätze formulieren:

Satz I. *$\{\mathfrak{S}_k\}$ sei eine Folge von einfach zusammenhängenden schlichten Gebieten der w-Ebene, welche folgende Voraussetzungen erfüllen:*

1. $\mathfrak{S}_1\subseteq\mathfrak{S}_2\subseteq\mathfrak{S}_3\subseteq\cdots$.
2. *Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3+\cdots$ ist der Einheitskreis $|w|<1$.*
3. *Alle Gebiete $\mathfrak{S}_k$ sind vom Einheitskreis $|w|<1$ verschieden.*
4. *Jedes Gebiet $\mathfrak{S}_k$ hat ein zusammenhängendes Randstück der Länge β_k mit dem Kreis $|w|=1$ gemeinsam und es ist $\lim_{k\to\infty}\beta_k=2\pi$.*
5. *Setzt man $w=\varrho\cdot e^{i\psi}$, dann sei der Rand von $\mathfrak{S}_k$ als eindeutige Funktion $\varrho=\varrho_k(\psi)$ darstellbar*[3]*), welche*

a) stückweise analytisch (d.h. analytisch mit Ausnahme endlich vieler Stellen, an denen die Funktion sowohl nach rechts als auch nach links differenzierbar ist),

b) gerade, d.h. $\varrho_k(\psi)=\varrho_k(-\psi)$,

c) im Intervall $0\leq\varphi\leq\pi$ monoton nicht zunehmend ist.

Bezeichnen wir dann mit $w=S_k(z)$ diejenige Funktion, welche den Einheitskreis $|z|<1$ auf $\mathfrak{S}_k$ normiert abbildet, dann läßt sich jede normierte, unimodular

[3]) Hieraus folgt insbesondere, daß die Gebiete $\mathfrak{S}_k$ sternig sind.

beschränkte und schlichte Funktion $F(z_1)$ im Kreise $|z_1|<1$ durch kongruente Iterationen

$$z_{n+1} = F_{k,n}(z_1) \equiv f_{k,n}\left(f_{k,n-1}\left(\cdots\left(f_{k,1}(z_1)\right)\cdots\right)\right) \tag{3}$$
$$n = n(k)$$

der Funktion $w = S_k(z)$ approximieren[4]*, d.h.*

$$F(z_1) = \lim_{k\to\infty} F_{k,n(k)}(z_1).$$

Unter den Folgerungen dieses Satzes erscheint die folgende bemerkenswert:

Satz Ia. *Zu jeder beliebig vorgegebenen Folge von Zahlen Θ_k im halboffenen Intervall $0 \leq \Theta < 1$ gibt es stets eine Folge konvexer Gebiete $\mathfrak{K}_k$ mit den Maßen der Konvexität Θ_k, so daß man eine beliebige normierte, unimodular beschränkte und schlichte analytische Funktion $F(z)$ durch kongruente Iterationen der normierten Abbildungsfunktionen des Einheitskreises auf $\mathfrak{K}_k$ approximieren kann.*

An Satz Ia erscheint auffallend, daß die Approximation auch im Falle $\lim_{k\to\infty} \Theta_k = 1$ möglich ist, während man doch nur identische Abbildungen erhalten würde, wenn entgegen der Voraussetzung 3. von Satz I alle $\Theta_k = 1$ wären.

Beweis von Satz I. Auf Grund des S. 63 erwähnten Satzes von PESCHL kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktion $Z = F(z_1)$ den Kreis $|z_1|<1$ auf ein elementares Schlitzgebiet $\mathfrak{S}$ normiert abbildet, welches aus dem Kreis $|Z|<1$ durch Aufschlitzen längs eines Stückes der negativen reellen Halbachse entsteht. Es wird sich zeigen, daß man für eine derartige Schlitzabbildung die Approximation so durchführen kann, daß die in Definition I enthaltenen Größen $\psi_\nu = \vartheta_\nu = 0$ sind, d.h.

$$f_{k,1}(z) \equiv f_{k,2}(z) \equiv \cdots \equiv f_{k,n}(z) \equiv S_k(z). \tag{4}$$

Wir setzen nun $S_k'(0) = \alpha_k$ und $F'(0) = \alpha$. Wegen Voraussetzung 3. ist $\alpha_k < 1$ und wegen Voraussetzung 1. und 2. ist $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 1$. Außerdem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $F(z_1) \not\equiv z_1$, also $\alpha < 1$ ist, weil im Falle $F(z_1) \equiv z_1$ die Behauptung von Satz I wegen $z_1 = \lim_{k\to\infty} S_k(z_1)$ trivialerweise erfüllt ist. Es gibt deshalb ein k_0, so daß

$$\alpha_k \geq \alpha \qquad \text{für alle } k > k_0.$$

Für diese Werte k definieren wir die ganzzahlige Funktion $n(k)$, wobei n eine natürliche Zahl bedeutet, durch die Ungleichungen

$$\alpha_k^n \geq \alpha, \qquad \alpha_k^{n+1} < \alpha \tag{5}$$

und wir behaupten, daß unter den Voraussetzungen (4) und (5) und bei Benutzung der Schreibweise (3) die Gleichung gilt

$$\lim_{k\to\infty} F_{k,n}(z_1) = F(z_1). \tag{6}$$

[4]) Gemeint ist natürlich, daß es sich in jedem Kreis $|z| \leq r < 1$ um eine gleichmäßige Approximation handelt.

Um diese Gleichung zu beweisen, muß man zeigen, daß die schlichten Teilgebiete $\mathfrak{S}_k^n$ des Kreises $|z_{n+1}|<1$, auf welche die Funktionen $z_{n+1}=F_{k,n}(z_1)$ den Kreis $|z_1|<1$ abbilden, den Kern $\mathfrak{S}$ besitzen und gegen diesen Kern konvergieren[5]). Dies ist der Fall, wenn man zwei Folgen gegen Null konvergierender positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$ finden kann, welche folgende Bedingungen erfüllen:

I. Die nicht auf dem Kreis $|z_{n+1}|=1$ liegenden Randpunkte von $\mathfrak{S}_k^n$ liegen in dem Kreissektor $|\arg z_{n+1}|>\pi-\varepsilon_k$.

II. Alle Randpunkte von $\mathfrak{S}_k^n$ liegen außerhalb des Kreises $|z_{n+1}|=R-\delta_k$, wobei der innerste Punkt des Schlitzes von $\mathfrak{S}$ mit $Z=-R$ bezeichnet ist.

Die Zahlen ε_k wollen wir mit Hilfe der nach Voraussetzung 4. existierenden Kreisbogen der Länge β_k definieren. Für diese Kreisbogen besagen die Voraussetzungen 5b) und 5c), daß sie zur reellen Achse symmetrisch liegen und den Punkt $z_2=1$ enthalten, und Voraussetzung 3., daß sie den Punkt $z_2=-1$ nicht enthalten. Die Endpunkte der Kreisbogen sind deshalb

$$z_2=e^{i\frac{\beta_k}{2}} \quad \text{und} \quad z_2=e^{-i\frac{\beta_k}{2}}.$$

Wir setzen nun

$$\varepsilon_k=\pi-\frac{\beta_k}{2}, \tag{8}$$

d.h. $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$. Dann liegt jedenfalls der Rand von $\mathfrak{S}_k=\mathfrak{S}_k^1$, so weit er nicht mit einem Teil des Kreises $|z_2|=1$ zusammenfällt, innerhalb des Kreissektors $|\arg z_2|>\pi-\varepsilon_k$.

Für den Fall, daß $n(k)>1$ ist, müssen wir von diesem Kreissektor das Bild untersuchen, welches die Funktion $z_3=S_k(z_2)$ in der z_3-Ebene entwirft. Setzen wir $z_2=r_2\,e^{i\varphi_2}$, dann folgt aus Voraussetzung 5a) und 5c), daß für $0\leq\varphi_2\leq\pi$ und $r_2=1$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\log|S_k(z_2)|\leq 0 \tag{9}$$

mit Ausnahme höchstens endlich vieler Sprungstellen der linken Seite von (9). An den Sprungstellen ergeben sich verschiedene rechte und linke Differentialquotienten, die ebenfalls ≤ 0 sind. Eine einfache Umrechnung zeigt, daß die Ungleichung (9) gleichbedeutend ist mit

$$\Im\left\{\frac{z_2 S_k'(z_2)}{S_k(z_2)}\right\}\geq 0. \tag{10}$$

Andererseits muß es sich wegen Voraussetzung 5b) und wegen der Normierung um eine reelle Abbildungsfunktion handeln, d.h.

$$\Im\left\{\frac{z_2 S_k'(z_2)}{S_k(z_2)}\right\}=0 \qquad \text{für alle reelle } z_2>-1. \tag{11}$$

Auf der linken Seite von (10) und (11) steht eine Potentialfunktion, die im oberen Halbkreis des Einheitskreises ($0<\varphi_2<\pi$, $r_2<1$) regulär ist und die deshalb ihre Extremalwerte auf dem Rande des Halbkreises annimmt. Hierbei

[5] Vgl. hierzu etwa BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II, S. 12ff. Leipzig u. Berlin 1931.

liegen die Randwerte in einer Sprungstelle nach einem bekannten Satz über Potentialfunktionen zwischen den Werten des betreffenden rechten und des linken Differentialquotienten, der an die Stelle der linken Seite von (9) tritt. Deshalb müssen die Ungleichungen (9) und (10) im ganzen oberen Halbkreis gültig sein. Im unteren Halbkreis sind die Zeichen $\leq$ bzw. $\geq$ durch $\geq$ bzw. $\leq$ zu ersetzen.

Nun wollen wir den Radiusvektor $z_2 = r_2 e^{i\frac{\beta_k}{2}}$, $0 < r_2 < 1$ mit seinem Bild in der z_3-Ebene vergleichen. Zu diesem Zweck beachten wir, daß auf diesem Radiusvektor die Ungleichung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{arc} S_k(z_2) \geq 0. \tag{12}$$

Diese Ungleichung folgt aus dem oben Bewiesenen, da die linke Seite von (12) durch eine einfache Umformung übergeht in

$$\Im\left\{e^{i\frac{\beta_k}{2}} \frac{S_k'(z_2)}{S_k(z_2)}\right\} = \frac{1}{r_2} \Im\left\{\frac{z_2 S_k'(z_2)}{S_k(z_2)}\right\}. \tag{13}$$

Außerdem ist wegen der Normierung $S_k'(0) > 0$ auf dem Radiusvektor

$$\lim_{z_2 \to 0} \operatorname{arc} S_k(z_2) = \frac{\beta_k}{2} \tag{14}$$

Aus (12) und (14) folgt

$$\operatorname{arc} S_k(z_2) \geq \frac{\beta_k}{2} \quad \text{für} \quad \operatorname{arc} z_2 = \frac{\beta_k}{2} \tag{15a}$$

und analog beweist man, daß

$$\operatorname{arc} S_k(z_2) \leq -\frac{\beta_k}{2} \quad \text{für} \quad \operatorname{arc} z_2 = -\frac{\beta_k}{2}. \tag{15b}$$

Der Kreissektor $|\operatorname{arc} z_2| \geq \frac{\beta_k}{2}$ wird also durch die Funktion $z_3 = S_k(z_2)$ auf ein Teilgebiet des Sektors $|\operatorname{arc} z_3| \geq \frac{\beta_k}{2}$ abgebildet und die iterierte Funktion $z_3 = S_k(S_k(z_1)) \equiv S_k(z_2)$ bildet den Kreis $|z_1| < 1$ auf ein Gebiet $\mathfrak{S}_k^2$ ab, dessen Rand nur auf der Kreisperipherie $|z_3| = 1$ und innerhalb des Sektors $|\operatorname{arc} z_3| \geq \frac{\beta_k}{2}$ verläuft. Für Gebiete mit $n > 2$ wird der Beweis in analoger Weise durchgeführt. Damit ist die Gültigkeit der Bedingung I. bewiesen.

Es ist jetzt noch die Existenz einer Folge $\{\delta_k\}$ nachzuweisen, welche die Bedingung II. erfüllt. Würde eine solche Folge nicht existieren, dann gäbe es eine Zahl δ_0 mit $0 < \delta_0 < R$, so daß der Kreis $|z_{n+1}| \leq R - \delta_0$, $n = n(k)$ für beliebig große k Randpunkte von $\mathfrak{S}_k^n$ enthalten würde. Wegen Voraussetzung 5c) würde dann der Schlitz $-1 \leq z_{n+1} \leq -R + \delta_0$ nirgends innerhalb der betreffenden Gebiete $\mathfrak{S}_k^n$ liegen. Die zu diesem Schlitz gehörige normierte elementare Schlitzabbildung bezeichnen wir mit $Z = F(z, \delta_0)$, d.h. $F(z, 0) \equiv F(z)$. Dann ist

$$F'(0, \delta_0) < \alpha \quad \text{für} \quad 0 < \delta_0 < R. \tag{16}$$

Bezeichnen wir die Umkehrfunktion von $Z = F(z, \delta_0)$ bei festem δ_0 mit $z = \overline{F}(Z, \delta_0)$, dann erfüllt die Funktion

$$z^* = \overline{F}\left(F_{k,n}(z), \delta_0\right)$$

für gewisse, beliebig große k die Bedingungen des SCHWARZschen Lemmas. Also gilt für die betreffenden k

$$\left[\frac{dz^*}{dz}\right]_{z=0} \leq 1$$

oder

$$\frac{F'_{k,n}(0)}{F'(0,\delta_0)} \leq 1. \tag{17}$$

Andererseits folgt aus (5)

$$\lim_{k\to\infty} F'_{k,n}(0) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k^{n(k)} = \alpha.$$

Deshalb folgt aus (17)

$$F'(0,\delta_0) \geq \alpha. \tag{18}$$

Zwischen (16) und (18) besteht ein Widerspruch. Also war die Annahme, daß keine Folge $\{\delta_k\}$ der verlangten Art existiert, falsch. Damit ist die Gl. (6), welche die Aussage von Satz I enthält, vollständig bewiesen.

Satz Ia ergibt sich unmittelbar als Folgerung aus Satz I, weil man als Gebiete $\mathfrak{G}_k$ speziell auch Kreisbogenzweiecke mit dem Maß der Konvexität Θ_k wählen kann, sofern $\Theta_k < 1$ ist.

Um die bereits in der Einleitung beschriebene Anwendungsmöglichkeit von Satz I darzutun, beweisen wir zunächst

Satz II. *Zu jedem Wert z_0 mit $\sqrt{2}-1<|z_0|<1$ läßt sich eine Funktion $s(z)$ finden, welche den Kreis $|z|<1$ auf ein elementares, unimodular beschränktes Schlitzgebiet abbildet und im Punkte $z=0$ verschwindet, so daß folgendes gilt:*

$$|s'(z_0)| > 1. \tag{19}$$

Beweis. Eine Funktion $w=s(z)$, bei welcher das Bildgebiet des Kreises $|z|<1$ durch radiales Aufschlitzen des Kreises $|w|<1$ vom Punkte $w=-1$ aus gewonnen wird und $s'(0)>0$ ist, läßt sich bekanntlich darstellen durch

$$\frac{w}{(1-w)^2} = \alpha \cdot \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad 0<\alpha<1. \tag{20}$$

Daraus errechnet man

$$w = 1 + \frac{(1-z)^2}{2\alpha z}\left(1 - \sqrt{1+\frac{4\alpha z}{(1-z)^2}}\right)$$

und außerdem, wenn man $\varepsilon = 1-\alpha$ setzt,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2(1-\varepsilon)z(1+z) - (1-z^2)\left[\sqrt{(1+z)^2-4\varepsilon z}-(1-z)\right]}{2(1-\varepsilon)z^2\sqrt{(1+z)^2-4\varepsilon z}}.$$

Bei den Quadratwurzeln dieser Ausdrücke ist derjenige Zweig zu wählen, bei welchem sich für $z=0$ der Wert Eins ergibt. Entwickelt man den letzten Ausdruck nach Potenzen von ε, so findet man

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \varepsilon \cdot g(z) + o(\varepsilon). \tag{21}$$

Dabei ist

$$g(z) = \frac{1-z(z+2)}{(1+z)^2}.$$

Die Funktion $g(z)$ hat im Kreis $|z|<1$ genau eine Nullstelle, und zwar im Punkte $z=\sqrt{2}-1$. Für $z_0>\sqrt{2}-1$ ist $g(z_0)<0$. Aus (21) folgt deshalb, daß für jeden festen Wert $z_0>\sqrt{2}-1$ die Größe ε so klein gewählt werden kann, daß $\left|\frac{dw}{dz}\right|>1$ ist. Damit ist Satz II für positive Werte von z_0 bereits bewiesen. Für die anderen Werte von z_0 mit $|z_0|>\sqrt{2}-1$ ergibt sich der Satz durch entsprechende Drehung der z- und w-Ebene.

Aus den Sätzen I, Ia und II folgt der nachstehende

Satz III. *Ist $\{S_k(z)\}$ irgendeine Folge von Funktionen, welche die Voraussetzungen von Satz I erfüllen, dann gibt es zu jedem Wert z_0 mit $\sqrt{2}-1<|z_0|<1$ eine natürliche Zahl k_*, so daß folgendes gilt*

$$|S'_{k_*}(z_0)|>1. \tag{22}$$

Hierbei kann die Folge der Funktionen $S_k(z)$ insbesondere so gewählt werden, daß diese den Einheitskreis auf konvexe Gebiete $\mathfrak{K}_k$ mit beliebig vorgegebenen Maßen der Konvexität $\Theta_k<1$ abbilden.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine Größe $c>0$, so daß für jede Funktion irgendeiner Folge $\{S_k(z)\}$ im Kreise $|z|\leq\sqrt{2}-1+c$ stets gilt

$$|S'_k(z)|\leq 1.$$

Dann ist gemäß (3) und nach Definition I

$$|f'_{k,\nu}(z_\nu)|=|S'_k(e^{-i\varphi_\nu}z_\nu)|\leq 1 \quad \text{für} \quad |z_\nu|<\sqrt{2}-1+c, \qquad \nu=1,2,\ldots,n. \tag{23}$$

Außerdem folgt aus dem SCHWARZschen Lemma

$$|z_{\nu+1}|=|f_{k,\nu}(z_\nu)|\leq|z_\nu| \quad \text{für} \quad \nu=1,2,\ldots,n-1. \tag{24}$$

Dann ergibt sich aus (3), (23) und (24)

$$|F'_{k,n}(z_1)|=|f'_{k,1}(z_1)|\cdot|f'_{k,2}(z_2)|\ldots|f'_{k,n}(z_n)|\leq 1 \tag{25}$$

für alle z_1 mit $|z_1|<\sqrt{2}-1+c$. Aus (25), Satz I und Satz II ergibt sich nunmehr ohne weiteres ein Widerspruch. Also gibt es keine Größe c mit der oben angenommenen Eigenschaft. Es gibt deshalb in beliebiger Nähe des Kreises $|z|=\sqrt{2}-1$ für eine beliebige Folge $\{S_k(z)\}$ Werte z_0 und zugehörige natürliche Zahlen k_*, so daß die Ungleichung (22) erfüllt ist. Dann muß aber dieselbe Aussage für alle Werte z_0 des Kreisringes $\sqrt{2}-1<|z_0|<1$ zutreffen. Denn würde sie für *einen* Wert z_0 des Kreisringes nicht zutreffen, dann würde dasselbe für den ganzen Kreis $|z|=|z_0|$ gelten. Nach dem Satz vom Maximum des absoluten Betrages einer analytischen Funktion könnte dann die Aussage auch im Innern des Kreises $|z|<|z_0|$ nicht zutreffen, was dem oben Bewiesenen widerspricht. Damit ist die erste Aussage von Satz III bewiesen.

Die letzte Aussage von Satz III ist eine unmittelbare Folge aus Satz Ia.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

RICHERT, H.-E.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 71—84 (1953)

9183-58

Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II.

Von
HANS-EGON RICHERT.

7. Im ersten Teil dieser Arbeit[9]) habe ich für die summatorische Funktion $A_0(x)$ der Anzahl der wesentlich verschiedenen ABELschen Gruppen der Ordnung n, $a_0(n)$, mit gewissen Konstanten c_ν, $\nu = 1, 2, 3$, die asymptotische Entwicklung

$$A_0(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{5}} \log^{\frac{3}{5}} x)$$

hergeleitet. Vor einiger Zeit hat nun ŠAPIRO-PYATECKIJ[10]) in einer Abhandlung auch die Funktion $A_0(x; q, l) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l \pmod q}} a_0(n)$ studiert und für $(q, l) = 1$ das Resultat

$$A_0(x; q, l) = c_1(q)\, x + O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon} q^{\frac{1}{3}}) \tag{34}$$

erhalten.

Hier soll gezeigt werden, daß der in I beschrittene Weg über (34) hinaus zu der Entwicklung

$$A_0(x; q, l) = c_1(q)\, x + c_2(q)\, x^{\frac{1}{2}} + c_3(q)\, x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{5}} \log^{\frac{3}{5}} x\, q^{\frac{2}{5}})$$

(Satz 5) führt.

Wie in I das Lemma 8, ist hier das Lemma 17 das wesentliche Hilfsmittel, das in seiner Allgemeinheit auch für eine ganze Reihe weiterer zahlentheoretischer Abschätzungen anwendbar bleibt und daher auch ein selbständiges Interesse beanspruchen dürfte.

Zweckmäßigerweise führen wir die Numerierung von I weiter und behalten auch die dortige Bezeichnungsweise bei.

Zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen haben wir uns für einen Charakter χ modulo q, wie bei der Herleitung von (1), lediglich von der Richtigkeit von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \chi(p^\nu)\, a_0(p^\nu)\, p^{-\nu s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \chi(p^\nu)\, p^{-\nu s})^{-1}, \qquad \sigma > 0,$$

zu überzeugen. Hieraus folgt

$$Z_0(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, a_0(n)\, n^{-s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} L(\nu s, \chi^\nu) \quad \text{für} \quad \sigma > 1. \tag{35}$$

[9]) RICHERT, H.-E.: Math. Z. **56**, 21—32 (1952), im folgenden kurz mit I zitiert.
[10]) ŠAPIRO-PYATECKIJ, I. I.: Mat. Sbornik, N. S. **26** (**68**), 479—486 (1950).

8. Es seien

$$x \text{ reell, hinreichend groß,}$$

$$2 \leqq q, \text{ natürlich,} \tag{36}$$

$\chi, \chi_0, \chi_1, \chi_2$ seien Charaktere modulo q, χ_0 der Hauptcharakter. Mit χ_1 werde, falls er existiert, der Charakter mit

$$\chi_1^2 = \chi_0, \qquad \chi_1 \neq \chi_0 \tag{37}$$

und mit χ_2, falls diese existieren, diejenigen Charaktere mit

$$\chi_2^3 = \chi_0, \qquad \chi_2 \neq \chi_0 \tag{38}$$

bezeichnet. Ferner seien

$$Z_1(s,\chi) = L(s,\chi)\, L(2s,\chi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n,\chi)\, n^{-s}, \qquad \sigma > 1, \tag{39}$$

$$Z_2(s,\chi) = L(s,\chi)\, L(2s,\chi^2)\, L(3s,\chi^3) = \sum_{n=1}^{\infty} a_2(n,\chi)\, n^{-s}, \qquad \sigma > 1, \tag{40}$$

$$Z_3(s,\chi) = \prod_{\nu=4}^{\infty} L(\nu s,\chi^\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_3(n,\chi)\, n^{-s}, \qquad \sigma > \tfrac{1}{4}, \tag{41}$$

$$Z_4(s,\chi) = \prod_{\nu=5}^{\infty} L(\nu s,\chi^\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n,\chi)\, n^{-s}, \qquad \sigma > \tfrac{1}{5}, \tag{42}$$

$$A_0(x,\chi) = \sum_{n \leqq x} \chi(n)\, a_0(n),$$

$$A_\nu(x,\chi) = \sum_{n \leqq x} a_\nu(n,\chi), \qquad \nu = 1, 2, 3, 4,$$

$$c_\mu(\chi) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} L\left(\frac{\nu}{\mu}, \chi^\nu\right), \qquad \mu = 1, 2, 3, \tag{43}$$

$$\zeta(s,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+w)^{-s}, \qquad 0 < w \leqq 1, \qquad \sigma > 1,$$

$\varphi(q), \mu(q)$ beziehentlich die EULERsche und die MÖBIUSsche Funktion,

$$S_1(x,q) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{m \leqq \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}} \psi\left(\frac{x}{d t^2 m^2}\right), \tag{44}$$

$$S_2(x,q) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{m \leqq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}} \psi\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{t}\sqrt{m}}\right), \tag{45}$$

$$S_3(x,q) = \sum_{h \leqq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{m \leqq \frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}} \psi\left(\frac{x}{q\, d^2 m^2} - \frac{h}{q}\right), \tag{46}$$

$$S_4(x,q)=\sum_{h\le q}\chi_1(h)\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{\substack{m\le x^{\frac13}\\ m\equiv h\,(\mathrm{mod}\,q)}}\psi\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{m}}\right), \tag{47}$$

$$S_5(x,q)=S_5(x,q,\chi)=\sum_{h\le q}\chi(h)\sum_{j\le q}\chi^2(j)\sum_{\substack{m\le x^{\frac13}\\ m\equiv j\,(\mathrm{mod}\,q)}}\psi\left(\frac{x}{q\,m^2}-\frac{h}{q}\right), \tag{48}$$

$$S_6(x,q)=S_6(x,q,\chi)=\sum_{h\le q}\chi^2(h)\sum_{j\le q}\chi(j)\sum_{\substack{m\le x^{\frac13}\\ m\equiv j\,(\mathrm{mod}\,q)}}\psi\left(\frac{\sqrt{x}}{q\sqrt{m}}-\frac{h}{q}\right). \tag{49}$$

$\sum_{a\le n\le b}$ bedeute für $b<a$ als leere Summe Null. Die O-Konstanten sind im allgemeinen absolute und hängen nur vorübergehend von ε, über das dann alsbald verfügt wird, ab.

9. Vorerst noch vier Hilfssätze:

Lemma 13. *Ist $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, so gilt*

$$\sum_{\substack{n\le\omega\\(n,q)=1}}f(n)=\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{m\le\frac{\omega}{d}}f(m\,d).$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{m\le\frac{\omega}{d}}f(m\,d)=\sum_{\substack{m\,d\le\omega\\ d\mid q}}\mu(d)\,f(m\,d)=\sum_{n\le\omega}\Big(\sum_{\substack{d\mid q\\ d\mid n}}\mu(d)\Big)f(n)=\sum_{\substack{n\le\omega\\(n,q)=1}}f(n).$$

Lemma 14. *Es seien ω, w und $\varkappa$ drei reelle Zahlen, $\omega>0$, $0<w\le 1$, $0<\varkappa\neq 1$. Dann ist*

$$\sum_{0\le\nu\le\omega}(\nu+w)^{-\varkappa}=\zeta(\varkappa,w)-\frac{1}{\varkappa-1}\omega^{1-\varkappa}-\psi(\omega)\,\omega^{-\varkappa}+w\,\omega^{-\varkappa}+O(\omega^{-\varkappa-1}).$$

Beweis. Wie bei Lemma 2.

Lemma 15. *Es ist*

$$A_3(x,\chi)=O(x^{\frac12}).$$

Beweis. Nach (41) und (42) haben wir

$$A_3(x,\chi)=\sum_{n\le x}a_3(n,\chi)=\sum_{m^4n\le x}\chi^4(m)\,a_4(n,\chi)=\sum_{n\le x}a_4(n,\chi)\sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{n}}}\chi^4(m),$$

folglich wegen

$$|a_\nu(n,\chi)|\le a_\nu(n,\chi_0)\quad\text{für}\quad\nu=1,2,3,4, \tag{50}$$

und da $Z_4(s,\chi_0)$ für $\sigma>\frac18$ absolut konvergiert,

$$|A_3(x,\chi)|\le\sum_{n\le x}|a_4(n,\chi)|\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac12}\le x^{\frac12}\sum_{n\le x}a_4(n,\chi_0)\,n^{-\frac12}=O(x^{\frac12}).$$

Lemma 16. *Für* $\delta > \frac{1}{4}$ *ist*

$$\sum_{n \le x} a_3(n,\chi)\, n^{-\delta} = Z_3(\delta,\chi) + O(x^{\frac{1}{2}-\delta}).$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz von $Z_3(s,\chi)$ für $\sigma > \frac{1}{4}$ ist nach Lemma 15 für $\delta > \frac{1}{4}$

$$\sum_{n \le x} a_3(n,\chi)\, n^{-\delta} - Z_3(\delta,\chi) = -\sum_{n > x} \left(A_3(n,\chi) - A_3(n-1,\chi)\right) n^{-\delta} = O(x^{\frac{1}{2}-\delta}).$$

10. Wir wollen zunächst $A_1(x,\chi)$ berechnen. Nach Lemma 1 gilt für jeden Charakter χ modulo q

$$(51)\quad \begin{cases} A_1(x,\chi) = \sum\limits_{m^2 n \le x} \chi^2(m)\,\chi(n) \\ \quad = \sum\limits_{m \le x^{\frac{1}{3}}} \chi^2(m) \sum\limits_{n \le \frac{x}{m^2}} \chi(n) + \sum\limits_{n \le x^{\frac{1}{3}}} \chi(n) \sum\limits_{m \le \sqrt{\frac{x}{n}}} \chi^2(m) - \sum\limits_{n \le x^{\frac{1}{3}}} \chi(n) \sum\limits_{m \le x^{\frac{1}{3}}} \chi^2(m). \end{cases}$$

Für den Hauptcharakter χ_0 folgt hieraus nacheinander mit Lemma 13, (9), Lemma 2, (44) und (45)

$$A_1(x,\chi_0) = \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{3}} \\ (m,q)=1}} \left[\frac{x}{d m^2}\right] + \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{3}} \\ (m,q)=1}} \left[\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{m}}\right] - \left(\sum_{d \mid q} \mu(d) \left[x^{\frac{1}{3}}/d\right]\right)^2$$

$$= -\sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{t \mid q} \mu(t) \sum_{m \le \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}} \psi\left(\frac{x}{d t^2 m^2}\right) - \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{t \mid q} \mu(t) \sum_{m \le \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}} \psi\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{t}\sqrt{m}}\right) +$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q}\, x \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\zeta(2) - \frac{d}{x^{\frac{1}{3}}} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}\right) \frac{d^2}{x^{\frac{1}{3}}} + O(x^{-1} d^3)\right)$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q}\, x^{\frac{1}{2}} \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2\frac{x^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{1}{2}}} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}\right) \frac{d^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} + O(x^{-\frac{1}{6}} d^{\frac{1}{2}})\right) -$$

$$- \frac{\varphi^2(q)}{q^2}\, x^{\frac{1}{3}} + 2\frac{\varphi(q)}{q}\, x^{\frac{1}{3}} \sum_{d \mid q} \mu(d)\, \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}\right) + O(q^\varepsilon),$$

$$(52)\quad \begin{cases} A_1(x,\chi_0) \\ = -S_1(x,q) - S_2(x,q) + \frac{\varphi(q)}{q}\, x\, L(2,\chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q}\, x^{\frac{1}{2}}\, L\left(\frac{1}{2},\chi_0\right) + O(q^{1+\varepsilon}). \end{cases}$$

Für $\chi = \chi_1$ haben wir nach (51), (37), Lemma 13, (46), (47) und Lemma 14 für $q \le \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$

$$A_1(x,\chi_1) = \sum_{h \le q} \chi_1(h) \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{3}} \\ (m,q)=1}} \left[\frac{x}{q m^2} - \frac{h}{q} + 1\right] +$$

$$+ \sum_{h \le q} \chi_1(h) \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{3}} \\ m \equiv h \,(\mathrm{mod}\, q)}} \left[\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{m}}\right] - \sum_{d \mid q} \mu(d) \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}\right] \sum_{h \le q} \chi_1(h) \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} - \frac{h}{q} + 1\right] =$$

$$= - S_3(x,q) - S_4(x,q) + \frac{\varphi(q)}{q}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q^{\frac{1}{3}}}\sum_{h\le q}\chi_1(h)\left(\zeta\left(\frac{1}{2},\frac{h}{q}\right) + 2\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-h}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-h}{q}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-h}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{h}{q}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-h}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} + O(x^{-\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{3}})\right) +$$

$$+ O(q^{1+\varepsilon}) + \frac{\varphi(q)}{q}x^{\frac{1}{3}}\sum_{h\le q}\chi_1(h)\,\psi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} - \frac{h}{q}\right),$$

$$(53)\quad A_1(x,\chi_1) = - S_3(x,q) - S_4(x,q) + \frac{\varphi(q)}{q}x^{\frac{1}{3}}L\left(\frac{1}{2},\chi_1\right) + O(q^2),\quad q \le \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}.$$

Ist $\chi \neq \chi_0$ und $\chi \neq \chi_1$, so erhalten wir aus (51) mit (48) und (49)

$$A_1(x,\chi) = \sum_{h\le q}\chi(h)\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\chi^2(m)\left[\frac{x}{q\,m^2} - \frac{h}{q} + 1\right] +$$

$$+ \sum_{h\le q}\chi^2(h)\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\chi(m)\left[\frac{\sqrt{x}}{q\sqrt{m}} - \frac{h}{q} + 1\right] + O(q^2)$$

$$= - S_5(x,q,\chi) - S_6(x,q,\chi) - \frac{1}{q}\sum_{h\le q}\chi(h)\,h\sum_{j\le q}\chi^2(j)\left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} - \frac{j}{q} + 1\right] -$$

$$- \frac{1}{q}\sum_{h\le q}\chi^2(h)\,h\sum_{j\le q}\chi(j)\left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} - \frac{j}{q} + 1\right] + O(q^2),$$

$$(54)\quad A_1(x,\chi) = - S_5(x,q,\chi) - S_6(x,q,\chi) + O(q^2) \quad \text{für} \quad \chi \neq \chi_0, \chi \neq \chi_1.$$

11. Jetzt sollen die Summen $S_\nu(x,q)$, $1 \le \nu \le 6$, abgeschätzt werden. Zu diesem Zwecke beweisen wir in Verallgemeinerung von Lemma 8 das folgende

Lemma 17: *Es seien x, η, α, ω reelle Zahlen, j und q natürliche Zahlen, $x \ge 1$, $\alpha > 0$, $\eta \ge 1$, $1 \le j \le q$, (k,l) ein Exponentenpaar mit $k > 0$ und*

$$R(x,\eta,\alpha;\,q,j;\,\omega) = \sum_{\substack{n\le\eta\\ n\equiv j\,(\mathrm{mod}\,q)}}\psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right),$$

wo ω von n unabhängig ist. Dann gilt

$$R(x,\eta,\alpha;q,j;\omega) = O(1) + O(x^{-\frac{1}{3}}\eta^{1+\frac{\alpha}{2}}q^{-1}) + \begin{cases} O\left(x^{\frac{k}{k+1}}\eta^{\frac{l-\alpha k}{k+1}}q^{-\frac{l}{k+1}}\right) & \text{für } l > \alpha k,\\ O\left(x^{\frac{k}{k+1}}\log\eta\, q^{-\frac{\alpha k}{k+1}}\right) & \text{für } l = \alpha k,\\ O\left((x\,q^{-\alpha})^{\frac{k}{1+(\alpha+1)k-l}}\right) & \text{für } l < \alpha k, \end{cases}$$

wobei die O-Konstanten nur von α abhängen.

Für $\lambda = 1, 2, \ldots$ sind

$$(k_\lambda, l_\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda+1}{2(2\Lambda-1)},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\Lambda-1)}\right), \qquad \Lambda = 2^\lambda,$$

Exponentenpaare.

Beweis. Für $1 \leq \eta < 3q$ ist $R(x, \eta, \alpha;\ q, j; \omega) = O(1)$ und daher die erste Behauptung richtig, so daß wir $\eta \geq 3q$ voraussetzen können. In der Definition eines Exponentenpaares wählen wir $h = \alpha + 1$. Dann hängt $\gamma(\alpha) = \frac{\alpha + r}{c}$ nur von α ab. Für $a > \gamma(\alpha)$ genügt nun die beliebig oft, also sicher r-mal, differenzierbare Funktion $f(n) = -\frac{\nu x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha}$, ν natürlich, mit $y = \frac{\alpha \nu x}{q^\alpha}$ der Bedingung (15). Setzen wir $u = 2$ und beachten $\gamma(\alpha) > 1$, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (14) für irgendein Exponentenpaar (k, l)

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(z^k a^l) = O(\nu^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k}) \quad \text{für} \quad \gamma(\alpha) < a < b < 2a,\ z > 1.$$

Wegen $u = 2$ hängt dabei die O-Konstante nur von h, d. h. nur von α ab. Ferner sind für $\gamma(\alpha) < a < b < 2a$ und $z \leq 1$ bei $f(n)$ die Voraussetzungen in Lemma 6 mit $\lambda = 3^{-\alpha-2}\alpha(\alpha+1)\,\nu\, x\, a^{-\alpha-2} q^{-\alpha}$ erfüllt, so daß wir aus Lemma 6 bekommen

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{für} \quad \gamma(\alpha) < a < b < 2a, \quad z \leq 1,$$

insgesamt also

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(\nu^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k}) + O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right) \text{ für } \gamma(\alpha) < a < b < 2a.$$

Verwenden wir dies in Lemma 7 mit $g(n) = \frac{x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha} + \omega$, so folgt

$$\sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha} + \omega\right)$$

$$= O(a\xi^{-1}) + O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Min}\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right)\left(\nu^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k} + \nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

denn $\nu\omega$ ist mit ω von n unabhängig. Daher haben wir mit der Festsetzung

$$\xi = x^{-\frac{k}{k+1}} a^{\frac{1+(\alpha+1)k-l}{k+1}} q^{\frac{\alpha k}{k+1}}$$

wegen $k > 0$

$$(55) \quad \sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\right) = O\left(x^{\frac{k}{k+1}} a^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

für $\gamma(\alpha) < a < b < 2a$.

Da jeweils mindestens eines der beiden Fehlerglieder in (55) $\gamma(\alpha)$ majorisiert, gilt (55) ebenfalls für a Werte mit $1 \leq a \leq \gamma(\alpha)$.

Wir werden nun die Fälle $l \gtreqless \alpha k$ unterscheiden. Zunächst ist

$$(56)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = \sum_{0 \le n \le \frac{\eta - j}{q}} \psi\Big(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\Big) \\ = O(1) + \displaystyle\sum_{m \le K} \sum_{2^{m-1} \le n \le 2^m - 1} \psi\Big(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\Big) + \sum_{2^K \le n \le \frac{\eta - j}{q}} \psi\Big(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\Big), \\ \text{wo} \quad K = \left[\frac{\log \frac{\eta - j}{q}}{\log 2}\right] \quad (\ge 1). \end{cases}$$

Für $l > \alpha k$ folgt aus (55) und (56)

$$\sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = O(1) + O(1) \sum_{m \le K} \Big(x^{\frac{k}{k+1}} 2^{m \frac{l - \alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}} + x^{-\frac{1}{2}} 2^{m\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} q^{\frac{\alpha}{2}} \Big) +$$

$$+ O\Big(x^{\frac{k}{k+1}} \eta^{\frac{l - \alpha k}{k+1}} q^{-\frac{l}{k+1}} \Big) + O\Big(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1} \Big),$$

$$(57)\quad \sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = O(1) + O\Big(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1} \Big) + O\Big(x^{\frac{k}{k+1}} \eta^{\frac{l - \alpha k}{k+1}} q^{-\frac{l}{k+1}} \Big)$$

Ebenso folgt für $l = \alpha k$ wegen $K = O(\log \eta)$

$$(58)\quad \sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = O(1) + O\Big(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1} \Big) + O\Big(x^{\frac{k}{k+1}} \log \eta \, q^{-\frac{\alpha k}{k+1}} \Big).$$

Ist dagegen $l < \alpha k$, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$\delta = (x q^{-\alpha})^{\frac{k}{1 + (\alpha+1)k - l}}$$

nach (55) und (56) wie bei (21)

$$\sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = O(1) + O(\delta) + O\Big(x^{\frac{k}{k+1}} \delta^{\frac{l - \alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}} \Big) + O\Big(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1} \Big),$$

also

$$(59)\quad \sum_{\substack{n \le \eta \\ n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, q)}} \psi\Big(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\Big) = O(1) + O\Big(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1} \Big) + O\Big((x q^{-\alpha})^{\frac{k}{1 + (\alpha+1)k - l}} \Big).$$

(57) bis (59) ergeben die behaupteten Abschätzungen für $R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega)$.

Bei der Herleitung von (22) und (23) haben wir gesehen, daß $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ein Exponentenpaar im Sinne unserer Definition ist. Setzen wir aber in Lemma 5 $(k, l) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, so liefert dies den zweiten Teil unserer Behauptung.

Für $\lambda=2$ erhalten wir das Exponentenpaar $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, welches wir schon in I kennenlernten. Mit diesem folgen nach (44) bis (49) bei Beachtung von (36) aus Lemma 17

$$(60)\quad \begin{cases} S_1(x,q) = \sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{t\mid q}\mu(t)\,R\left(\frac{x}{dt^2}, \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}, 2; 1, 1; 0\right) \\ = O(1)\sum_{d\mid q}\sum_{t\mid q}(1 + x^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}t^{-1} + x^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}\log x) \\ = O(q^{\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{3}}\log x\, q^{\varepsilon}) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi^{\frac{1}{3}}(q)\,q^{-\frac{1}{3}}\right), \\ (q \leq x^{\frac{1}{2}}), \end{cases}$$

$$(61)\quad \begin{cases} S_2(x,q) = \sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{t\mid q}\mu(t)\,R\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{t}}, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}, \frac{1}{2}; 1, 1; 0\right) \\ = O(1)\sum_{d\mid q}\sum_{t\mid q}(1 + x^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}t^{-1} + x^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}) \\ = O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi^{\frac{1}{3}}(q)\,q^{-\frac{1}{3}}\right), \\ (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_3(x,q) &= \sum_{h\leq q}\chi_1(h)\sum_{d\mid q}\mu(d)\,R\left(\frac{x}{qd^2}, \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}, 2; 1, 1; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1)\sum_{h\leq q}\sum_{d\mid q}(1 + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}d^{-1} + x^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{3}}\log x) \\ &= O(q^{1+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{3}}\log x\,q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{3}}\right), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4(x,q) &= \sum_{h\leq q}\chi_1(h)\sum_{d\mid q}\mu(d)\,R\left(\frac{\sqrt{x}}{d}, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}; q, h; 0\right) \\ &= O(1)\sum_{h\leq q}\sum_{d\mid q}(1 + x^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}q^{-1} + x^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}}) \\ &= O(q^{1+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{3}}\right), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5(x,q,\chi) &= \sum_{h\leq q}\chi(h)\sum_{j\leq q}\chi^2(j)\,R\left(\frac{x}{q}, x^{\frac{1}{3}}, 2; q, j; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1)\sum_{h\leq q}\sum_{j\leq q}(1 + x^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\log x\,q^{-\frac{1}{3}}) \\ &= O(q^2) + O(x^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}) + O(x^{\frac{1}{3}}\log x\,q^{\frac{1}{3}}) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{3}}\right), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6(x,q,\chi) &= \sum_{h\leq q}\chi^2(h)\sum_{j\leq q}\chi(j)\,R\left(\frac{\sqrt{x}}{q}, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}; q, j; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1)\sum_{h\leq q}\sum_{j\leq q}(1 + x^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}}) \\ &= O\left(x^{\frac{1}{3}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{3}}\right), \qquad (q \leq x^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Da nach (44) und (45) für jedes positive ε trivialerweise $S_1(x,q)=O(x^{\frac{1}{2}}q^{\varepsilon})$ und $S_2(x,q)=O(x^{\frac{1}{2}}q^{\varepsilon})$ gelten, bleiben die beiden ersten Abschätzungen auch für $q>x^{\frac{1}{2}}$ richtig, so daß aus (52)

$$A_1(x,\chi_0)=\frac{\varphi(q)}{q}\,x\,L(2,\chi_0)+\frac{\varphi(q)}{q}\,x^{\frac{1}{2}}L\left(\frac{1}{2},\chi_0\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\,\varphi^{\frac{1}{2}}(q)\,q^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{62}$$

folgt. Weiter ergibt sich für $q\leq\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ aus (53)

$$A_1(x,\chi_1)=\frac{\varphi(q)}{q}\,x^{\frac{1}{2}}L\left(\frac{1}{2},\chi_1\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}}\right), \tag{63}$$

und wegen der stets gültigen Abschätzung $A_1(x,\chi)=O(x)$ gilt dies auch für $q>\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Schließlich folgt aus (54) für $q\leq x^{\frac{1}{2}}$

$$A_1(x,\chi)=O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}}\right)\quad\text{für}\quad\chi^2\neq\chi_0, \tag{64}$$

was ebenfalls für $q>x^{\frac{1}{2}}$ trivialerweise richtig bleibt.

12. Nun wollen wir $A_2(x,\chi)$ behandeln. Zuvor sei noch bemerkt, daß aus (50)

$$|A_1(\omega,\chi)|\leq\sum_{n\leq\omega}|a_1(n,\chi)|\leq A_1(\omega,\chi_0) \tag{65}$$

folgt.

Nach Lemma 1 haben wir wieder für jeden Charakter χ modulo q, bei $1\leq a\leq\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases}A_2(x,\chi)\\ =\displaystyle\sum_{m^3n\leq x}\chi^3(m)\,a_1(n,\chi)=\sum_{m\leq a}\chi^3(m)\,A_1\left(\frac{x}{m^3},\chi\right)+\sum_{n\leq\frac{x}{a^3}}a_1(n,\chi)\sum_{a<m\leq\sqrt[3]{\frac{x}{n}}}\chi^3(m).\end{cases} \tag{66}$$

Hieraus folgt für einen Charakter χ mit $\chi^2\neq\chi_0$ und $\chi^3\neq\chi_0$ mit (64), (65) und (62)

$$\begin{aligned}A_2(x,\chi)&=O(1)\sum_{m\leq a}x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}\log x\,q^{\frac{1}{2}}+O(q)\,A_1\left(\frac{x}{a^3},\chi_0\right)\\&=O\left(x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\log x\,q^{\frac{1}{2}}\right)+O(x\,a^{-3}q)+O\left(x^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\log x\,\varphi^{\frac{1}{2}}(q)\,q^{\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}$$

also mit

$$a=x^{\frac{1}{10}}\log^{-\frac{3}{10}}x\,q^{-\frac{1}{5}}, \tag{67}$$

falls $q\leq x^{\frac{1}{2}}$ ist (dann ist auch die Bedingung $1\leq a\leq\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ erfüllt),

$$A_2(x,\chi)=O\left(x^{\frac{7}{10}}\log^{\frac{3}{10}}x\,q^{\frac{1}{2}}\right)\quad\text{für}\quad\chi^2\neq\chi_0,\ \chi^3\neq\chi_0; \tag{68}$$

anderenfalls ist jedoch (68) trivialerweise richtig. Weiter haben wir aus (66) nach (38), (64), Lemma 13, (39), wenn wir a wie in (67) wählen, und

zunächst $q \leq x$ voraussetzen, denn dann ist die Bedingung $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$ erfüllt,

$$A_2(x, \chi_2) = O\left(x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right) + \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{n \leq \frac{x}{a^3}} a_1(n, \chi_2) \left(\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{d \sqrt[3]{n}}\right] - \left[\frac{a}{d}\right]\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right) +$$

$$+ O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) - \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} \sum_{n > \frac{x}{a^3}} a_1(n, \chi_2) n^{-\frac{1}{3}} + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_2\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_2^2\right).$$

$$A_2(x, \chi_2) = \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_2\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_2^2\right) + O\left(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{3}{10}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right); \tag{69}$$

für $q > x$ ist (69) wieder trivialerweise richtig. Und aus (66) erhalten wir mit (63), (65) und (62), wenn wir wieder a gemäß (67) wählen, für $q \leq x$ (dann ist $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$)

$$A_2(x, \chi_1) = \sum_{m \leq a} \chi_1^3(m) \left(\frac{\varphi(q)}{q} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{3}}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}} m^{-\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right)\right) +$$

$$+ O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_1^3\right) +$$

$$+ O\left(x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right) + O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$A_2(x, \chi_1) = \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_1^3\right) + O\left(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{3}{10}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}\right). \tag{70}$$

Wir erkennen nachträglich die Richtigkeit von (70) auch für $q > x$.

Jetzt bleibt noch $A_2(x, \chi_0)$ zu bestimmen. Hierfür beweisen wir das

Lemma 18: *Für $\omega \geq q^3$ ist*

$$\sum_{n \leq \omega} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} = L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + \frac{3}{2} \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{2}{3}} L(2, \chi_0) +$$

$$+ 3 \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} \log \omega \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Beweis. Nach Lemma 1, Lemma 13 und Lemma 2 haben wir für $q \leq \omega^{\frac{1}{3}}$

$$\sum_{n \leq \omega} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{\substack{m^3 n \leq \omega \\ (mn, q) = 1}} m^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{2}{3}}} \sum_{m \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{3}}} \sum_{n \leq \frac{\omega}{d t^3 m^3}} n^{-\frac{1}{3}} +$$

$$+ \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{3}}} \sum_{n \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}} n^{-\frac{1}{3}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{2}{3}}} \sum_{\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d} < m \leq \frac{\sqrt{\omega}}{d \sqrt{t} \sqrt{n}}} m^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{2}}} \sum_{m \le \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}} m^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{3}{2}}} \sum_{n \le \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}} n^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(3\left(\frac{\sqrt{\omega}}{d\sqrt{t}\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{3}} - 3\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{d}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\sqrt{\omega}}{d\sqrt{t}\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\sqrt{\omega}}{d\sqrt{t}\sqrt{n}}\right)^{-\frac{2}{3}} + \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{d}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{d}\right)^{-\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. + O\left(\left(\frac{\sqrt{\omega}}{d\sqrt{t}\sqrt{n}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{d}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\right)$$

$$= L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{2}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} q^{1+\varepsilon}\right) + \frac{3}{2}\omega^{\frac{1}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\zeta(2) - \left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-1} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-2} + \right.$$

$$\left. + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-3}\right)\right) - \omega^{-\frac{1}{3}} \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{m \le \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}} \psi\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right) +$$

$$+ 3\omega^{\frac{1}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{\frac{1}{2}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right) -$$

$$- 3\omega^{\frac{1}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\omega^{\frac{1}{3}}}\right)\right) -$$

$$- \omega^{-\frac{1}{3}} \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{n \le \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}} \psi\left(\frac{\sqrt{\omega}}{d\sqrt{t}\sqrt{n}}\right) + \omega^{-\frac{1}{3}} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \sum_{d|q} \mu(d) \times$$

$$\times \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{d}\right)\left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\omega^{\frac{1}{3}}}\right)\right),$$

also mit (44) und (45)

$$\sum_{n \le \omega} a_1(n, \chi_0)\, n^{-\frac{1}{3}} = L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} q^{1+\varepsilon}\right) -$$

$$- \omega^{-\frac{1}{3}}\left(S_1(\omega, q) + S_2(\omega, q)\right) + \frac{3}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\omega^{\frac{1}{3}} L(2, \chi_0) + 3\frac{\varphi(q)}{q}\omega^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right),$$

so daß jetzt mit (60) und (61) unsere Behauptung folgt.

Nun ist hier nach (66) und Lemma 13

$$A_2(x, \chi_0) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{m \le \frac{a}{d}} A_1\left(\frac{x}{d^3 m^3}, \chi_0\right) + \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{n \le \frac{x}{a^3}} a_1(n, \chi_0) \left(\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{d\sqrt[3]{n}}\right] - \left[\frac{a}{d}\right]\right),$$

und daher erhalten wir mit (62), Lemma 2 und Lemma 18 für $x a^{-3} = \omega \geqq q^3$ (dann wird auch $1 \leqq a \leqq \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}}$ sein)

$$\begin{aligned}
A_2(x, \chi_0) = &\sum_{d|q} \mu(d) \sum_{m \leqq \frac{a}{d}} \Big(\frac{\varphi(q)}{q} \frac{x}{d^3 m^3} L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) + \\
&+ O\big(x^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \log x \, \varphi^{\frac{1}{6}}(q) \, q^{-\frac{1}{2}}\big)\Big) \\
&+ O(q^\varepsilon)\,(x a^{-3} + x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} \log x \, \varphi^{\frac{1}{6}}(q) \, q^{-\frac{1}{2}}) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} \sum_{n \leqq \frac{x}{a^3}} a_1(n, \chi_0) \, n^{-\frac{1}{3}} - \\
&- \frac{\varphi(q)}{q} a \Big(\frac{\varphi(q)}{q} x a^{-3} L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) + \\
&+ O\big(x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} \log x \, \varphi^{\frac{1}{6}}(q) \, q^{-\frac{1}{2}}\big)\Big) \\
= &\frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^3} \Big(\zeta(3) - \frac{1}{2} \Big(\frac{a}{d}\Big)^{-2} + O\big(a^{-3} d^3\big)\Big) + \\
&+ \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{3}{2}}} \Big(\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big) - 2\Big(\frac{a}{d}\Big)^{-\frac{1}{2}} + O\big(a^{-\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}}\big)\Big) + \\
&+ O\big(x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} \log x \, \varphi^{\frac{1}{6}}(q) \, q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\big) \\
&+ O(x a^{-3} q^\varepsilon) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\frac{1}{3}, \chi_0\Big) L\Big(\frac{2}{3}, \chi_0\Big) + \frac{3}{2} \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x a^{-2} L(2, \chi_0) + \\
&+ 3 \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) - \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x a^{-2} L(2, \chi_0) - \\
&- \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) \\
= &\frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) L(3, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\frac{1}{2}, \chi_0\Big) L\Big(\frac{3}{2}, \chi_0\Big) + \\
&+ \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\frac{1}{3}, \chi_0\Big) L\Big(\frac{2}{3}, \chi_0\Big) + \\
&+ O\big(x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} \log x \, \varphi^{\frac{1}{6}}(q) \, q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\big) + O(x a^{-3} q^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Wenn wir hier

$$a = x^{\frac{7}{16}} \log^{-\frac{3}{16}} x \, \varphi^{-\frac{1}{3}}(q) \, q^{-\frac{1}{3}}$$

wählen, haben wir endlich mit $\varepsilon = \frac{3}{8}$ für $x a^{-3} \geqq q^3$, aber trivialerweise auch für $q^3 > x a^{-3}$,

$$(71) \quad \begin{cases} A_2(x, \chi_0) = \dfrac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) L(3, \chi_0) + \dfrac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\dfrac{1}{2}, \chi_0\Big) L\Big(\dfrac{3}{2}, \chi_0\Big) + \\ \qquad + \dfrac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\Big(\dfrac{1}{3}, \chi_0\Big) L\Big(\dfrac{2}{3}, \chi_0\Big) + O\big(x^{\frac{7}{16}} \log^{\frac{13}{16}} x \, \varphi(q) \, q^{\frac{1}{2}}\big). \end{cases}$$

13. Nun zur Bestimmung von $A_0(x,\chi)$. Nach (40), (41) und (35) ist für jeden Charakter χ

$$A_0(x,\chi)=\sum_{mn\le x} a_2(m,\chi)\,a_3(n,\chi)=\sum_{n\le x} a_3(n,\chi)\,A_2\Big(\frac{x}{n},\chi\Big).$$

Hieraus folgt wegen Lemma 16 für $\chi^2\neq\chi_0$, $\chi^3\neq\chi_0$ mit (50) und (68)

$$(72)\quad \begin{cases} A_0(x,\chi)=O(1)\,x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,q^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n\le x} a_3(n,\chi_0)\,n^{-\frac{9}{10}} \\ \qquad\qquad =O(x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,q^{\frac{1}{2}}), \qquad \chi^2\neq\chi_0,\ \chi^3\neq\chi_0, \end{cases}$$

mit (69), (50), (41) und (43)

$$A_0(x,\chi_2)=\frac{\varphi(q)}{q}\,x^{\frac{1}{3}}L\Big(\frac{1}{3},\chi_2\Big)L\Big(\frac{2}{3},\chi_2^2\Big)\sum_{n\le x} a_3(n,\chi_2)\,n^{-\frac{1}{3}}+$$

$$+O(1)\,x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}}\sum_{n\le x} a_3(n,\chi_0)\,n^{-\frac{9}{10}},$$

$$(73)\qquad A_0(x,\chi_2)=\frac{\varphi(q)}{q}\,c_3(\chi_2)\,x^{\frac{1}{3}}+O(x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}})$$

und ebenso mit (70)

$$(74)\qquad A_0(x,\chi_1)=\frac{\varphi(q)}{q}\,c_2(\chi_1)\,x^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}})$$

und mit (71)

$$(75)\quad \begin{cases} A_0(x,\chi_0)=\dfrac{\varphi(q)}{q}\,c_1(\chi_0)\,x+\dfrac{\varphi(q)}{q}\,c_2(\chi_0)\,x^{\frac{1}{2}}+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{\varphi(q)}{q}\,c_3(\chi_0)\,x^{\frac{1}{3}}+O(x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,\varphi(q)\,q^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, und wir beweisen den

Satz 5: *Es seien l und q zwei natürliche Zahlen, $1\le l\le q$, $q\ge 2$, $(l,q)=1$, $a_0(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen* ABELschen *Gruppen der Ordnung n, $\chi_0,\chi_1,\chi_2,\chi$ Charaktere modulo q, χ_0 der Hauptcharakter, χ_1, falls er existiert, derjenige Charakter mit $\chi_1^2=\chi_0$, $\chi_1\neq\chi_0$, mit χ_2 seien, falls sie existieren, diejenigen Charaktere modulo q bezeichnet, für die $\chi_2^3=\chi_0$, $\chi_2\neq\chi_0$ ist,*

$$c_\mu(\chi)=\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{\infty} L\Big(\frac{\nu}{\mu},\chi^\nu\Big),\quad \mu=1,2,3,$$

$$d(\chi_1)=\begin{cases}\bar\chi_1(l)\,c_2(\chi_1) & \text{für } q\ge 3,\\ 0 & \text{für } q=2,\end{cases}\qquad d(\chi_2)=\begin{cases}\sum\limits_{\chi_2}\bar\chi_2(l)\,c_3(\chi_2) & \text{für } \varphi(q)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3),\\ 0 & \text{für } \varphi(q)\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3).\end{cases}$$

Dann gilt für $x\to\infty$ gleichmäßig in q und l

$$(76)\quad \begin{cases} A_0(x;q,l)=\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,q)}} a_0(n) \\ =c_1(\chi_0)\dfrac{x}{q}+c_2(\chi_0)\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{q}+c_3(\chi_0)\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{q}+d(\chi_1)\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{q}+d(\chi_2)\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{q}+O(x^{\frac{1}{10}}\log^{\frac{7}{10}}x\,q^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Beweis. Wir beachten

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\,A_0(x,\chi)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{h\le q}\left(\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\,\chi(h)\right)\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv h\,(\mathrm{mod}\,q)}}a_0(n)=A_0(x;q,l)$$

und erhalten dann aus (72) bis (75), wenn wir bemerken, daß der Hauptcharakter χ_0 genau einmal, der Charakter χ_1 für $\varphi(q)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, d.h. für $q\geqq 3$, genau einmal, für $q=2$ aber nicht auftritt, und die beiden Charaktere χ_2 genau im Falle $\varphi(q)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ in obiger Summe über alle Charaktere modulo q vorkommen,

$$A_0(x;q,l)=c_1(\chi_0)\,\frac{x}{q}+c_2(\chi_0)\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{q}+c_3(\chi_0)\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q}+$$
$$+d(\chi_1)\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q}+d(\chi_2)\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{q}+O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\,q^{\frac{1}{5}}\right),$$

so daß unser Satz bewiesen ist.

Im Fehlerglied von (76) hätten wir den Exponenten $\frac{8}{5}$ von q noch kleiner machen können, wenn wir in (62) bis (64) und (68) bis (71) statt eines mehrere Fehlerglieder aufgeschrieben und diese dann bis zum Schluß mitgeschleppt hätten. Doch wären dann die Rechnungen noch umfangreicher geworden.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 20. Dezember 1952.)

TILLMANN, H. G.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 85—97 (1953)

Spektraltheoriefreie Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum.

Von

HEINZ GÜNTHER TILLMANN.

Einleitung.

Einen Ausgangspunkt für die Entwicklung der Theorie des HILBERTschen Raumes bildeten die linearen Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{k} a_{ik} x_k = y_i \tag{1}$$

oder

$$A\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}. \tag{1'}$$

D. HILBERT[1]) löste das Gleichungsproblem für den Fall einer vollstetigen Matrix, indem er zeigte, daß jedes solche Gleichungssystem durch unitäre Umformungen auf eine Diagonalform gebracht werden kann.

Bei beschränkten Operatoren ist die Diagonalform durch unitäre Umformungen im allgemeinen nicht zu erreichen. Die nächsteinfachste Form der Matrix ist diejenige, bei der außer der Hauptdiagonalen nur die erste untere Schrägzeile besetzt ist. W. SCHMEIDLER[2]) hat gezeigt, daß diese Form der Matrix (abgesehen von Nullzeilen und Nullspalten) bei beschränkten Operatoren stets durch unitäre Umformungen erhalten werden kann. Da bei der SCHMEIDLERschen Konstruktion die Elemente in der Hauptdiagonalen sämtlich ungleich Null werden, lassen sich die zugehörigen linearen Gleichungssysteme in einfacher Weise rekursiv auflösen.

Der Versuch SCHMEIDLERs[3]), diese Ergebnisse auf eine allgemeinere Klasse von Operatoren („unbeschränkt iterierbare Operatoren") zu übertragen, führte zu keiner echten Verallgemeinerung, wie im § 1 dieser Arbeit gezeigt wird. Die SCHMEIDLERsche Normalform wird dann jedoch unter Benutzung von Resultaten, die wir J. DIXMIER[4]) verdanken, im folgenden für beliebige ab-

[1]) HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. 4. Mitt. Göttinger Nachr. **1906**, 157—227.
Das von HILBERT für den symmetrischen Fall angegebene Verfahren läßt sich bei Benutzung zweier v. O. S. unmittelbar auf den nichtsymmetrischen Fall übertragen.

[2]) SCHMEIDLER, W.: Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen. J. reine angew. Math. **163**, 135—140 (1930).

[3]) SCHMEIDLER, W.: Über unbeschränkt iterierbare Operatoren. J. reine angew. Math. **187**, 109—114 (1950).

[4]) DIXMIER, J.: Position relative de deux variétés lineaires fermées dans un espace de Hilbert. Rev. sci. **86**, 387—399 (1948).

geschlossene Operatoren gewonnen. (Eine Übertragung auf noch allgemeinere Operatoren ist nicht mehr möglich, da jede zeilenfinite Matrix einen abgeschlossenen Operator definiert, wenn nicht der Definitionsbereich durch zusätzliche Bedingungen eingeschränkt wird.) Die so gefundenen Normalformen sind nicht in jedem Falle endgültig, sondern können unter Umständen noch auf Diagonalform gebracht werden. Es ist jedoch nicht in einfacher Weise zu entscheiden, ob zwei Normalformen ineinander übergeführt werden können oder nicht.

In dieser Hinsicht gelangte G. KÖTHE[5]) zu sehr übersichtlichen und abschließenden Ergebnissen. Mittels topologischer (= intakter) linearer Transformationen Q', Q'' führt er die Gleichung $A\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ zurück auf die äquivalente Gleichung $Q'A\,Q''\mathfrak{x}' = \mathfrak{y}'$, zu der dann im wesentlichen eine Diagonalmatrix gehört. Die Beweise KÖTHEs machen wesentlich von der Spektraltheorie Gebrauch. Wir leiten nun in § 3 und § 4 die KÖTHEschen Resultate völlig spektraltheoriefrei her, wobei an analytischen Begriffen nur noch soviel benutzt wird, wie sich aus der Forderung der Vollständigkeit des Raumes unmittelbar ergibt.

Die Klasse der abgeschlossenen Operatoren ist aber für viele Fragen noch zu eng, da man sowohl durch die Addition wie auch durch die Multiplikation über diesen Bereich herausgeführt wird. Man gelangt durch die Ausführung dieser Operationen zu den JULIAschen Operatoren[6]). Um auch für diese allgemeinere Klasse von Operatoren eine sinnvolle Gleichungstheorie entwickeln zu können, erweist es sich als notwendig, auch allgemeinere als topologische lineare Transformationen zur Umformung zuzulassen. Andernfalls wäre es nämlich unmöglich, zeilenfinite Normalformen zu erhalten. Es gelingt dann aber, auch für beliebige JULIAsche Operatoren A die Gleichung $A\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ auf ein Gleichungssystem mit einer Diagonalmatrix zurückzuführen durch Transformationen

$$\mathfrak{y}' = U\,\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{x} = S\,\mathfrak{x}',$$

wobei U unitär, S eineindeutig und stetig (= beschränkt) ist und der Wertbereich von S mit dem Definitionsbereich von A übereinstimmt.

Im folgenden ist $\mathfrak{H}$ ein (nicht notwendig separabler) HILBERTscher Raum mit dem inneren Produkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. $\{\mathfrak{M}\}$ ist die kleinste Linearmannigfaltigkeit, die $\mathfrak{M}$ enthält und $\overline{\mathfrak{M}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{D}_A$ und $\mathfrak{W}_A$ sind Definitions- bzw. Wertbereich eines linearen Operators A und $\mathfrak{N}_A$ ist die Gesamtheit aller Vektoren für die $A\,\mathfrak{x} = 0$ ist. A^* ist die Adjungierte der linearen Transformation A[7]).

[5]) KÖTHE, G.: Gleichungstheorie im HILBERTschen Raum. Math. Z. **41**, 153—162 (1936).

[6]) DIXMIER, J.: Étude sur les variétés et les operateurs de Julia, avec quelques applications. Bull. Soc. Math. France **77**, 11—101 (1949).

[7]) NAGY, B. v. Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes. Ergebn. Math. **5**, H. 5, 28 (1941).

§ 1. Unbeschränkt iterierbare Operatoren.

Für beschränkte Operatoren hat W. SCHMEIDLER[8]) einfache Normaldarstellungen durch zweistreifige Matrizen angegeben, die eine rekursive Lösung der zugehörigen Gleichungssysteme gestatten. Er bewies mit rein algebraischen Methoden:

(1, I) Zu jedem beschränkten Operator A gibt es zwei v.O.S. $\{\mathfrak{e}_i^0, \mathfrak{e}_k\}$ und $\{\bar{\mathfrak{e}}_j^0, \bar{\mathfrak{e}}_k\}$ in $\mathfrak{H}$, so daß der Operator A bestimmt ist durch die Beziehungen

$$A\,\mathfrak{e}_i^0 = 0,$$

$$A\,\mathfrak{e}_k = a_k\,\bar{\mathfrak{e}}_k + b_k\,\bar{\mathfrak{e}}_{k+1}$$

mit $a_k > 0$, $b_k \geqq 0$.

[i, j, k durchlaufen Mengen von Ordnungszahlen $i < i_0, j < j_0, k < k_0$, wobei für die Ordnungszahlen i_0, j_0, k_0 gilt $|i_0 + k_0| = |j_0 + k_0| = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H})$.]

Für den adjungierten Operator A^* gilt dann

$$A^*\,\bar{\mathfrak{e}}_j^0 = 0$$

$$A^*\,\bar{\mathfrak{e}}_k = b_{k-1}\,\mathfrak{e}_{k-1} + a_k\,\mathfrak{e}_k.$$

(Das Glied $b_{k-1}\,\mathfrak{e}_{k-1}$ entfällt, falls k Null oder eine Limeszahl ist.)

Für selbstadjungierte, beschränkte Operatoren kommt SCHMEIDLER mit einem einzigen v.O.S. $\{\mathfrak{e}_k\}$ auf die Normalform

$$(A\,\mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_i) = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 \cdots \\ \vdots & 0 & b_3 & a_4 & b_4 \;\; 0 \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix} \end{array}\right| \quad \begin{matrix} i, k < k_0 \\ |k_0| = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H}). \end{matrix}$$

Ist eines der b_i Null, so wird eine endliche Teilmatrix abgespalten, die noch auf Diagonalform gebracht werden kann. Dann lassen sich aber aus dem zum Eigenwertproblem $A\,\mathfrak{x} = \lambda\,\mathfrak{x}$ gehörigen linearen Gleichungssystem

$$b_i\,x_{i+1} + (a_i - \lambda)\,x_i + b_{i-1}\,x_{i-1} = 0$$

die Koordinaten x_i rekursiv bestimmen. λ ist Eigenwert, wenn für eine Limeszahl i_0 und $x_{i_0} \neq 0$ $\sum\limits_{i_0 \leq i < i_0 + \omega} |x_i|^2$ konvergiert. $\mathfrak{x} = \sum\limits_{i_0}^{i_0+\omega} x_i\,\mathfrak{e}_i$ ist dann zugehöriger Eigenvektor von A.

SCHMEIDLER[9]) führte nun den Begriff des „unbeschränkt iterierbaren Operators" ein und bewies die obigen Ergebnisse auch für diese Klasse von

[8]) SCHMEIDLER, W.: a. a. O. [3]).

[9]) SCHMEIDLER, W.: a. a. O. [3]).

Operatoren. Es wird jedoch im folgenden gezeigt, daß alle unbeschränkt iterierbaren Operatoren auch beschränkt sind.

Definition 1[9]). *Ein linearer Operator A mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ heißt unbeschränkt iterierbar, wenn A einen adjungierten Operator A^* besitzt, so daß gilt*

1. $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A^*}$; $\quad A^*(\mathfrak{D}_{A^*}) \subseteq \mathfrak{D}_A$,
2. *A und A^* sind dicht definiert.*

Es gilt nun aber der

Satz 1: *Sind für A und die Adjungierte A^* die Iterierbarkeitsbedingungen 1. und 2. von Definition 1 erfüllt, so sind A und A^* beschränkt.*

Beweis. Sei $B = A^{**}A^* + 1$. Dann gilt

$$(B\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (A^*\mathfrak{x}, A^*\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}),$$

also auch

$$\frac{|B\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \geq \frac{(B\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}{|\mathfrak{x}|^2} \geq 1.$$

B ist also eineindeutig und es gilt $\|B^{-1}\| \leq 1$. Da B abgeschlossen und hermitesch ist, muß B^{-1} abgeschlossen und überall definiert sein. Sei nun $\mathfrak{y}$ beliebig in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{x} = B^{-1}\mathfrak{y}$, also $\mathfrak{y} = A^{**}A^*\mathfrak{x} + \mathfrak{x}$. Aus den Iterierbarkeitsbedingungen folgt nun $\mathfrak{y} \in \mathfrak{D}_{A^*}$, da A^{**} Fortsetzung von A ist. A^* ist also abgeschlossen und überall sinnvoll und darum nach einem Satz von HELLINGER und TOEPLITZ[10]) beschränkt. Aus $|A\mathfrak{x}|^2 = (A^*A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leq \|A^*\| \cdot |A\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{x}|$ folgt dann auch die Beschränktheit von A.

Weiter gilt noch

Satz 2: *Ist A abgeschlossen, A' eine Einschränkung der Adjungierten A^* und gilt die Iterierbarkeitsbedingung $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A'}$, $A'(\mathfrak{D}_{A'}) \subseteq \mathfrak{D}_A$, so ist A beschränkt.*

Beweis. Analog wie bei Satz 1 ergibt sich, daß $(A^*A + 1)^{-1}$ überall sinnvoll, also $\mathfrak{H} = (A^*A + 1)(\mathfrak{D}_{A^*A}) \subseteq \mathfrak{D}_A$ ist. A ist also auch überall sinnvoll und darum beschränkt.

Es soll nun gezeigt werden, daß die SCHMEIDLERsche Konstruktion nicht immer zum Ziele führt, wenn nur für eine Einschränkung A' der Adjungierten A^* die Iterierbarkeitsbedingungen $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A'}$, $A'(\mathfrak{D}_{A'}) \subseteq \mathfrak{D}_A$ erfüllt sind.

Beispiel. Sei $\mathfrak{H}$ ein separabler HILBERTscher Raum und $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$, $\bar{\mathfrak{e}}_0, \bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \ldots$ zwei v.O.S. in $\mathfrak{H}$. Die Vektoren

$$\mathfrak{x}_0 = \sum_0^\infty x_k^0 \mathfrak{e}_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathfrak{e}_0 + \sum_1^\infty (-1)^k \frac{\sqrt{2^{k+1} - 2}}{2^{k+1}}\,\mathfrak{e}_k,$$

$$\mathfrak{y}_0 = \sum_0^\infty y_k^0 \bar{\mathfrak{e}}_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\bar{\mathfrak{e}}_0 + \sum_1^\infty (-1)^k 2^{-k} \bar{\mathfrak{e}}_k$$

[10]) HELLINGER, E, u. O. TOEPLITZ: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. **69**, 289—330 (1910).

sind beide vom Betrage 1. In den Linearmannigfaltigkeiten $\mathfrak{D} = \{e_1, e_2, \ldots, \mathfrak{x}_0\}$ bzw. $\mathfrak{D}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \mathfrak{y}_0\}$ definieren wir nun Operatoren A bzw. A' durch die Festsetzungen

$$A e_k = a_k \bar{e}_k + b_k \bar{e}_{k+1}; \qquad a_k = b_k = \sqrt{2^{k+1} - 2}, \qquad k > 0,$$

$$A \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{y}_0,$$

$$A' \bar{e}_k = b_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k,$$

$$A' \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{x}_0.$$

A und A' sind zueinander adjungiert, denn es ist $(A \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, A' \mathfrak{y})$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{y} \in \mathfrak{D}'$. Weiterhin sind die Iterierbarkeitsbedingungen $A(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}'$ und $A'(\mathfrak{D}') \subseteq \mathfrak{D}$ erfüllt. Beginnt man nun die SCHMEIDLERsche Konstruktion mit

$$u_1 = \bar{e}_1,$$

so erhält man offenbar

$$v_1 = \frac{A' u_1}{|A' u_1|} = e_1,$$

$$u_2 = \frac{A v_1 - (A v_1, u_1) u_1}{|A v_1 - (A v_1, u_1) u_1|} = \bar{e}_2$$

und so weiter fort

$$u_k = \bar{e}_k, \qquad v_k = e_k.$$

Die so gewonnenen O.S. $\{e_k\}_{k>0}$ und $\{\bar{e}_k\}_{k>0}$ lassen sich aber innerhalb der Definitionsbereiche $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}'$ sicherlich nicht mehr vervollständigen.

Ein ähnliches und noch einfacheres Beispiel läßt sich für den selbstadjungierten Fall angeben.

§ 2. Finite Darstellung abgeschlossener Operatoren.

Das SCHMEIDLERsche Verfahren zur Konstruktion einer einfachen finiten Darstellung läßt sich auf alle abgeschlossenen Operatoren übertragen, indem man die Vektoren, die bei SCHMEIDLER noch weitgehend willkürlich sind, in einer genauer festgelegten Weise auswählt.

Für die folgenden Überlegungen ist der Begriff der „direkten Summe" von Operatoren wesentlich, die in Analogie zur direkten Summe von Matrizen[11]) gebildet wird:

Definition 2. *Sei A_i eine Menge von Operatoren, für die $\mathfrak{D}_{A_i} \perp \mathfrak{D}_{A_j}$ und $\mathfrak{W}_{A_i} \perp \mathfrak{W}_{A_j}$ falls $i \neq j$. Dann ist die direkte Summe $A = \sum_i \oplus A_i$ definiert für alle Vektoren $\mathfrak{x} = \sum \mathfrak{x}_i$ mit $\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{D}_{A_i}$, für die $\sum A_i \mathfrak{x}_i$ konvergiert, durch $A \sum \mathfrak{x}_i = \sum A_i \mathfrak{x}_i$.*

Man erhält offenbar eine Matrixdarstellung einer direkten Summe von Operatoren, indem man die direkte Summe der Matrizen bildet, die die einzelnen Operatoren darstellen. Unter Benutzung von Ergebnissen von J. DIXMIER läßt sich zeigen, daß jeder abgeschlossene Operator in eine direkte Summe

[11]) MACDUFFEE, C. C.: The Theorie of Matrices. Ergebn. Math. **2**, H. 5 (1933).

beschränkter Operatoren zerlegt werden kann. Die für uns entscheidenden Theoreme DIXMIERs sind die folgenden[12]):

(2, I) *Jeder abgeschlossene Operator A ist zerlegbar in ein Produkt $A = JB$, wobei B selbstadjungiert und nichtnegativ, J isometrisch ist mit*

$$\mathfrak{D}_J = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_A = \overline{\mathfrak{W}}_{A^*} \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_J = \overline{\mathfrak{W}}_A.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

(2, II) *Zu jedem selbstadjungierten Operator A gibt es zwei orthogonal-komplementäre Teilräume $\mathfrak{H}^+, \mathfrak{H}^-$ derart, daß A durch $\mathfrak{H}^+$ reduziert wird und gilt:*

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in \mathfrak{H}^+; \qquad (A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leq 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in \mathfrak{H}^-.$$

$P_{\mathfrak{H}^+}$ ist vertauschbar mit jedem mit A vertauschbaren Projektionsoperator. $\mathfrak{H}^+$ und $\mathfrak{H}^-$ sind eindeutig bestimmt.

Diese beiden Theoreme sind zwar nicht völlig neu, doch konnte man sie bisher nur unter Benutzung der vollen Spektraltheorie herleiten. DIXMIER gelingt es unter wesentlicher Benutzung des Begriffs des „Bildes" („Graphen") eines Operators, den er in geeigneter Weise verallgemeinert, durch Überlegungen, die von jeder Analysis frei sind, diese beiden Sätze zurückzuführen auf den folgenden Satz:

(2, III) *Jeder beschränkte, selbstadjungierte, positive Operator A besitzt genau eine selbstadjungierte, positive Quadratwurzel B. B ist vertauschbar mit jedem mit A vertauschbaren selbstadjungierten Operator.*

Bei dem von F. J. WECKEN[13]) gegebenen Beweis dieses Satzes wird außer algebraischen Begriffen nur die Konvergenz von Folgen von Vektoren des HILBERT-Raumes benutzt, wie sie sich aus der Dreiecksungleichung und der Vollständigkeit des Raumes unmittelbar ergibt. Dies ist also auch die einzige nicht rein algebraische Grundlage der Ergebnisse DIXMIERs.

Aus (2, II) erhalten wir nun den

Satz 3: *Jeder selbstadjungierte Operator A ist direkte Summe eines Nulloperators und höchstens abzählbar unendlich vieler intakter selbstadjungierter Operatoren A_n^+, A_n^- mit*

$$2^n < A_n^+ \leq 2^{n+1}, \qquad 2^n < -A_n^- \leq 2^{n+1}.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis. Nach (2, II) erhalten wir eine Zerlegung $A = A^0 \oplus A^+ \oplus A^-$. Es genügt nun offenbar, für den positiven Teil A^+ die Zerlegung anzugeben, da sie für den negativen Teil A^- in ganz analoger Weise erhalten werden kann.

Da mit A^+ auch $A^+ - \lambda$ selbstadjungiert ist, gibt es zwei eindeutig bestimmte orthogonal-komplementäre Teilräume $\mathfrak{H}_\lambda^+, \mathfrak{H}_\lambda^-$, so daß $A^+ > \lambda$ in $\mathfrak{H}_\lambda^+$, $A^+ \leq \lambda$ in $\mathfrak{H}_\lambda^-$ ist, wobei die Projektionen $P_{\mathfrak{H}_\lambda^+}$ mit A und untereinander ver-

[12]) a. a. O. [4]), Theorem 7 und Theorem 8.

[13]) WECKEN, F. J.: Zur Theorie linearer Operatoren. Math. Ann. **110**, 722—725 (1935), insbesondere die Anmerkung bei der Korrektur.

tauschbar sind. Es sei nun $\lambda_n = 2^n$ $(-\infty < n < +\infty)$ und

$$\mathfrak{H}^+_{(n)} = {}_{Df}\, \mathfrak{H}^+_{2^n} \cap \mathfrak{H}^-_{2^{n+1}} = \mathfrak{H}^+_{2^n} \ominus \mathfrak{H}^+_{2^{n+1}}.$$

Ist A^+_n die Einschränkung von A auf $\mathfrak{H}^+_{(n)}$ so gilt:

1. A wird durch $\mathfrak{H}^+_{(n)}$ reduziert,
2. $2^n < A^+_n \leq 2^{n+1}$.

Es ergibt sich nun auch leicht, daß A^+ direkte Summe der A^+_n ist, denn es gilt mit $P_n = P_{\mathfrak{H}^+_{(n)}}$.

$$A^+ \mathfrak{x} = \sum P_n A^+ \mathfrak{x} = \sum A^+ P_n \mathfrak{x} = \sum A^+_n P_n \mathfrak{x} = (\sum \oplus A^+_n)\, \mathfrak{x}$$

für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}_{A^+}$, also $A^+ \subseteqq \sum \oplus A^+_n$. Die Umkehrung ist wegen der Abgeschlossenheit von A^+ trivial. Da die Eindeutigkeit der Zerlegung sich unmittelbar aus der Eindeutigkeitsaussage von (2, II) ergibt, ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Für abgeschlossene Operatoren läßt sich unter Benutzung von (2, I) eine ganz entsprechende Zerlegung gewinnen.

Satz 4: *Jeder abgeschlossene Operator B ist direkte Summe eines Nulloperators und höchstens abzählbar vieler beschränkter Operatoren B_n, die den Bedingungen $2^n < \frac{|B_n \mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \leq 2^{n+1}$ genügen. Die Zerlegung ist hierdurch eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $B = JA$ (J isometrisch, A selbstadjungiert und ≥ 0) und sei $B_n = JA^+_n$, wo A^+_n die Bedeutung wie in Satz 3 hat. Offenbar ist dann B direkte Summe der B_n. Da für A^+_n aus Satz 3 auch folgt $2^n < \frac{|A^+_n \mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \leq 2^{n+1}$, gilt die gleiche Abschätzung für B_n. Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt unmittelbar aus den Eindeutigkeitsaussagen von Satz 3 und (2, I).

Für die einzelnen Operatoren B_n kann nun die SCHMEIDLERsche zweistreifige Matrixdarstellung erhalten werden. Der Operator B ist dann vollständig bestimmt durch die Relationen

$$B \mathfrak{e}^0_k = 0,$$

$$B \mathfrak{e}_{nk} = a_{nk} \bar{\mathfrak{e}}_{n,k} + b_{nk} \bar{\mathfrak{e}}_{n,k+1}.$$

Hieraus erhält man nun das folgende Resultat für die Gleichungstheorie:

Die Gleichung

$$B \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{y} = \sum_k y^0_k \bar{\mathfrak{e}}^0_k + \sum_n \sum_k y_{nk} \bar{\mathfrak{e}}_{n,k} = \mathfrak{y}^0 + \sum_n \mathfrak{y}_n$$

ist dann und nur dann auflösbar, wenn

1. $y^0_k = 0$ für alle k, d.h. $\mathfrak{y}^0 = 0$ und
2. $\sum_n 2^{-2n} \sum_k |y_{nk}|^2 < \infty$, d.h. $\sum_n 2^{-2n} |\mathfrak{y}_n|^2 < \infty$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man alle Lösungen in der Form

$$\mathfrak{x} = \sum x^0_k \mathfrak{e}^0_k + \sum_n \sum_k x_{nk} \mathfrak{e}_{nk} = \mathfrak{x}^0 + \sum_n \mathfrak{x}_n$$

mit $\sum |x_k^0|^2 < \infty$ (x_k^0 sonst beliebig) und

$$x_{n,k+1} = a_{n,k+1}^{-1}\{y_{n,k+1} - b_{nk}\, x_{nk}\}.$$

Für selbstadjungierte Operatoren erhält man aus der Zerlegung in selbstadjungierte, beschränkte, direkte Summanden unter Benutzung der SCHMEIDLERschen Konstruktion eine Darstellung durch dreistreifige JACOBIsche Matrizen, die für die Behandlung des Eigenwertproblems $A\,\mathfrak{x} = \lambda\,\mathfrak{x}$ geeignet ist. A ist dann bestimmt durch die Relationen

$$A\,\mathfrak{e}_k^0 = 0$$

$$A\,\mathfrak{e}_{nk}^{\pm} = b_{nk-1}^{\pm}\,\mathfrak{e}_{nk-1}^{\pm} + a_{nk}^{\pm}\,\mathfrak{e}_{nk}^{\pm} + b_{nk}^{\pm}\,\mathfrak{e}_{nk+1}^{\pm}.$$

Das Eigenwertproblem führt auf das Gleichungssystem

$$b_{n,k}^{\pm}\, x_{n,k+1}^{\pm} + (a_{n,k}^{\pm} - \lambda)\, x_{n,k}^{\pm} + b_{n,k-1}^{\pm}\, x_{n,k-1}^{\pm} = 0,$$

das stets rekursiv auflösbar ist, da aus $b_{n,i} = 0$ auch $b_{n,i-1} = 0$ folgt. λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn für das n mit $2^n < \pm\lambda \leq 2^{n+1}$ und eine geeignete Limeszahl k_0 $\sum\limits_{k_0 \leq k < k_0+\omega} |x_{n,k}^{+}|^2$ oder $\sum\limits_{k_0 \leq k < k_0+\omega} |x_{n,k}^{-}|^2$ mit $x_{n,k_0}^{\pm} \neq 0$ konvergiert.

Es sind damit für beliebige abgeschlossene Operatoren Normalformen gewonnen worden, die die rekursive Auflösung der zugehörigen Gleichungen ermöglichen und einen Überblick über die Lösungsmannigfaltigkeiten und den Wertbereich des Operators liefern.

Es ist jedoch nicht in einfacher Weise zu entscheiden, ob sich eine so gefundene Normalform noch weiter vereinfachen und etwa auf Diagonalgestalt bringen läßt.

Zu endgültigen Normalformen gelangt man, wenn man zur Umformung nicht nur unitäre Operatoren, d.h. Übergang zu neuen v.O.S., sondern eine allgemeinere Klasse von Operatoren zuläßt. Man gelangt dann zu einer zweiten Form der Gleichungstheorie, die in den beiden folgenden Paragraphen behandelt wird.

§ 3. Affine Transformation der quadratischen Formen.

Jede endliche symmetrische Matrix bzw. jede quadratische Form in endlich vielen Unbekannten läßt sich bekanntlich durch affine Transformation auf eine Diagonalform bringen, derart, daß die Diagonalelemente nur die Werte 0, $+1$, -1 annehmen. Die Vielfachheiten dieser Werte bilden ein vollständiges affines Invariantensystem.

Unter Benutzung der Spektraltheorie gelang G. KÖTHE[14]) eine sinngemäße Übertragung dieser Ergebnisse auf selbstadjungierte Operatoren bzw. quadratische Formen im HILBERTschen Raum. Diese Resultate lassen sich nun auf Grund der DIXMIERschen Ergebnisse (2, I) und (2, II) völlig spektraltheoriefrei herleiten.

[14]) KÖTHE, G.: Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im HILBERTschen Raum. Math. Z. 41, 137—152 (1936).

Definition 3. *Zwei Operatoren A und B heißen zueinander affin, wenn es eine intakte (= topologische) lineare Transformation Q des Raumes gibt, so daß gilt:* $A = Q^* B Q$.

Die Affinität ist eine Äquivalenzrelation und aus abgeschlossenen bzw. selbstadjungierten Operatoren gehen durch affine Transformation nur wieder abgeschlossene bzw. selbstadjungierte Operatoren hervor. Der erste Teil der KÖTHEschen Ergebnisse, den wir hier neu beweisen, lautet:

Satz 5: *Jeder selbstadjungierte Operator A ist affin zu einem Diagonaloperator D, und zwar gilt*

$$A = Q^* D Q$$

wobei Q selbstadjungiert, positiv, intakt und mit A und D vertauschbar ist. D hat also den gleichen Definitions- und Wertbereich wie A[15]).

Beweis. Nach Satz 3 können wir jeden selbstadjungierten Operator A schreiben in der Form $A = A^0 \oplus \sum \oplus A_n^+ \oplus \sum \oplus A_n^-$ mit $2^n < A_n^+ \leq 2^{n+1}$, $2^n < -A_n^- \leq 2^{n+1}$. Für $B_n^+ = 2^{-n} \cdot A_n^+$, $B_n^- = -2^{-n} \cdot A_n^-$ ergibt sich dann

$$A = A^0 \oplus \sum \oplus 2^n B_n^+ \oplus \sum \oplus -2^n \cdot B_n^- \quad \text{mit} \quad 1 < B_n^{\pm} \leq 2.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Darstellung $A = DB = BD$, wobei B selbstadjungiert, positiv ($1 < B \leq 2$) und mit A und dem Diagonaloperator D vertauschbar ist.

Sei nun Q die positiv-selbstadjungierte Quadratwurzel aus B. Dann ist auch Q mit A und D vertauschbar und es gilt $1 < \frac{|Q\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \leq \sqrt{2}$. Q ist also intakt, und wir haben $A = DQ^2 = Q^2 D = QDQ = Q^* DQ$. Hieraus folgt auch sofort

$$\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_D, \qquad \mathfrak{W}_A = \mathfrak{W}_D.$$

Die Frage, wann zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren zueinander affin sind, wurde von KÖTHE [a. a. O.[14])] auch bereits mit elementaren Hilfsmitteln geklärt:

(3, I) *Zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren sind dann und nur dann zueinander affin, wenn bei einer Darstellung durch Diagonalmatrizen die Anzahlen der Nullen in der Hauptdiagonalen übereinstimmen und die von Null verschiedenen Diagonalelemente sich einander umkehrbar eindeutig so zuordnen lassen, daß die Quotienten einander zugeordneter Elemente zwischen festen positiven Schranken liegen.*

Für intakte, selbstadjungierte Operatoren bedeutet dies, daß man die Diagonalelemente zu $+1$ und -1 machen kann, wie es auch im endlichen möglich ist.

Das affine Äquivalenzproblem für selbstadjungierte Operatoren ist damit vollständig gelöst ohne Benutzung spektraltheoretischer Hilfsmittel. Ein völliger Verzicht auf jegliche analytischen Begriffsbildungen ist wohl schon

[15]) KÖTHE, G.: a. a. O. [14]).

deswegen unmöglich, weil bereits bei der genauen Definition eines Diagonaloperators Konvergenzbetrachtungen für Folgen von Elementen aus $\mathfrak{H}$ in demselben Umfang erforderlich sind, wie sie hier mit dem Satz von der Existenz der Quadratwurzel eines beschränkten positiv-selbstadjungierten Operators benutzt worden sind.

§ 4. Gleichungstheorie abgeschlossener Operatoren als Äquivalenzproblem.

Im § 2 hatten wir die Lösungen der Gleichungen $A\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ durch den Übergang zu geeigneten Orthonormalsystemen zu gewinnen versucht. Das ist aber offenbar gleichwertig dem Übergang von A zu einem Operator $A' = UAV$, wobei U und V unitäre Operatoren sind. Man kann aber für die Überführung in eine Normalform auch allgemeinere, etwa topologische (= intakte) lineare Abbildungen von $\mathfrak{H}$ zulassen.

Definition 4. *Zwei Operatoren A und B heißen zueinander äquivalent, wenn es topologische lineare Abbildungen Q', Q'' von $\mathfrak{H}$ gibt, so daß gilt $A = Q'BQ''$.*

Da diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, liefert sie eine Einteilung der Operatoren in Äquivalenzklassen. Das Gleichungsproblem kann man dann darin sehen, einen Überblick über diese Klassen zu gewinnen und für wenigstens einen Operator jeder Klasse die zugehörigen Gleichungen aufzulösen.

Die Normalformen, auf die sich jeder abgeschlossene Operator durch äquivalente Umformung zurückführen läßt, sind Operatoren, die sich bezüglich eines v.O.S. durch eine Matrix darstellen lassen, die durch Streichen der Nullzeilen und Nullspalten in eine positiv reelle Diagonalmatrix übergeht. Operatoren dieses Typs werden im folgenden stets mit G bezeichnet.

Mit elementaren Hilfsmitteln bewies G. KÖTHE[16]):

(4, I) *Zwei Operatoren vom Typus G sind dann und nur dann äquivalent, wenn die sie darstellenden Matrizen die gleiche Anzahl von Nullzeilen und Nullspalten enthalten und wenn die von Null verschiedenen Matrixelemente sich einander umkehrbar-eindeutig so zuordnen lassen, daß die Quotienten der Beträge einander zugeordneter Elemente zwischen festen positiven Schranken liegen.*

Noch entscheidender ist für die Gleichungstheorie das folgende Ergebnis KÖTHEs, das wir ohne Spektraltheorie beweisen:

Satz 6: *Jeder abgeschlossene Operator A hat die Form*

$$A = U\,G\,Q = U'\,G\,Q',$$

wobei U, U' unitäre und Q, Q' intakte lineare Transformationen sind. Jeder abgeschlossene Operator ist also einem Operator vom Typus G äquivalent.

Beweis. Nach (2, I) erhalten wir $A = JB = B'J'$, wo J, J' isometrisch, B, B' selbstadjungiert und nichtnegativ sind. Nach Satz 5 kann man schreiben $B = DQ$, $B' = Q'D'$ und damit $A = JDQ = Q'D'J'$. Wie KÖTHE bereits elementar zeigt, läßt sich zu J und D ein unitärer Operator U konstruieren,

[16]) KÖTHE, G.: a. a. O. [5]).

so daß gilt $U^* J D = G$, also $J D = U G$. Ganz analog erhält man $D' J' = G' U'$ und so $A = U G Q = Q' G' U'$. Da G und G' äquivalent sind, läßt sich wegen (4, I) auch schreiben $G' = Q'' G U''$ mit intaktem Q'' und unitärem U''. Setzen wir dies aber ein, so erhalten wir

$$A = U G Q = Q' Q'' G U'' U' \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist auch spektraltheoriefrei der Überblick über die Äquivalenzklassen gewonnen. Für die Gleichungen $G \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ läßt sich aber sofort ein einfaches Lösbarkeitskriterium angeben, und sämtliche Lösungen lassen sich explizit darstellen [a. a. O.[16])].

§ 5. Gleichungstheorie Juliascher Operatoren.

In der Klasse der abgeschlossenen Operatoren sind Addition und Multiplikation nicht unbeschränkt durchführbar, ja Summen und Produkte abgeschlossener Operatoren brauchen nicht einmal mehr eine abgeschlossene Erweiterung besitzen. Für viele Untersuchungen ist es aber wünschenswert, eine übersichtliche Klasse von Operatoren zur Verfügung zu haben, in der man beliebig addieren und multiplizieren kann, die aber auch alle abgeschlossenen Operatoren enthält. Eine solche Klasse ist in den letzten Jahren von G. JULIA und J. DIXMIER[17]) in den JULIAschen Operatoren näher untersucht worden.

Definition 5. *Ein linearer (ein- oder mehrdeutiger) Operator A heißt* JULIA*scher Operator, wenn sein „Bild", die Menge aller Vektoren $\langle \mathfrak{x}; A\mathfrak{x} \rangle$ in $\mathfrak{H}^2$, Existenzbereich eines abgeschlossenen Operators ist.*

Zu den JULIAschen Operatoren gehören also alle abgeschlossenen Operatoren und mit A gehört auch A^{-1} dazu. Wir werden uns für die Gleichungstheorie auf die folgenden Sätze stützen, in denen einige wesentliche Eigenschaften JULIAscher Operatoren zum Ausdruck kommen[18]).

(5, I) *Das Produkt endlich vieler* JULIA*scher Operatoren ist wieder ein* JULIA*scher Operator.*

(5, II) *Jeder* JULIA*scher Operator A ist (auf unendlich viele Weisen) darstellbar als Produkt $A = B' B''$, wobei B' und B''^{-1} abgeschlossen und beschränkt sind mit $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{B''}$, $\mathfrak{W}_A = \mathfrak{W}_{B'}$.*

(5, III) *Definitions- und Wertbereiche* JULIA*scher Operatoren sind stets auch Definitionsbereiche abgeschlossener Operatoren.*

(5, IV) *Jeder eindeutige* JULIA*sche Operator, dessen Definitionsbereich abgeschlossen ist, ist abgeschlossen und beschränkt.*

Wir wollen zunächst zeigen, daß wir durch äquivalente Umformungen nur für die abgeschlossenen Operatoren brauchbare Normalformen erhalten, jedoch nicht für die übrigen JULIAschen Operatoren.

Satz 7: *Jeder Operator, der äquivalent ist zu einem Operator mit einer zeilenfiniten Matrixdarstellung, ist abgeschlossen.*

[17]) Bei J. DIXMIER (a. a. O. [6]), finden sich die wichtigsten Ergebnisse und ausführliche Angaben der entsprechenden Arbeiten.

[18]) DIXMIER, J.: a. a. O. [6]) Theorèmes (3,1), (3,2), (3,3) und (3,4).

Beweis. A sei bezüglich eines v.O.S. $\mathfrak{e}_k$ definiert durch die zeilenfinite Matrix (a_{ik}), d.h. A ist definiert für alle Vektoren $\mathfrak{x}=\sum x_k \mathfrak{e}_k$, für die $\sum_i (\sum_k a_{ik} x_k)\mathfrak{e}_i = A\mathfrak{x}$ ein Vektor aus $\mathfrak{H}$ ist. Sei nun $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{D}_A$, $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}$ und $A\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}'$. Es gilt dann insbesondere

$$x_k^{(n)} = (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{e}_k) \to (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_k) = x_k; \qquad (A\mathfrak{x}_n, \mathfrak{e}_i) = \sum_k a_{ik} x_k^{(n)} \to x_i' = (\mathfrak{x}', \mathfrak{e}_i).$$

Einerseits ist nun $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_k a_{ik} x_k^{(n)} = x_i'$, andererseits, da nur endlich viele Glieder auftreten, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_k a_{ik} x_k^{(n)} = \sum_k a_{ik} x_k$. Es gilt also

$$\mathfrak{x}' = \sum x_i' \mathfrak{e}_i = \sum_i (\sum_k a_{ik} x_k)\mathfrak{e}_i = A\mathfrak{x}.$$

Das heißt aber, daß A abgeschlossen ist. Da durch äquivalente Umformung abgeschlossene Operatoren stets in abgeschlossene Operatoren übergehen, ist damit der Satz bewiesen[19]).

Wir müssen also zur Umformung der JULIAschen Operatoren auch eineindeutige Transformationen zulassen, die nicht mehr samt ihrer Umkehrung beschränkt sind. Es genügt aber, wenn wir nur in der einen Richtung auf die Beschränktheit verzichten:

Satz 8: *Jeder (eindeutige) dicht definierte* JULIA*sche Operator A läßt sich durch linksseitige Multiplikation mit einer topologischen (intakten) und rechtsseitige Multiplikation mit einer eineindeutigen und stetigen (beschränkten) Transformation überführen in einen beschränkten Operator vom Typus G, und zwar gilt:*

$$G = QA\overline{D} = UAS, \qquad \mathfrak{D}_A = \mathfrak{W}_{\overline{D}} = \mathfrak{W}_S,$$

wobei U unitär, Q topologisch, S und $\overline{D}$ eineindeutig und stetig sind. $\overline{D}$ läßt sich bezüglich zweier v.O.S. durch eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ≤ 1 darstellen[20]).

Beweis. $\mathfrak{D}_A$ ist nach (5, III) Definitionsbereich eines abgeschlossenen Operators B, der sich nach (2, I) in der Form $B=JC$ darstellen läßt, so daß $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_C$. Nach Satz 5 gibt es dann einen selbstadjungierten Diagonaloperator D mit den Eigenwerten d_i und den zugehörigen Eigenvektoren $\mathfrak{e}_i$,

[19]) Bereits aus der Bedingung $\sum\limits_k |a_{ik}|^2 < \infty$ für alle i (die E. SCHMIDT seiner Gleichungstheorie zugrunde legt) würde folgen, daß der durch die Matrix (a_{ik}) dargestellte Operator abgeschlossen ist, da dann ebenfalls noch $\sum a_{ik} x_k^{(n)}$ gegen $\sum a_{ik} x_k$ konvergieren würde. Die von E. SCHMIDT (Rendiconti di Palermo, XXV. 1908, S. 53—77) betrachteten Matrizen lassen sich also sämtlich auffassen als Darstellungen abgeschlossener Operatoren bezüglich eines v. O. S., das zugleich auch im Definitionsbereich der Adjungierten enthalten ist.

[20]) Dieses Ergebnis läßt sich auch mit Hilfe eines abgeschwächten Äquivalenzbegriffs formulieren: A und A' heißen schwach äquivalent, wenn es einen beschränkten Operator C gibt, so daß mit intakten Operatoren Q, Q' und eineindeutigen und beschränkten Operatoren S, S' gilt $C = QAS = Q'A'S'$ mit $\mathfrak{W}_S = \mathfrak{D}_A$; $\mathfrak{W}_{S'} = \mathfrak{D}_{A'}$. Das Resultat lautet dann: 1. Jeder eindeutige JULIAsche Op. ist schwach äquivalent zu einem beschränkten Op. vom Typus G. 2. Zwei beschränkte Op. vom Typus G sind dann und nur dann schwach äquivalent, wenn sie äquivalent sind (Def. 4).

die ein v.O.S. bilden, der denselben Definitionsbereich hat wie C und A. $\mathfrak{D}_A$ besteht also aus allen Vektoren $\mathfrak{x} = \sum x_i \mathfrak{e}_i$, für die $\sum |x_i|^2$ und $\sum |x_i d_i|^2$ konvergieren. Diese Konvergenzbedingung ist gleichwertig mit der Forderung $\sum |x_i|^2 < \infty$ und $\sum |x_i \cdot a_i^{-1}| < \infty$ mit $a_k = \text{Min}\,(d_k^{-1}, 1)$. Definiert man einen weiteren Diagonaloperator D_0 durch $D_0 \mathfrak{e}_k = a_k \mathfrak{e}_k$, so gilt $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{W}_{D_0}$. Der JULIAsche Operator $A D_0$ ist also überall definiert und daher nach (5, IV) beschränkt. Nach Satz 6 hat $A D_0$ die Form $A D_0 = U G Q = Q' G U'$, also $G = U^* A (D_0 Q^{-1}) = Q'^{-1} A (D_0 U'^*)$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.

Ist A ein JULIAscher Operator, so läßt sich die Gleichung $A \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ also durch Transformationen $\mathfrak{y}' = U \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x} = S \mathfrak{x}'$ überführen in eine Gleichung $G \mathfrak{x}' = \mathfrak{y}'$, die bei Benutzung eines geeigneten v.O.S. $\mathfrak{e}_i'$ auf das Gleichungssystem

$$g_i x_{m_i} = y_{n_i}$$
$$0 = y_k \quad \text{für} \quad k \neq n_i$$

führt, das unmittelbar lösbar ist. Setzt man $\mathfrak{e}_i' = U \mathfrak{e}_i$, so erhält man das folgende Lösbarkeitskriterium:

Zu jedem JULIA*schen Operator A gibt es ein v.O.S. $\mathfrak{e}_i$ und eine Folge von positiv reellen Zahlen $g_i \leq 1$, so daß die Gleichung $A \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{y} = \sum y_i \mathfrak{e}_i$ dann und nur dann lösbar ist, wenn*

1. $\sum |y_{n_i} \cdot g_i^{-1}|^2 < \infty$;
2. $y_k = 0$, *wenn* $k \neq n_i$.

$\mathfrak{x} = S\left(\sum y_{n_i} g_i^{-1} \mathfrak{e}'_{m_i}\right) + S\left(\sum\limits_{k \neq m_i} x_k \mathfrak{e}'_k\right)$ ist dann die allgemeine Lösung, wobei die $x_k (k \neq m_i)$ nur der Bedingung $\sum\limits_{k \neq m_i} |x_k|^2 < \infty$ unterliegen.

Damit ist auch für JULIAsche Operatoren eine Gleichungstheorie entwickelt worden, die abgesehen von Konvergenzbetrachtungen für Folgen von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ nur algebraische Hilfsmittel und Begriffe benutzt.

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Oktober 1952.)

FÖLLINGER, O.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 98—112 (1953)

Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten.

Von
OTTO FÖLLINGER.

In der vorliegenden Arbeit werden Variationsprobleme des einfachsten Typs behandelt, also Probleme ohne Nebenbedingungen, deren zulässige Kurven in der x, y-Ebene gelegen sind. Diese Kurven mögen in Parameterdarstellung gegeben sein und in dem offenen Bereich $\mathfrak{G}_2$ liegen. Betreffs jedes ihrer beiden Endpunkte bestehen drei verschiedene Möglichkeiten: er kann fest, auf einer gegebenen Kurve beweglich oder in $\mathfrak{G}_2$ frei beweglich sein. Die Fälle, in denen ein Endpunkt fest ist und der andere sich auf einer gegebenen Kurve bewegt bzw. beide Endpunkte auf gegebenen Kurven liegen, sind bereits vollständig behandelt. Probleme mit einem festen und einem frei beweglichen Endpunkt wurden von A. RASMADSE untersucht[1]). Im folgenden sollen Variationsprobleme betrachtet werden, bei denen entweder beide Endpunkte der zulässigen Kurven frei beweglich sind oder dies doch für einen der Fall ist, während der andere auf einer gegebenen Kurve liegt. Und zwar soll hierfür das Problem des relativen Minimums behandelt werden. Zuvor werde jedoch das Variationsproblem mit einem festen und einem freien Endpunkt kurz betrachtet.

Was die Bezeichnungsweise anbetrifft, wird die von O. BOLZA in seinem Buch „Vorlesungen über Variationsrechnung" angewandte Terminologie benutzt. Es ist im folgenden mit „BOLZA" zitiert.

I. Probleme mit einem festen und einem frei beweglichen Endpunkt.

1. Zulässige Kurven. Gegeben seien ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y-Ebene und ein Punkt $P_1 \in \mathfrak{G}_2$. Eine stückweis glatte Kurve C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, heiße zulässig, wenn

$$(x(t),\ y(t)) \in \mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \tag{1}$$

$$(x(t_1),\ y(t_1)) = P_1, \tag{2}$$

$$P_2 = (x(t_2),\ y(t_2)) \neq P_1. \tag{3}$$

2. Der Integrand $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ des zu einem Minimum zu machenden Integrals $I(C) = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\, dt$ sei in dem Bereich $\mathfrak{G}_4$: $(x, y) \in \mathfrak{G}_2$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ von der Klasse $C^{(4)}$ [2]), und es gelte $F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ für $k > 0$.

---

[1]) Math. Ann. **75**, 380—401 (1914).

[2]) Definition der Klasse $C^{(n)}$ bei BOLZA, 13.

3. Relatives Minimum. Die zulässige Kurve E_0: $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0, d.h. eine in $\mathfrak{G}_2$ gelegene und E_0 im Innern enthaltende Punktmenge sowie eine Umgebung $\mathfrak{V}$ von P_2 mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ und $P_1 \notin \mathfrak{V}$ existiert derart, daß für jede zulässige Kurve $C < \mathfrak{U}$ mit $(x(t_2), y(t_2)) \in \mathfrak{V}$ $I(C) \geq I(E_0)$ gilt. Das Minimum heißt eigentlich, wenn $I(C) = I(E_0)$ nur für $C = E_0$.

4. Voraussetzungen über E_0. Wenn die zulässige Kurve E_0: $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, glatt ist und ein Minimum liefert, muß sie eine Extremale sein und die LEGENDRE-, JACOBI- und WEIERSTRASS-Bedingung erfüllen. Es werde daher im folgenden vorausgesetzt: E_0 ist eine Extremale und erfüllt die verschärfte LEGENDRE-Bedingung. Dann läßt sich E_0 unter Beibehaltung sämtlicher Eigenschaften auf ein Intervall $[T_1, T_2]$ mit $T_1 < t_1$, $T_2 > t_2$ fortsetzen. Es sei $x_0(t_1) = a_1$, $y_0(t_1) = b_1$, $\dot{x}_0(t_1) = \dot{a}_1$, $\dot{y}_0(t_1) = \dot{b}_1$, $\ddot{x}_0(t_1) = \ddot{a}_1$, $\ddot{y}_0(t_1) = \ddot{b}_1$, entsprechend $x_0(t_2) = a_2$, $y_0(t_2) = b_2$ etc. und weiterhin $(a_1, b_1) = P_1$, $(a_2, b_2) = P_2$. Der Tangentenwinkel von E_0 in t_1 bzw. t_2 sei α_1 bzw. α_2. Die Gesamtheit dieser Voraussetzungen sei kurz mit (V) bezeichnet. Nimmt man zusätzlich an, daß E_0 die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt, so seien die so erweiterten Voraussetzungen durch (V') symbolisiert.

5. Notwendige und hinreichende Bedingungen. Liefert E_0 unter den Voraussetzungen (V') ein relatives Minimum, so gelten die Gleichungen

$$(A_2) \qquad F_{\dot{x}}(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) = 0, \qquad F_{\dot{y}}(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) = 0$$

sowie die Ungleichung

$$(B_2) \qquad \dot{a}_2 F_x(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) + \dot{b}_2 F_y(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) \geq 0^{3}).$$

Wird sie durch Weglassen des Gleichheitszeichens verschärft, so sei sie mit (B_2') bezeichnet. Der Fall

$$\dot{a}_2 F_x(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) + \dot{b}_2 F_y(a_2, b_2, \cos\alpha_2, \sin\alpha_2) = 0$$

wird im folgenden nicht berücksichtigt. Denn wenn er vorliegt, liefert E_0 im allgemeinen kein Minimum[4]).

Auf Grund von (A_2) und (B_2') existiert ein Funktionentripel $x = \xi(a)$, $y = \eta(a)$, $\Theta = \vartheta(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, mit $\xi(a_0) = a_2$, $\eta(a_0) = b_2$, $\vartheta(a_0) = \alpha_2$ derart, daß durch diese drei Funktionen die EULER-LAGRANGEschen Gleichungen in der BLISSschen Form[5]) und außerdem die Gleichungen $F_{\dot{x}}(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta) = 0$, $F_{\dot{y}}(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta) = 0$ erfüllt werden. $\mathfrak{r}: x = \xi(a)$, $y = \eta(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, ist eine glatte Jordankurve, die als Rißpunktkurve bezeichnet wird. Die durch $x = \xi(a)$, $y = \eta(a)$, $\Theta = \vartheta(a)$ bestimmten Linienelemente heißen Rißelemente[6]). Durch jeden Punkt der Rißpunktkurve geht in der Richtung $\vartheta(a)$ genau eine Extremale. Die hierdurch bestimmte einparametrige Extremalenschar

$$\mathfrak{a}: x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \qquad T_1 \leq t \leq T_2, \qquad |a - a_0| \leq \delta,$$

[3]) RASMADSE, a. a. O., 383, 384.
[4]) RASMADSE, a. a. O., 392.
[5]) BOLZA, 212—213.
[6]) Bezeichnungen nach RASMADSE, a. a. O., 384—385.

welche E_0 für $a = a_0$ enthält, werde Rißextremalenschar genannt. Man kann den Parameter a der Rißpunktkurve so wählen, daß entweder $\dot{\xi}(a) = -F_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = F_x(t_2, a)$ oder $\dot{\xi}(a) = F_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = -F_x(t_2, a)$. Im ersteren (letzteren) Fall folgt aus (B_2'), daß der Bogen $[t_1, t_2]$ von E_0 in der Umgebung von (t_2, a_0) auf der positiven (negativen) Seite der Rißpunktkurve gelegen ist.

Unter den Voraussetzungen (V'), (A_2), (B_2') ergibt sich als letzte notwendige Bedingung (C_2): Der linksseitige Brennpunkt t_2''' von $\mathfrak{a}$ auf E_0 liegt nicht in $(t_1, t_2]$. Dabei ist t_2''' definiert als die erste vor t_2 gelegene Nullstelle von $\Delta(t, a_0)$, wenn $\Delta(t, a)$ die Schardeterminante von $\mathfrak{a}$ darstellt. $\Delta(t, a_0)$ ist eine nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung, welche der Anfangsbedingung $A_2 \Delta(t_2, a_0) + B_2 \Delta_t(t_2, a_0) = 0$ genügt, wobei $A_2 = LN - M^2|_2$, $B_2 = F_1(\dot{a}_2 F_x + \dot{b}_2 F_y)|_2$ [7]). Die Ungleichung $t_2''' < t_1$ werde mit (C_2') bezeichnet.

Ist E_0 doppelpunktfrei und genügt den Voraussetzungen (V), (A_2), (B_2') und (C_2') sowie der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung, so erzeugt E_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$. Erfüllt E_0 statt (C_2') nur (C_2), so liefert E_0 im allgemeinen kein Minimum, wie man mit Hilfe des Enveloppensatzes zeigt.

6. Variationsprobleme mit freiem Anfangspunkt und festem Endpunkt. Bei diesen Problemen ergeben sich als notwendige Bedingungen für ein relatives Minimum durch E_0 unter den Voraussetzungen (V') zunächst

$$(A_1) \qquad F_{\dot{x}}|_1 = 0, \qquad F_{\dot{y}}|_1 = 0,$$

$$(B_1) \qquad \dot{a}_1 F_x + \dot{b}_1 F_y|_1 \leqq 0.$$

Setzt man zusätzlich (A_1) und (B_1') voraus, so existiert durch P_1 die Rißpunktkurve $\mathfrak{r}$ mit ihrer Rißextremalenschar $\mathfrak{a}$. Mit den Voraussetzungen (V'), (A_1), (B_1') erhält man die notwendige Bedingung (C_1): Der rechtsseitige Brennpunkt t_1'' von $\mathfrak{a}$ auf E_0 liegt nicht in $[t_1, t_2)$. Dabei ist t_1'' definiert als die erste auf t_1 folgende Nullstelle von $\Delta(t, a_0)$. $\Delta(t, a_0)$ wiederum ist gegeben als eine nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $A_1 \Delta(t_1, a_0) + B_1 \Delta_t(t_1, a_0) = 0$ erfüllt. Dabei ist $A_1 = LN - M^2|_1$, $B_1 = F_1(\dot{a}_1 F_x + \dot{b}_1 F_y)|_1$.

II. Probleme mit frei beweglichen Endpunkten.

1. Zulässige Kurven. Gegeben ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y-Ebene. Die stückweis glatte Kurve C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, heiße zulässig, wenn

$$(1) \qquad (x(t), y(t)) \in \mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

$$(2) \qquad (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)).$$

Der Integrand $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ des Variationsintegrals $I(C)$ erfülle dieselben Voraussetzungen wie in I.2.

[7]) Das Zeichen $|_1$ bzw. $|_2$ soll andeuten, daß der vorhergehende Ausdruck an der Stelle P_1 bzw. P_2 zu nehmen ist.

2. Relatives Minimum. Die zulässige Kurve E_0: $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, mit dem Anfangspunkt $(x_0(t_1), y_0(t_1)) = P_1$ und dem Endpunkt $(x_0(t_2), y_0(t_2)) = P_2$ liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0 und eine Umgebung $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ von P_1 bzw. P_2 mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = 0$ existieren derart, daß für jede zulässige Kurve $C < \mathfrak{U}$ mit $(x(t_1), y(t_1)) \in \mathfrak{B}_1$ und $(x(t_2), y(t_2)) \in \mathfrak{B}_2$ $I(C) \geq I(E_0)$ gilt. Definition des eigentlichen Minimums wie in I.3.

3. Voraussetzungen. Es seien die Voraussetzungen (V') erfüllt und E_0 liefere ein relatives Minimum. Dann erzeugt E_0 auch ein Minimum unter allen in $\mathfrak{U}$ gelegenen zulässigen Kurven, welche in P_1 beginnen und in $\mathfrak{B}_2$ endigen bzw. in $\mathfrak{B}_1$ beginnen und in P_2 endigen. Daher befriedigt E_0 (A_1) und (B_1), (A_2) und (B_2). Setzt man nun zusätzlich (A_1), (B_1'), (A_2), (B_2') voraus, so genügt E_0 (C_1) und (C_2).

Es werde im folgenden die Gültigkeit von (V), (A_1), (B_1'), (C_1'), (A_2) und (B_2') vorausgesetzt. Es geht dann durch P_1 die Rißpunktkurve

$$\mathfrak{r}: \quad x = \xi(a), \quad y = \eta(a), \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

und es existiert die zugehörige Rißextremalenschar

$$\mathfrak{a}: \quad x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad |a - a_0| \leq \delta.$$

Der Tangentenwinkel dieser Schar auf $\mathfrak{r}$ sei $\vartheta(a)$, ihre Determinante $\Delta(t, a)$. Durch P_2 geht die Rißpunktkurve $\bar{\mathfrak{r}}$, die zugehörige Rißextremalenschar sei $\bar{\mathfrak{a}}$, ihre Schardeterminante $\bar{\Delta}$, ihr Tangentenwinkel auf $\bar{\mathfrak{r}}$ $\bar{\vartheta}$. Bringt man die Schar $\mathfrak{a}$ mit $\bar{\mathfrak{r}}$ zum Schnitt, so erkennt man, daß a auch auf $\bar{\mathfrak{r}}$ als Kurvenparameter und damit in $\bar{\mathfrak{a}}$ als Scharparameter eingeführt werden kann. Dann sind $\bar{\mathfrak{r}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ gegeben durch die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{r}}: \quad x = \bar{\xi}(a), \quad y = \bar{\eta}(a), \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

und

$$\bar{\mathfrak{a}}: \quad x = \bar{\varphi}(t, a), \quad y = \bar{\psi}(t, a), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad |a - a_0| \leq \delta.$$

Der Kurvenparameter t der Schar $\mathfrak{a}$ kann außerdem so gewählt werden, daß $\varphi(t_2, a) = \bar{\xi}(a)$, $\psi(t_2, a) = \bar{\eta}(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, ist. Im folgenden werde $F(\varphi(t, a), \ldots, \psi_t(t, a)) = F(t, a)$, $F(\bar{\varphi}(t, a), \ldots, \bar{\psi}_t(t, a)) = \bar{F}(t, a)$ gesetzt. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\Delta(t, a_0) > 0$ in $[t_1, t_2]$. Dann ist $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) > 0$. a kann so gewählt werden, daß $\dot{\bar{\xi}}(a) = -\bar{F}_y(t_2, a)$, $\dot{\bar{\eta}}(a) = \bar{F}_x(t_2, a)$. Der Bogen $[t_1, t_2]$ von E_0 liegt bei (t_1, a_0) bzw. (t_2, a_0) auf der negativen Seite von $\mathfrak{r}$ bzw. der positiven Seite von $\bar{\mathfrak{r}}$.

II. $\Delta(t, a_0) < 0$ in $[t_1, t_2]$, also $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) < 0$. Dann kann a so gewählt werden, daß $\dot{\bar{\xi}}(a) = \bar{F}_y(t_2, a)$, $\dot{\bar{\eta}}(a) = -\bar{F}_x(t_2, a)$. E_0 liegt bei (t_1, a_0) bzw. (t_2, a_0) auf der positiven Seite von $\mathfrak{r}$ bzw. der negativen Seite von $\bar{\mathfrak{r}}$.

Anschließend seien noch einige Relationen zwischen $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ zusammengestellt. Es ist $\varphi(t_2, a) = \bar{\xi}(a) = \bar{\varphi}(t_2, a)$, $\psi(t_2, a) = \bar{\eta}(a) = \bar{\psi}(t_2, a)$ in $|a - a_0| \leq \delta$. Außerdem gilt $\varphi(t, a_0) = x_0(t) = \bar{\varphi}(t, a_0)$, $\psi(t, a_0) = y_0(t) = \bar{\psi}(t, a_0)$ in $T_1 \leq t \leq T_2$.

Aus diesen Relationen folgt, daß in (t_2, a_0) $F = \bar{F}$, $F_x = \bar{F}_x$ etc. Die Gesamtheit aller dieser Voraussetzungen werde mit (W) bezeichnet.

4. Um weitere notwendige Bedingungen dafür herzuleiten, daß E_0 ein Minimum liefert, werde das Scharintegral auf der Rißextremalenschar $\mathfrak{a}$ betrachtet: $u(t, a) = \int_{t_1}^{t} F(\tau, a)\, d\tau$, $t_1 \leq t \leq T_2$, $|a - a_0| \leq \delta$. Für ein Minimum von $I(C)$ durch E_0 ist dann notwendig:

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial a} = 0;$$

(b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0;$$

(c) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial a}\right)^2 \geq 0$$

für $(t, a) = (t_2, a_0)$. Da $\mathfrak{r}$ Transversale der Schar $\mathfrak{a}$ ist, berechnen sich die Ableitungen von $u(t, a)$ zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F, \qquad \frac{\partial u}{\partial a} = F_{\dot{x}} \varphi_a + F_{\dot{y}} \psi_a,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_x \varphi_t + F_y \psi_t + F_{\dot{x}} \varphi_{tt} + F_{\dot{y}} \psi_{tt},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = F_{\dot{x}} \varphi_{aa} + F_{\dot{y}} \psi_{aa} + L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 + F_1 \Delta_t,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial a} = F_x \varphi_a + F_y \psi_a + F_{\dot{x}} \varphi_{ta} + F_{\dot{y}} \psi_{ta}.$$

Aus (a) folgt daher wegen (C_1') $\bar{F}_{\dot{x}}|_2 = 0$, $\bar{F}_{\dot{y}}|_2 = 0$, d.h. (A_2). Aus (b_1) resultiert infolgedessen $\bar{F}_x \bar{\varphi}_t + \bar{F}_y \bar{\psi}_t|_2 \geq 0$, also (B_2). Da wegen (W) $F_x \varphi_a + F_y \psi_a|_2 = \bar{F}_x \dot{\bar{\xi}} + \bar{F}_y \dot{\bar{\eta}}|_2 = 0$, ist $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial a}\right|_2 = 0$. Und da wegen (B_2') zudem $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} > 0$ gilt, ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial a}\right)^2 \geq 0$ äquivalent mit $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0$. Es genügt daher, zur Ableitung einer notwendigen Bedingung die Relation $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0$, also

(d) $$L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 + F_1 \Delta \Delta_t|_2 \geq 0$$

zu untersuchen.

5. Die notwendige Bedingung (C_{12}). Zunächst werde (d) umgeformt. Da allgemein $F_x = L \varphi_t + M \psi_t$, $F_y = M \varphi_t + N \psi_t$ gilt, ist an der Stelle (t_2, a_0):

$$\begin{aligned} L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 &= \varphi_a (L \varphi_a + M \psi_a) + \psi_a (M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= -F_y (L \varphi_a + M \psi_a) + F_x (M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= -(M \varphi_t + N \psi_t)(L \varphi_a + M \psi_a) + (L \varphi_t + M \psi_t)(M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= (LN - M^2) \Delta = A_2 \Delta. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $F_1 \Delta|_2 = F_1 (\dot{a}_2 F_x + \dot{b}_2 F_y)|_2 = B_2$. Somit wird (d): $A_2 \Delta(t_2, a_0) + B_2 \Delta_t(t_2, a_0) \geq 0$. Andererseits erhält man durch Differentiation der Identi-

täten $\overline{F}_x(t_2, a) = 0$, $\overline{F}_y(t_2, a) = 0$ nach a die Gleichungen

$$\overline{L}\,\overline{\varphi}_a + \overline{M}\,\overline{\psi}_a + \overline{F}_1(-\overline{\psi}_t)(-\overline{\psi}_{tt}\overline{\varphi}_a + \overline{\varphi}_{tt}\overline{\psi}_a - \overline{\psi}_t\overline{\varphi}_{ta} + \overline{\varphi}_t\overline{\psi}_{ta}) = 0,$$

$$\overline{M}\,\overline{\varphi}_a + \overline{N}\,\overline{\psi}_a + \overline{F}_1\overline{\varphi}_t(-\overline{\psi}_{tt}\overline{\varphi}_a + \overline{\varphi}_{tt}\overline{\psi}_a - \overline{\psi}_t\overline{\varphi}_{ta} + \overline{\varphi}_t\overline{\psi}_{ta}) = 0.$$

Argumente sind hierbei t_2, a. Multipliziert man die erste mit $\overline{\varphi}_a(t_2, a)$, die zweite mit $\overline{\psi}_a(t_2, a)$ und addiert, so erhält man $\overline{L}\,\overline{\varphi}_a^2 + 2\overline{M}\,\overline{\varphi}_a\overline{\psi}_a + \overline{N}\,\overline{\psi}_a^2 + \overline{F}_1\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}_t = 0$. Speziell in (t_2, a_0) ist daher: $A_2\overline{\Delta}(t_2, a_0) + B_2\overline{\Delta}_t(t_2, a_0) = 0$. Liegt Fall I von (W) vor, so ist also wegen $\Delta(t_2, a_0) = \overline{\Delta}(t_2, a_0)$ und $B_2 > 0$ $\Delta_t - \overline{\Delta}_t|_2 \gtrless 0$. Ist Fall II von (W) erfüllt, so ergibt sich statt dessen: $\Delta_t - \overline{\Delta}_t|_2 \lesseqgtr 0$. Man erhält so den *Satz 1*: *Seien die Voraussetzungen* (W) *erfüllt. Liefert dann* E_0 *ein Minimum, so gilt*

$$\Delta_t - \overline{\Delta}_t|_2 \gtrless 0, \quad \textit{falls} \quad \Delta = \overline{\Delta}|_2 > 0, \qquad \Delta_t - \overline{\Delta}_t|_2 \lesseqgtr 0, \quad \textit{falls} \quad \Delta = \overline{\Delta}|_2 < 0.$$

Dies sei die Bedingung (C_{12}) *oder, falls sie durch Weglassen des Gleichheitszeichens verschärft ist,* (C'_{12}). Sie gilt es jetzt geometrisch zu interpretieren, was in verschiedener Weise geschehen soll.

6. (C_{12}) *als Brennpunktsbedingung.* Es werde die Existenz des rechtsseitigen Brennpunktes t_2'' von $\bar{\mathfrak{a}}$ auf E_0 vorausgesetzt, d.h. die erste auf t_2 folgende Nullstelle von $\overline{\Delta}(t, a_0)$ möge in $(t_2, T_2]$ liegen. Seien nun $u(t)$, $v(t)$ zwei nichttriviale Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit $u(t_2) = v(t_2) \neq 0$. Bezeichnet man die erste auf t_2 folgende Nullstelle von $u(t)$ bzw. $v(t)$ mit t_1'' bzw. t_2'', so ergibt sich folgende Fallunterscheidung: $u(t_2) = v(t_2) > 0$. $t_1'' \gtreqless t_2''$ dann und nur dann, wenn $\dot{u}(t_2) \gtreqless \dot{v}(t_2)$ ist. $u(t_2) = v(t_2) < 0$. $t_1'' \lesseqgtr t_2''$ dann und nur dann, wenn $\dot{u}(t_2) \lesseqgtr \dot{v}(t_2)$ ist. Identifiziert man $u(t)$ mit $\Delta(t, a_0)$, $v(t)$ mit $\overline{\Delta}(t, a_0)$, so folgt, daß t_1'' nicht vor t_2'' liegen kann, da sonst die Ungleichung in Satz 1 nicht erfüllt wäre. *Satz 2*: *Seien die Voraussetzungen* (W) *erfüllt und stelle* t_1'' *bzw.* t_2'' *den rechtsseitigen Brennpunkt von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{a}}$ *auf* E_0 *dar. Liefert dann* E_0 *ein Minimum und existiert* t_2'', *so liegt* t_1'' *nicht vor* t_2''. Es ergibt sich hier also das genaue Analogon der Blissschen Bedingung für Probleme mit zwei auf Kurven beweglichen Endpunkten.

7. Deutung von (C_{12}) *mit Hilfe der Divergenz der Rißextremalenscharen.* Falls t_2'' nicht existiert, ist diese geometrische Deutung von (C_{12}) nicht statthaft. Um dennoch zu einer anschaulichen Interpretation von (C_{12}) zu gelangen, betrachte man eine Extremalenschar $\mathfrak{f}$: $x = f(t, a)$, $y = g(t, a)$, die E_0 für $a = a_0$ enthält und deren Schardeterminante $D(t, a)$ an der Stelle $(t_2, a_0) \neq 0$ ist. Der Tangentenwinkel $\Theta(t, a)$ der beliebigen $\mathfrak{f}$-Extremalen E im Punkt (t, a) ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\Theta(t, a) = \frac{g_t(t, a)}{f_t(t, a)} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{ctg}\Theta(t, a) = \frac{f_t(t, a)}{g_t(t, a)}.$$

Es sei nun $\mathfrak{k}$: $t = \chi(a)$ eine glatte Jordankurve durch (t_2, a_0) mit $\dot{\chi}(a_0) = 0$, die im übrigen ganz beliebig sei. Bezeichnet $\tau(a) = \Theta(\chi(a), a)$ den Tangentenwinkel

von $\mathfrak{f}$ längs $\mathfrak{k}$, so ist seine Änderung im Punkt (t_2, a_0)

$$\dot{\tau}(a_0) = \frac{f_t g_{ta} - g_t f_{ta}}{f_t^2 + g_t^2} = \frac{D_t - (f_{tt} g_a - g_{tt} f_a)}{f_t^2 + g_t^2}$$

mit den Argumenten t_2, a_0. $\dot{\tau}(a_0)$ ist von der Kurve $\mathfrak{k}$ unabhängig und werde als Divergenz von $\mathfrak{f}$ im Punkt (t_2, a_0) bezeichnet. Ist $\dot{\tau}(a_0) > 0$, wächst also $\tau(a)$ monoton bei $a = a_0$, so streben die von $\mathfrak{k}$ ausstrahlenden Extremalen auseinander, ist jedoch $\dot{\tau}(a_0) < 0$, $\tau(a)$ also monoton fallend bei $a = a_0$, so drängen sie sich zusammen. Seien nun zwei spezielle Scharen $\mathfrak{f}$, nämlich $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ gegeben. Die Divergenz von $\mathfrak{a}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$ in (t_2, a_0) werde mit $\dot{\tau}(a_0)$ bzw. $\dot{\bar{\vartheta}}(a_0)$ bezeichnet. Dann ist $\dot{\tau}(a_0) - \dot{\bar{\vartheta}}(a_0) = \frac{1}{\dot{a}_2^2 + \dot{b}_2^2} (\Delta_t(t_2, a_0) - \bar{\Delta}_t(t_2, a_0))$.

Satz 3. Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt. Liefert dann E_0 ein Minimum und ist $\Delta(t_2, a_0) = \bar{\Delta}(t_2, a_0) > 0$ (< 0), so ist die Divergenz der Schar $\mathfrak{a}$ im Punkt P_2 nicht kleiner (nicht größer) als die Divergenz der Schar $\bar{\mathfrak{a}}$ im gleichen Punkt.

Bei der Ableitung von Satz 3 ist vom Begriff der Rißpunktkurve und der Rißextremalenschar kein Gebrauch gemacht. Lediglich die Ungleichung in Satz 1 sowie ganz allgemeine Eigenschaften von Extremalenscharen sind zugrunde gelegt. Es kann daher auch die BLISSsche Bedingung für Probleme mit auf Kurven beweglichen Endpunkten ganz analog zu Satz 3 ausgesprochen werden.

8. Die Nullkurve. Es ist nunmehr erforderlich, eine Kurve einzuführen, die der Rißextremalenschar $\mathfrak{a}$ zugeordnet ist. Wegen (A_2) und (B_2') gibt es eine Funktion $t = \chi(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, mit $F(\chi(a), a) = 0$, $|a - a_0| \leq \delta$, und $\chi(a_0) = t_2$. Da $\Delta(t_2, a_0) \neq 0$ und $\bar{\Delta}(t_2, a_0) \neq 0$, so ist die Abbildung einer Umgebung $|t - t_2| \leq \varepsilon$, $|a - a_0| \leq \delta$ von (t_2, a_0) auf die x, y-Ebene durch $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ eineindeutig, so daß die Bilder $\mathfrak{Q}$ und $\bar{\mathfrak{Q}}$ dieser Umgebung einfach zusammenhängende, abgeschlossene Mengen bilden, welche P_2 im Innern enthalten. Infolgedessen ist

$$\mathfrak{n}: \quad x = \varphi(\chi(a), a) = m(a), \qquad y = \psi(\chi(a), a) = n(a), \qquad |a - a_0| \leq \delta,$$

ein JORDANsches Kurvenstück, das bei geeigneter Wahl von ε und δ $\mathfrak{Q}$ in zwei einfach zusammenhängende, punktfremde Mengen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zerlegt. Durch Differentiation von $F(\chi(a), a) = 0$ nach a ergibt sich $\dot{\chi}(a_0) = 0$, d. h. $\mathfrak{n}$ berührt $\bar{\mathfrak{k}}$ in (t_2, a_0). $\mathfrak{n}$ ist also glatt. Da $F_t(t, a)|_2 = F_x \varphi_t + F_y \psi_t|_2 > 0$, darf man annehmen, daß in $|a - a_0| \leq \delta$ $F_t(\chi(a), a) > 0$. Daher können $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ so gewählt werden, daß in $\mathfrak{Q}_1$ $F(t, a) < 0$, auf $\mathfrak{n}$ $F(t, a) = 0$ und in $\mathfrak{Q}_2$ $F(t, a) > 0$ ist. $\mathfrak{n}$ werde als Nullkurve von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Jeder E_0 einbettenden Extremalenschar, welche bei P_2 Feldcharakter zeigt, kann eine Nullkurve zugeordnet werden. Sie bildet gewissermaßen einen Ersatz für eine Schartransversale durch P_2, über deren Existenz wegen $F|_2 = 0$ keine Aussage gemacht werden kann. Die Nullkurve von $\bar{\mathfrak{a}}$ ist die Rißpunktkurve $\bar{\mathfrak{k}}$.

9. Verschärfung von (C_{12}). (C_{12}) soll jetzt verschärft werden ohne Benutzung der Ungleichung des Satzes 1 auf einem geometrisch-konstruktiven

Weg. Es seien die Bezeichnungen der Fig. 1 gültig. Dabei sei $3=(t_0, a_0)$ ein Punkt von E_0 mit $t_2<t_0\leq t_2+h$, $h>0$, der so gewählt ist, daß in ihm $F(t_0, a_0)>0$, $\overline{F}(t_0, a_0)>0$. Dann geht durch 3 genau eine Transversale t bzw. $\bar{t}$ von $\mathfrak{a}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$, die vollständig auf derjenigen Seite der Nullkurve $\mathfrak{n}$ bzw. der Rißpunktkurve $\bar{\mathfrak{r}}$ liegt, auf der F bzw. $\overline{F}>0$ ist.

Werde nun angenommen, daß es in einer beliebig engen Umgebung des Punktes $(t_0, a_0)=3$ einen Punkt 7 von t gibt, der auf der von $\bar{\mathfrak{r}}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$ gelegen ist. Durch ihn geht eine Extremale E der Schar $\mathfrak{a}$, welche $\mathfrak{r}$ in 4, $\bar{\mathfrak{r}}$ in 5, t in 6 schneide. Durch den Punkt 5 geht weiterhin eine Extremale $\overline{E}$ der Schar $\bar{\mathfrak{a}}$, die $\bar{t}$ in 8 schneiden möge. Der Extremalenbogen $\overline{E}_{58}$ ist in ein Extremalenfeld eingebettet, das transversal zu $\bar{t}$ ist, nämlich in $\bar{\mathfrak{a}}$. In der Umgebung von $\bar{t}$ ist dabei $\overline{F}(t, a)\neq 0$. Weiterhin ist längs $\overline{E}_{58}$ $F_1>0$,

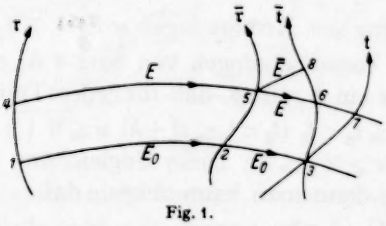

Fig. 1.

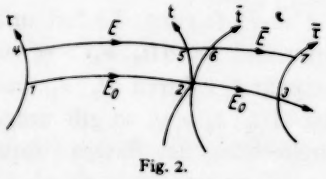

Fig. 2.

wie aus der für E_0 erfüllten verschärften LEGENDRE-Bedingung folgt. Daher liefert $\overline{E}_{58}$ ein Minimum unter allen stückweis glatten Kurven, die in 5 beginnen, in dem genannten Feld gelegen sind, auf $\bar{t}$ enden und deren Gefälle hinreichend wenig von demjenigen von $\overline{E}_{58}$ verschieden ist[8]). Diese Voraussetzungen werden sicher erfüllt durch E_{56}, sofern von vornherein $\delta>0$, welche Zahl ja die Ausdehnung des Definitionsbereiches von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ bestimmt, hinreichend klein gewählt ist. Also ist $I(\overline{E}_{58})\leq I(E_{56})$. Es ist nun $I(E_{13})=I(E_{12})+I(E_{23})$ und $I(E_{47})=I(E_{45})+I(E_{57})$, woraus $I(E_{12})-I(E_{45})=I(E_{13})-I(E_{47})+I(E_{57})-I(E_{23})$ folgt. Wendet man den KNESERschen Transversalensatz auf die Schar $\mathfrak{a}$ an, so ergibt sich $I(E_{13})=I(E_{47})$. Andererseits ist $I(E_{37})>I(E_{56})$, denn nach Voraussetzung liegt 7 auf E hinter 6, und 6 und 7 liegen auf der Seite der Nullkurve $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{a}$, auf der $F(t, a)>0$ ist, wenn man nur $\delta>0$ hinreichend klein wählt. Somit ist $I(E_{57})>I(\overline{E}_{58})$. Wendet man jetzt den Transversalensatz auf die Schar $\bar{\mathfrak{a}}$ an, so erhält man $I(\overline{E}_{58})=I(E_{23})$. Somit ist $I(E_{57})>I(E_{23})$. Es resultiert daher $I(E_{12})>I(E_{45})$, was ausgeschlossen ist, wenn E_0 ein Minimum von $I(C)$ liefert. Daher ist die gemachte Annahme falsch, d.h.: t liegt in einer Umgebung von 3 nicht auf der $\bar{\mathfrak{r}}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$.

Etwas anders ist der Beweis für diese Aussage, wenn für den Punkt (t_0, a_0) $t_0<t_2$ gilt, im übrigen aber analoge Voraussetzungen wie für $t_2<t_0$ gültig sind (Fig. 2). Es sei dabei 5 der Punkt von t, welcher in einer beliebig engen Umgebung von $(t_0, a_0)=2$ liegt und auf der $\bar{\mathfrak{r}}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$ gelegen ist. Durch

[8]) BOLZA, 324.

ihn geht eine Extremale E von $\mathfrak{a}$, welche $\mathfrak{r}$ in 4 schneide, und eine Extremale $\bar{E}$ von $\bar{\mathfrak{a}}$, die $\bar{\mathfrak{t}}$ in 6, $\bar{\mathfrak{r}}$ in 7 treffe. Es ist dann $5<6<7$. Wendet man den KNESERschen Transversalensatz auf die Schar $\mathfrak{a}$ an, so ergibt sich $I(E_{45})=I(E_{12})$. Auf $\bar{\mathfrak{a}}$ angewandt, liefert er $I(\bar{E}_{67})=I(\bar{E}_{23})=I(E_{23})$. Daher ist $I(E_{12})+I(E_{23})=I(E_{45})+I(\bar{E}_{67})$. Da auf $\bar{E}$ $5<6<7$, ist $I(\bar{E}_{56})<0$ und daher $I(E_{12})+I(E_{23})>I(E_{45})+I(\bar{E}_{56})+I(\bar{E}_{67})$ oder $I(E_{13})>I(E_{45}+E_{57})$. Somit ist die gemachte Annahme nicht zutreffend. *Satz 4: Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt. Dann gibt es ein $h>0$ so, daß durch jeden Punkt $P_0=(t_0,a_0)$ mit $t_2-h\leq t_0\leq t_2+h$, $t_0\neq t_2$, genau eine Transversale* $\mathfrak{t}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{t}}$ *von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{a}}$ *geht, welche beiden Kurven sich in P_0 berühren. Liefert E_0 ein Minimum, so kann h so gewählt werden, daß* $\mathfrak{t}$ *in einer hinreichend engen Umgebung von P_0 nicht auf der von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *abgewandten Seite von* $\bar{\mathfrak{t}}$ *liegt. Diese Bedingung sei durch $(\bar{C}_{12})$ bezeichnet.*

Aus Satz 4 kann man durch Einführung der Krümmungen $\varkappa$ bzw. $\bar{\varkappa}$ von $\mathfrak{t}$ bzw. $\bar{\mathfrak{t}}$ in P_0 folgern: Liefert unter den Voraussetzungen von Satz 4 E_0 ein Minimum und ist $\Delta(t_2, a_0)>0$, so gibt es ein $h>0$ so, daß für jedes Transversalenpaar $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$ durch (t_0, a_0) mit $t_2-h\leq t_0<t_2$ $(t_2<t_0\leq t_2+h)$ $\varkappa\leq\bar{\varkappa}$ $(\geq\bar{\varkappa})$ gilt. Ist $\Delta(t_2, a_0)<0$, so gilt umgekehrt $\varkappa\geq\bar{\varkappa}$ $(\leq\bar{\varkappa})$. Diese Ungleichung ist der Ungleichung des Satzes 1 äquivalent, denn man kann zeigen, daß

$$\varkappa-\bar{\varkappa}=\frac{F_1\Delta^2}{(\eta_a^2+\gamma_a^2)}\cdot\frac{\Delta_t-\bar{\Delta}_t}{F}\Big|_0.$$

Also folgt aus $(\bar{C}_{12})$ in der Tat (C_{12}). Hingegen kann man aus (C'_{12}) $(\bar{C}_{12})$ folgern, wie sich aus der letzten Gleichung ergibt.

10. Hinreichende Bedingungen.

10.1. Durch Kombination der hinreichenden Bedingung für ein Minimum bei Problemen mit freiem Anfangs- und festem Endpunkt und der hinreichenden Bedingung für gewöhnliche Minima erhält man ohne Schwierigkeiten den *Satz 5: Sind die Voraussetzungen (V) erfüllt, ist E_0 doppelpunktfrei und genügt der verschärften* WEIERSTRASS*-Bedingung und gelten schließlich (A_1), (B'_1), (C'_1), (A_2), (B'_2) und (C'_{12}), so liefert E_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum.* Daß die JACOBIsche Bedingung und (C_2) nicht aufgeführt sind, erklärt sich dadurch, daß dieselben aus (C'_1) und (C'_{12}) auf Grund allgemeiner Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung folgen.

10.2. Setzt man statt (C'_{12}) nur $(\bar{C}_{12})$ voraus, so kann man nicht mehr folgern, daß E_0 ein eigentliches Minimum liefert. Denn der vorher ausgeschlossene Fall, daß $\mathfrak{a}$ mit $\bar{\mathfrak{a}}$ identisch ist, kann jetzt eintreten. Dann sind $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ Transversalen von $\mathfrak{a}$. Es ist daher, wenn man den zwischen $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ gelegenen Bogen einer beliebigen $\mathfrak{a}$-Extremalen mit E bezeichnet, auf Grund des Transversalensatzes $I(E)=I(E_0)$. Daher ergibt sich hier als hinreichende Bedingung nur der *Satz 6: Sind die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, jedoch mit $(\bar{C}_{12})$ an Stelle von (C'_{12}), so erzeugt E_0 ein relatives starkes Minimum.* Beweis: $\mathfrak{a}$ bildet ein Feld um E_0, welches das Gebiet $\mathfrak{U}$ der x, y-Ebene bedecke. Man konstruiere um P_1 eine Umgebung $\mathfrak{B}_1$ in folgender Weise: Durch den Punkt

(t_1-h, a_0) mit $h>0$ ziehe man die Transversale $\mathfrak{t}_1$ von $\mathfrak{a}$. Falls $h>0$ hinreichend klein, existiert sie in $|a-a_0|\leq\delta$ und hat keinen Punkt mit $\mathfrak{r}$ gemein. Dann werde unter $\mathfrak{B}_1$ die einfach zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge der x, y-Ebene verstanden, die begrenzt wird durch die Kurven $\mathfrak{t}_1$, $E_{a_0-\delta}$, $E_{a_0+\delta}$ und $\mathfrak{t}_1$: $x=\varphi(t_1+h, a)$, $y=\psi(t_1+h, a)$, $|a-a_0|\leq\delta$. Falls $\delta>0$, $h>0$ hinreichend klein, wird sie durch $\mathfrak{r}$ in zwei einfach zusammenhängende Mengen zerlegt, auf deren einer, kein Stück des Bogens $[t_1, t_2]$ von E_0 enthaltender $F(t, a)>0$ ist, während auf der anderen $F(t, a)<0$ gilt. Ganz entsprechend werde eine Umgebung $\mathfrak{B}_2$ von P_2 konstruiert. Sei C eine zulässige Kurve, die in $\mathfrak{U}$ gelegen ist, deren Anfangspunkt sich in $\mathfrak{B}_1$ befindet, während ihr Endpunkt in $\mathfrak{B}_2$ liegt. Man darf für den weiteren Beweis annehmen, daß

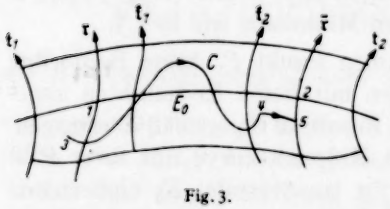

Fig. 3.

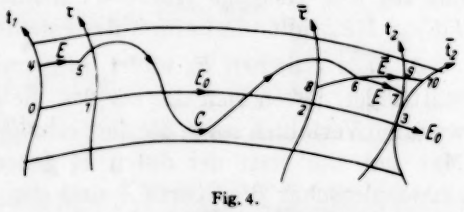

Fig. 4.

ersterer nicht hinter $\mathfrak{r}$, letzterer nicht vor $\bar{\mathfrak{r}}$ gelegen ist. Denn: Liege etwa ihr Endpunkt 4 (s. Figur 3) vor $\bar{\mathfrak{r}}$. Dann geht durch 4 genau eine Extremale $\overline{E}$ von $\bar{\mathfrak{a}}$. Bezeichnet man $C+\overline{E}_{45}$ mit $\bar{C}$, so ist $I(\bar{C})=I(C)+I(\overline{E}_{45})$, also wegen $I(\overline{E}_{45})<0$ $I(\bar{C})<I(C)$. Zeigt man daher, daß E_0 ein starkes Minimum unter den Kurven $\bar{C}$ liefert, deren Endpunkt auf $\bar{\mathfrak{r}}$ liegt, so gilt dasselbe erst recht für die genannten Kurven C. Liege nunmehr die in Fig. 4 dargestellte Situation vor. Nach dem HILBERTschen Unabhängigkeitssatz ist $I(E_{01})+I(E_{12})+I(E_{23})=I(E_{45})+H(C)+I(E_{67})$, wobei $H(C)$ das längs C genommene HILBERTsche unabhängige Integral ist, also $I(E_{12})=H(C)+I(E_{45})-I(E_{01})+I(E_{67})-I(E_{23})$ und daher $\Delta I=I(C)-I(E_{12})=\int_C \mathcal{E}\,dt+I(E_{01})-I(E_{45})+I(E_{23})-I(E_{67})$, wo $\mathcal{E}$ die WEIERSTRASSsche $\mathcal{E}$-Funktion auf dem Feld $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Hierin ist $I(E_{01})\geq I(E_{45})$ auf Grund des Transversalensatzes. Weiterhin geht durch 6 genau eine Extremale $\overline{E}$ von $\bar{\mathfrak{a}}$. Da nun E_{67} ein relatives Minimum unter allen stückweis glatten Kurven liefert, die in 6 beginnen und auf $\mathfrak{t}_2$ enden, ist $I(E_{67})\leq I(\overline{E}_{69})$. Andererseits ist $I(\overline{E}_{69})\leq I(\overline{E}_{8,10})$. Da auf Grund des auf die Schar $\bar{\mathfrak{a}}$ angewandten Transversalensatzes $I(E_{23})=I(\overline{E}_{23})=I(\overline{E}_{8,10})$, gilt $I(E_{67})\leq I(E_{23})$. Damit hat man $\Delta I=\int_C \mathcal{E}\,dt+\varkappa(C)$, wo beide Summanden ≥ 0 sind, was bei ersterem aus der WEIERSTRASS-Bedingung folgt.

III. Probleme mit einem freien und einem auf einer Kurve beweglichen Endpunkt.

Aus Symmetriegründen genügt es, Probleme mit kurvenbeweglichem Anfangspunkt und freiem Endpunkt zu betrachten.

1. Zulässige Kurven. Gegeben das Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y-Ebene und darin die Kurve $\mathfrak{f}$: $x=\xi(a)$, $y=\eta(a)$, $a_1<a<a_2$, von der Klasse $C^{(2)}$. Die stückweis

glatte Kurve C: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\leq t\leq t_2$, heiße zulässig, wenn

(1) $\qquad (x(t), y(t))\in\mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1\leq t\leq t_2,$

(2) $\qquad (x(t_1), y(t_1))\in\mathfrak{k},$

(3) $\qquad (x(t_1), y(t_1))\neq (x(t_2), y(t_2)).$

2. *Relatives Minimum.* Die zulässige Kurve E_0: $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$, $t_1\leq t\leq t_2$, mit dem Anfangspunkt $(x_0(t_1), y_0(t_1))=P_1=(\xi(a_0), \eta(a_0))$ und dem Endpunkt $(x_0(t_2), y_0(t_2))=P_2$ liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0, ein $\mathfrak{k}$-Bogen $\mathfrak{b}$: $x=\xi(a)$, $y=\eta(a)$, $|a-a_0|\leq\varepsilon$, und eine Umgebung $\mathfrak{P}$ von P_2 mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{P}<\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{P}=0$ existieren derart, daß für jede zulässige Kurve $C<\mathfrak{U}$ mit $(x(t_1), y(t_1))\in\mathfrak{b}$ und $(x(t_2), y(t_2))\in\mathfrak{P}$ $I(C)\geq I(E_0)$ gilt. Definition des eigentlichen Minimums wie in I.3.

3. Falls zwischen E_0 und $\mathfrak{k}$ im gemeinsamen Punkt P_1 keine Berührung stattfindet, lassen sich die bei den Methoden mit freien Endpunkten angewandten Verfahren sowie die dort erhaltenen Resultate sinngemäß übertragen. Man hat nur statt der durch P_1 gehenden Rißpunktkurve mit ihrer Rißextremalenschar die Kurve $\mathfrak{k}$ und die zu ihr transversale, E_0 einbettende Extremalenschar zu nehmen. Wenn sich jedoch E_0 und $\mathfrak{k}$ in P_1 berühren, ist die Existenz letzterer Schar nicht mehr gesichert. Dieser Fall wird im folgenden untersucht.

4. *Voraussetzungen.* Es wird also $\dot{a}_1\dot{\eta}(a_0)-\dot{b}_1\dot{\xi}(a_0)=0$ vorausgesetzt. Soll E_0 ein Minimum liefern, so muß die Transversalitätsbedingung $\dot{\xi}F_{\dot{x}}+\dot{\eta}F_{\dot{y}}|_1=0$ gelten. Da $\dot{x}F_{\dot{x}}+\dot{y}F_{\dot{y}}=F$, muß $F|_1=0$ sein. Eine weitere notwendige Bedingung für ein Minimum durch E_0 ist die Ungleichung $A_1\leq 0$ mit

$$A_1=\ddot{\xi}F_{\dot{x}}+\ddot{\eta}F_{\dot{y}}+L\dot{\xi}^2+2M\dot{\xi}\dot{\eta}+N\dot{\eta}^2|_1.$$

Diese der Brennpunktsbedingung entsprechende Relation heiße (B_1), ihre Verschärfung $A_1<0$ (B_1'). Diese Voraussetzungen einschließlich (V'), (A_2), (B_2') und (C_2) seien mit $(\overline{W})$ bezeichnet.

5. *Berührung 1. Ordnung zwischen E_0 und $\mathfrak{k}$.*

5.1. Es existiert eine Extremalenschar $\mathfrak{a}$: $x=\varphi(t, a)$, $y=\psi(t, a)$, $|a-a_0|\leq\delta$, $T_1\leq t\leq T_2$, welche E_0 für $a=a_0$ enthält und für die $\varphi(t_1, a)=\xi(a)$, $\psi(t_1, a)=\eta(a)$ sowie $\varphi_t(t_1, a)=\dot{\xi}(a)$, $\psi_t(t_1, a)=\dot{\eta}(a)$, die also $\mathfrak{k}$ gleichsinnig berührt. Infolgedessen gilt für die Schardeterminante $\Delta(t, a)$ von $\mathfrak{a}$ $\Delta(t_1, a)=0$, $\Delta_t(t_1, a)=(\dot{\xi}^2(a)+\dot{\eta}^2(a))^{\frac{3}{2}}\cdot(\varkappa(a)-k(t_1, a))$, wenn $\varkappa(a)$ die Krümmung von $\mathfrak{k}$ in a, $k(t, a)$ die Krümmung der $\mathfrak{a}$-Extremalen E_a im Punkt t ist. Falls E_0 und $\mathfrak{k}$ keine Berührung von höherer als der 1. Ordnung haben, ist bei a_0 $\Delta_t(t_1, a)\neq 0$. Dann bildet $\mathfrak{a}$ in $t_1\leq t\leq t_1+h$, $|a-a_0|\leq\delta$ für genügend kleines h, $\delta>0$ ein Feld[9]). Da vorausgesetzt ist, daß die verschärfte JACOBI-Bedingung gilt, folgert man hieraus weiter, daß $\mathfrak{a}$ in $t_1\leq t\leq T_2$, $|a-a_0|\leq\delta$ ein Feld um E_0

[9]) Siehe etwa BOLZA: Existence proof for a field of extremals tangent to a given curve. Trans. Amer. Math. Soc. 8, 399—404 (1907).

bildet, sofern E_0 doppelpunktfrei ist. Auf diesem Feld $\mathfrak{U}$ gilt der HILBERTsche Unabhängigkeitssatz natürlich dann, wenn man ihn auf E_0 und eine mit Ausnahme von P_1 im Feldinnern gelegene zulässige Kurve anwendet, aber auch noch dann, wenn die zulässige Kurve in zwei Teile zerfällt, von denen der eine ein $\mathfrak{k}$-Bogen ist, während der zweite im $\mathfrak{U}$-Innern liegt.

5.2. Da $\frac{d}{da} F(t_1, a)|_{a=a_0} = A_1 < 0$ ist, gilt

$$F(t_1, a) > 0 \quad \text{in} \quad a_0 - \delta \leq a < a_0, \qquad F(t_1, a) = 0 \quad \text{in} \quad a_0,$$
$$F(t_1, a) < 0 \quad \text{in} \quad a_0 < a \leq a_0 + \delta.$$

Nun ist das HILBERTsche Integral längs $\mathfrak{k}$ von a_0 bis a_1 mit $a_1 > a_0$ gegeben durch

$$H(\mathfrak{k}_{01}) = \int_{a_0}^{a_1} \left(F_{\dot{x}}(t_1, a)\, \dot{\xi}(a) + F_{\dot{y}}(t_1, a)\, \dot{\eta}(a)\right) da = \int_{a_0}^{a_1} F(t_1, a)\, da,$$

das HILBERTsche Integral längs der entgegengesetzt $\mathfrak{k}$ orientierten Kurve $\mathfrak{k}^{-1}$ von a_0 bis a_1 mit $a_0 > a_1$ durch $H(\mathfrak{k}_{01}^{-1}) = -\int_{a_0}^{a_1} F(t_1, a)\, da$. Also ist $H(\mathfrak{k}_{01}) < 0$ für $a_1 > a_0$, $H(\mathfrak{k}_{01}^{-1}) < 0$ für $a_1 < a_0$.

5.3. Auf Grund von (A_2), (B_2') und $\Delta(t_2, a_0) \neq 0$ kann man den Kurvenparameter a von $\mathfrak{k}$ auf $\bar{\mathfrak{k}}$ als zulässigen Parameter einführen. Diese Transformation denke man sich von vornherein durchgeführt und durch zulässige Parametertransformationen in t und a die bekannten Verhältnisse bei P_2 hergestellt.

Dann ist $\Delta(t_2, a_0) = \bar{\Delta}(t_2, a_0) \neq 0$, woraus

$$\Delta(t, a_0) - \bar{\Delta}(t, a_0) = \left(\Delta_t(t_2, a_0) - \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)\right) w_2(t), \qquad T_1 \leq t \leq T_2,$$

folgt. Dabei ist $w_2(t)$ diejenige Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen $w_2(t_2) = 0$, $\dot{w}_2(t_2) = 1$ genügt. Werde jetzt $\Delta(t_2, a_0) < 0$ angenommen, da für $\Delta(t_2, a_0) > 0$ die folgende Überlegung analog ist. Es sei gleichzeitig $\Delta_t(t_2, a_0) > \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)$. Dann gilt wegen $w_2(t) < 0$ in $[t_1, t_2)$ $\Delta(t, a_0) - \bar{\Delta}(t, a_0) < 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Da $\Delta(t_1, a_0) = 0$, muß $\bar{\Delta}(t_1, a_0) > 0$ sein. Andererseits ist aber $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) < 0$. Also müßte in (t_1, t_2) mindestens eine Nullstelle von $\bar{\Delta}(t, a_0)$ liegen, was der Voraussetzung (C_2) widerspricht. Somit muß für $\Delta(t_2, a_0) < 0$ $\Delta_t(t_2, a_0) \leq \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)$ gelten. Es gilt also in P_2: $\Delta_t - \bar{\Delta}_t \geq 0$ für $\Delta > 0$, $\Delta_t - \bar{\Delta}_t \leq 0$ für $\Delta < 0$. Ersetzt man (C_2) durch (C_2'), so kann man in den letzten beiden Ungleichungen die Gleichheitszeichen weglassen.

Obwohl diese Aussage ihrer Form nach ein Analogon zu (C_{12}) darstellt, ist sie keine neu hinzutretende notwendige Bedingung für ein Minimum durch E_0, sondern ergibt sich aus den bereits vorhandenen notwendigen Bedingungen. Bei dem vorliegenden Problem gibt es also kein Analogon der BLISSschen Bedingung, welches zusätzlich zu den bereits vorhandenen notwendigen Bedingungen hinzutreten muß, ehe E_0 ein Minimum liefern kann.

5.4. Macht man nun die Voraussetzungen $(\overline{W})$, wobei jedoch (C_2) zu (C_2') verschärft sei, und nimmt außerdem an, daß E_0 doppelpunktfrei ist, der

verschärften WEIERSTRASS-Bedingung genügt und mit $\mathfrak{k}$ in P_1 eine Berührung von genau 1. Ordnung hat, so liefert E_0 ein eigentliches Minimum unter allen zulässigen Kurven, die in dem oben konstruierten Feld um E_0 liegen, nur ihren Anfangspunkt mit $\mathfrak{k}$ gemeinsam haben und deren Endpunkt in einer hinreichend engen Umgebung von P_2 liegt. Dies zeigt man auf Grund der bisherigen Resultate durch eine Konstruktion, die der beim Beweise von Satz 6 durchgeführten analog ist. Ist statt (C_2') nur (C_2) erfüllt, so ergibt sich mit Hilfe des ZERMELO-KNESERschen Enveloppensatzes, daß E_0 kein Minimum unter den eben definierten Kurven zu liefern braucht.

6. Berührung beliebiger Ordnung zwischen E_0 und $\mathfrak{k}$.

6.1. Zu der gegebenen Kurve $\mathfrak{k}$ läßt sich stets eine Schar berührender Extremalen konstruieren, welche E_0 enthält. Falls jedoch E_0 und $\mathfrak{k}$ in P_1 eine Berührung von höherer als der 1. Ordnung haben, ist die Determinante dieser Schar längs E_0 identisch Null. Es läßt sich dann nicht mehr nachweisen, daß sie ein Feld um E_0 bildet, auch nicht im kleinen. Daß dies tatsächlich nicht der Fall zu sein braucht, sieht man an dem extremen Fall des Zusammenfallens von $\mathfrak{k}$ mit dem E_0-Bogen um den Punkt P_1. Es tritt hier zum erstenmal in der Behandlung der vorliegenden Probleme der Fall ein, daß es nicht möglich ist, eine E_0 enthaltende Extremalenschar zu konstruieren, die durch das Problem in irgendeiner Weise ausgezeichnet ist. Um letzteres zu lösen, muß daher die bisher angewandte Methode des Scharintegrals aufgegeben und statt ihrer ein anderes Verfahren benutzt werden: Die Methode des Extremalenintegrals[10]).

6.2. Da E_0 eine Extremale ist und die verschärfte LEGENDRE- und JACOBI-Bedingung erfüllt, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß von jedem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathfrak{Q}_1$: $|x_1 - a_1| < \delta$, $|y_1 - b_1| < \delta$ nach jedem Punkt $(x_2, y_2) \in \mathfrak{Q}_2$: $|x_2 - a_2| < \delta$, $|y_2 - b_2| < \delta$ genau eine Extremale $\overline{E}$ geht. Ihr Tangentenwinkel in ihrem Anfangspunkt sei $\vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Diese Extremalenmenge ist gegeben durch

$$\overline{E}: \begin{aligned} x &= X\left(t - t_1, x_1, y_1, \vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)\right) \\ y &= Y\left(t - t_1, x_1, y_1, \vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)\right) \end{aligned},$$

$$\mathfrak{G}_5: \; T_1 \leq t \leq T_2, (x_1, y_1) \in \mathfrak{Q}_1, (x_2, y_2) \in \mathfrak{Q}_2.$$

Der Punkt (x_1, y_1) entspricht dem Parameterwert t_1, der Punkt (x_2, y_2) dem Parameterwert $t_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Auf $\mathfrak{G}_5$ ist $X_t^2 + Y_t^2 > 0$ und $F_1(X, Y, X_t, Y_t) > 0$. Außerdem liegt $\overline{E}$ in einer beliebig engen Umgebung von E_0, falls δ hinreichend klein.

Bezeichnet man insbesondere diejenigen Extremalen $\overline{E}$, die auf $\mathfrak{k}$ beginnen, mit E, so ist

$$E: \begin{aligned} x &= X\left(t - t_1, \xi(a), \eta(a), \vartheta(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2)\right) = \overline{X}(t; a, x_2, y_2) = x(t), \\ y &= Y\left(t - t_1, \xi(a), \eta(a), \vartheta(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2)\right) = \overline{Y}(t; a, x_2, y_2) = y(t), \end{aligned}$$

[10]) Siehe BOLZA, 306—313.

$t_1 \leqq t \leqq t_2$, $|a - a_0| \leqq \varepsilon$, $(x_2, y_2) \in \mathfrak{Q}_2$, wo ε eine hinreichend kleine Zahl > 0 ist. Ist das längs E genommene Variationsintegral $I(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2) = J(a, x_2, y_2)$, so sind die ersten und zweiten Ableitungen desselben an der Stelle $a = a_0$, $(x_2, y_2) = (a_2, b_2) = P_2$:

$$J_a = -(\dot{\xi} F_x + \dot{\eta} F_y)|_1, \quad J_{x_2} = F_{\dot{x}}|_2, \quad J_{y_2} = F_{\dot{y}}|_2,$$

$$J_{aa} = -A_1 + F_1(t_1)\left(\dot{x}_0(t_1)\,\dot{\eta}(a_0) - \dot{y}_0(t_1)\,\dot{\xi}(a_0)\right)^2 z_1(t_2) = -A_1,$$

$$J_{a x_2} = \frac{1}{w_1(t_2)} F_1(t_1)\,\dot{y}_0(t_2)\left(\dot{x}_0(t_1)\,\dot{\eta}(a_0) - \dot{y}_0(t_1)\,\dot{\xi}(a_0)\right) = 0,$$

also $J_{x_2 a} = 0$,

$$J_{x_2 x_2} = L(t_2) - F_1(t_2)\,\dot{y}_0^2(t_2)\,z_2(t_1),$$

$$J_{y_2 y_2} = N(t_2) - F_1(t_2)\,\dot{x}_0^2(t_2)\,z_2(t_1),$$

$$J_{x_2 y_2} = M(t_2) + F_1(t_2)\,\dot{x}_0(t_2)\,\dot{y}_0(t_2)\,z_2(t_1).$$

Hierin ist $z_1(t) = \frac{\omega_1(t)}{w_1(t)}$, wobei $w_1(t)$, $\omega_1(t)$ die Lösungen der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung mit $w_1(t_1) = 0, \dot{w}_1(t_1) = 1, \omega_1(t_1) = 1, \dot{\omega}_1(t_1) = 0$ sind, und Entsprechendes gilt für $z_2(t)$.

6.3. Damit E_0 unter den Kurven E ein Minimum liefert, muß $J(a, x_2, y_2)$ für $a = a_0$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ ein Minimum besitzen. Dazu ist notwendig, daß für dieses Wertetripel

$$J_a = 0, \quad J_{\dot{x}_2} = 0, \quad J_{y_2} = 0 \quad \text{und}$$

$$J_{aa} \geqq 0, \qquad \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{a x_2} \\ J_{a x_2} & J_{x_2 x_2} \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{a x_2} & J_{a y_2} \\ J_{x_2 a} & J_{x_2 x_2} & J_{x_2 y_2} \\ J_{y_2 a} & J_{y_2 x_2} & J_{y_2 y_2} \end{vmatrix} \geqq 0$$

gilt. Läßt man in den letzteren Ungleichungen das Gleichheitszeichen weg, so sind die so erhaltenen Bedingungen hinreichend für ein eigentliches Minimum durch E_0 bezüglich der Extremalen E.

Die Auswertung der ersten vier Relationen liefert

$$\dot{\xi} F_{\dot{x}} + \dot{\eta} F_{\dot{y}}|_1 = 0, \qquad F_{\dot{x}}|_2 = 0, \qquad F_{\dot{y}}|_2 = 0, \qquad A_1 \leqq 0,$$

also (A_1), (A_2), (B_1). Im folgenden werde wieder $A_1 < 0$, also $J_{aa}|_2 > 0$ vorausgesetzt. Damit wird aus den beiden Determinantenbedingungen

$$J_{x_2 x_2}|_2 \geqq 0, \quad J_{x_2 x_2} J_{y_2 y_2} - J_{x_2 y_2}^2|_2 \geqq 0.$$

Diese beiden gilt es jetzt weiter zu behandeln, zunächst die erstere.

Aus den Gleichungen für $J_{x_2 x_2}$, $J_{y_2 y_2}$, $J_{x_2 y_2}$ folgt

$$\dot{x}^2 J_{x_2 x_2} + 2\dot{x}\,\dot{y}\,J_{x_2 y_2} + \dot{y}^2 J_{y_2 y_2}|_2 = \dot{x}^2 L + 2\dot{x}\,\dot{y}\,M + \dot{y}^2 N|_2 = Q(\dot{x}, \dot{y})|_2.$$

Man denke sich nun eine Drehung des Koordinatensystems ausgeführt so, daß die Tangente an E_0 in t_2 die Neigung Null hat. Dann transformiert sich

das vorgelegte Variationsproblem in ein äquivalentes Problem [11]). Dabei gehe $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ in $(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ und $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ in $G(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ über. Dann gilt $\dot{v}_0(t_2) = 0$, also $\dot{u}_0(t_2) \neq 0$, wenn nach der Transformation E_0: $u = u_0(t)$, $v = v_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Obige quadratische Form ist invariant gegen diese Transformation, denn es ist $Q(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} F_x + \dot{y} F_y = \dot{u} G_u + \dot{v} G_v = \dot{u}^2 \tilde{L} + 2\dot{u}\dot{v}\tilde{M} + \dot{v}^2 \tilde{N} = \tilde{Q}(\dot{u}, \dot{v})$, wo $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ die transformierten Funktionen L, M, N sind. Denkt man sich diese Transformation von vornherein durchgeführt und dann die Methode des Extremalenintegrals angewandt, so ergibt sich bei Beibehaltung der alten Bezeichnungen $Q(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 J_{x_1 x_2}$, also $Q(\dot{x}, \dot{y})|_2 \geq 0$. Da Q invariant, ist auch nach der Rücktransformation $Q(\dot{x}, \dot{y})|_2 \geq 0$, d.h. $\dot{x} F_x + \dot{y} F_y|_2 \geq 0$, womit (B_2) abgeleitet ist.

Unter der etwas stärkeren Voraussetzung (B_2') geht $J_{x_1 x_1} J_{y_1 y_1} - J_{x_1 y_1}^2|_2 \geq 0$ über in $A_2 - B_2 z_2(t_1) \geq 0$ oder $A_2 w_2(t_1) - B_2 \omega_2(t_1) \leq 0$. Die Funktion $\Omega(t) = A_2 w_2(t) - B_2 \omega_2(t)$ stellt eine wegen $\Omega(t_2) = -B_2$ nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung dar, für die $A_2 \Omega + B_2 \dot{\Omega}|_2 = 0$ gilt. Andererseits ist $A_2 \bar{\Delta} + B_2 \bar{\Delta}_t|_2 = 0$ und daher $\bar{\Delta}(t, a_0) = c\Omega(t)$ mit $c \neq 0$. Es ist nun $\Omega(t_1) \leq 0$. Daher kann $\Omega(t)$ in (t_1, t_2) keine Nullstelle haben. Denn da $\Omega(t_2) < 0$ ist, müßte $\Omega(t)$ sonst in $[t_1, t_2)$ mindestens zwei verschiedene Nullstellen besitzen. Da jedoch $\Omega(t)$ von $w_2(t)$ linear unabhängig ist und $w_2(t)$ auf Grund der verschärften JACOBIschen Bedingung in $[t_1, t_2)$ nicht verschwindet, ist dies ausgeschlossen. Also ist $\Omega(t) < 0$ in $(t_1, t_2]$ und damit $\bar{\Delta}(t, a_0) \neq 0$ in $(t_1, t_2]$. Aus obiger Determinantenbedingung folgt somit (C_2).

Umgekehrt ergeben sich aus (A_1), (B_1'), (A_2), (B_2'), (C_2') die Relationen $J_a = 0$, $J_{x_1} = 0$, $J_{y_2} = 0$, $J_{aa} > 0$, $J_{x_1 x_1} > 0$, $J_{x_1 x_1} J_{y_1 y_1} - J_{x_1 y_1}^2 > 0$, d.h. E_0 liefert dann ein eigentliches Minimum unter den Extremalen E.

6.4. Auf Grund der in 6.3. erhaltenen Resultate läßt sich unter Benutzung einer Methode, die von A. ROSENBLATT für Probleme mit kurvenbeweglichen Endpunkten entwickelt wurde [12]) und die sich mit geringfügigen Modifikationen auf das vorliegende Problem übertragen läßt, als hinreichende Bedingung *Satz 7* herleiten:

Besitzt die Extremale E_0 in P_1 eine Berührung beliebiger Ordnung mit $\mathfrak{k}$, so sind die verschärfte LEGENDRE*sche,* JACOBI*sche und* WEIERSTRASS*sche Bedingung sowie (A_1), (B_1'), (A_2), (B_2'), (C_2') zusammen hinreichend für ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$ durch E_0, sofern E_0 doppelpunktfrei ist.*

[11]) BOLZA, 344.

[12]) Sur les problèmes du calcul des variations etc. Krak. Anz. **1919**, 36—39.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 1. Dezember 1952.)

WITT, E.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 113—114 (1953)

Über freie Ringe und ihre Unterringe.

Von

ERNST WITT.

O. SCHREIER hat 1927 den Satz bewiesen[1]):

In einer freien Gruppe sind alle Untergruppen wieder frei.

Es entsteht die Frage, ob es andere freie Strukturen mit ähnlicher Eigenschaft gibt. (Unter Struktur wird hier eine Algebra im Sinne von BIRKHOFF mit Regeln verstanden.) Ein bekanntes Beispiel bieten die freien abelschen Gruppen:

Jede Untergruppe $\mathfrak{B}$ einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ ist wieder frei.

Beweis. $\{a_\nu\}$ sei eine wohlgeordnete linear unabhängige Basis von $\mathfrak{A}$. δ_ν bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten λ_ν derjenigen Elemente aus $\mathfrak{B}$, die die Gestalt $\sum_{i \leq \nu} \lambda_i a_i$ haben. Falls $\delta_\nu \neq 0$ ist, sei b_ν eines dieser Elemente mit $\lambda_\nu = \delta_\nu$. Diese b_ν sind dann linear unabhängig und erzeugen, wie sich durch transfinite Induktion ergibt, die Untergruppe $\mathfrak{B}$. (Während im allgemeinen der Wohlordnungssatz vorteilhaft durch den Satz von ZORN ersetzt werden kann, liegt im vorliegenden Beweise ein Fall vor, bei dem der Wohlordnungssatz selbst in natürlicher Weise zur Geltung kommt.)

Ein einfaches Beispiel sind auch die *Moduln über einem Schiefkörper*. Nach dem Satz von HAMEL besitzen sie immer eine linear unabhängige Basis (wie sofort aus dem Satz von ZORN folgt), daher sind alle Moduln, also auch alle Untermoduln frei.

Dagegen zeigt sich, daß sich die *freien assoziativen Ringe* $\mathfrak{A}$ *andersartig* verhalten. Wir können uns auf eine Erzeugende x beschränken. $\mathfrak{A}$ besteht dann aus allen Polynomen $f(x)$ ohne konstantes Glied. Zunächst sieht man: $\mathfrak{A}$ enthält keinen freien Unterring mit zwei Erzeugenden f, g. Denn $f^\alpha g^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ wären sonst m^2 linear unabhängige Polynome vom Grade $\leq m \cdot \operatorname{Grad} f\, g$, und das ist für genügend großes m sicher falsch. Nun ergibt sich: Der von x^2, x^3 erzeugte Unterring $\mathfrak{B}$ ist nicht frei. Denn $\mathfrak{B}$ hätte dann nur eine Erzeugende f vom Grade $n \geq 2$, und wegen $x^2 = \varphi(f)$, $x^3 = \psi(f)$ wäre n gemeinsamer Teiler von 2 und 3, was nicht geht.

Es gibt dagegen *nichtassoziative Ringe*, für welche sich der Satz von SCHREIER übertragen läßt. Verstehen wir unter einem *Ring* eine additive Gruppe G, in der nur eine beiderseits distributive Multiplikation erklärt ist,

[1]) SCHREIER, O.: Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 161—183 (1927).

so läßt sich der folgende Satz aussprechen, dessen direkter Beweis das Ziel dieser Arbeit ist[2]):

Satz. *In einem freien Ring ist jeder Unterring wieder frei.*

Bemerkung. Verstehen wir analog unter einem *Multiring* eine additive Gruppe G, in der noch eine multilineare Verknüpfung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erklärt ist, so läßt sich der Beweis des vorangehenden Satzes ohne Mühe hierauf erweitern: *In einem freien Multiring ist jeder Untermultiring wieder frei.* In einer weiteren Arbeit soll der tieferliegende und wegen seiner Anwendung auf die Gruppentheorie und die kombinatorische Topologie wichtigere Satz bewiesen werden:

In einem freien LIE*schen Ring ist jeder Unterring wieder frei*[3]).

$\mathfrak{A}$ sei ein von den Elementen x_i erzeugter freier Ring, $\mathfrak{B}$ ein Unterring (mit einem Körper K als Koeffizientenbereich). $\mathfrak{A}_n$ bezeichne den Modul der Elemente von $\mathfrak{A}$ vom Grad $\leq n$ in den x_i, und es sei $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{B}$.

Um zu beweisen, daß $\mathfrak{B}$ ein freier Ring ist, sollen rekursiv Mengen B_n, C_n linear unabhängiger Elemente gebildet werden mit

$$C_n = B_n \cup \bigcup_1^{n-1} C_\nu C_{n-\nu}$$

in der Weise, daß C_n linear $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_{n-1}$ erzeugt. Ist bereits C_ν für alle $\nu < n$ gebildet, so kann C_ν zu einer linear unabhängigen Basis A_ν von $\mathfrak{A}_\nu/\mathfrak{A}_{\nu-1}$ ergänzt werden. Da $\mathfrak{A}$ ein freier Ring ist, ist die Menge

$$\bigcup_1^{n-1} A_\nu A_{n-\nu} \bmod \mathfrak{A}_{n-1}$$

linear unabhängig. Folglich erst recht die Menge

$$\bigcup_1^{n-1} C_\nu C_{n-\nu} \bmod \mathfrak{B}_{n-1},$$

und diese Menge kann dann mittels B_n zu einer linear unabhängigen Basis C_n von $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_{n-1}$ ergänzt werden.

Die Elemente aus B_μ denken wir uns mit dem Gewicht μ versehen und berechnen entsprechend das Gewicht für Monome aus $\bigcup_1^\infty B_\mu$. Durch Induktion nach n folgt, daß C_n genau aus den verschiedenen derartigen Monomen vom Gewicht n besteht. Nun ist aber $\bigcup_1^\infty C_n$ eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{B}$, also ist $\bigcup_1^\infty B_\mu$ ein System freier Erzeugender von $\mathfrak{B}$, q. e. d.

[2]) Diesen Satz hat A. KUROSH auf andere Weise bewiesen, nämlich zunächst für Ringe mit einer Erzeugenden, in denen dann freie Unterringe mit abzählbar vielen Erzeugenden nachgewiesen werden; das genügt. Vgl. KUROSH, A.: Nonassociative free algebras and free product of algebras. Mat. Sbornik, N. Ser. **20** (**62**), 239—262 (1947) (russisch mit engl. Zusammenfassung).

[3]) Diesen Satz habe ich 1937 vermutet, aber erst 1940 beweisen können. 1942 habe ich darüber in Berlin und 1944 in Göttingen vorgetragen.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 16. Oktober 1952.)

LADEGAST, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 115—159 (1953)

Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen.

Von
KONRAD LADEGAST.

§ 1. Vorbemerkungen.

Aus einer leichten Verallgemeinerung des BIEBERBACHschen Flächensatzes lassen sich eine Anzahl von Eigenschaften der schlichten Funktionen ableiten, von denen einige meines Wissens nicht in der Literatur enthalten sind, und die daher nachstehend veröffentlicht werden sollen.

Abweichend von dem allgemeinen Gebrauch werden im folgenden Funktionen betrachtet, die nicht im Einheitskreise, sondern in einem festen Kreise $|z|<R$ schlicht sind. Diese Formulierung bietet die Möglichkeit zu einer Umkehrung der Fragestellung, d.h. es kann an einigen Stellen die Frage beantwortet werden, in welchem Kreise höchstens eine in einem Punkte reguläre Funktion auch schlicht sein kann.

Ausnahmslos wird in den untenstehenden Formeln unter $f(z)$ eine im Kreise $|z|<R$ schlichte und reguläre Funktion verstanden, die im Nullpunkt verschwindet,

$$f(z)=c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\cdots, \tag{1}$$

unter $F(z)$ eine in demselben Kreise schlichte Funktion, die im Punkte p, $0<|p|<R$, einen Pol mit dem Hauptteil $\frac{P}{z-p}$ besitzt, und deren Entwicklung im Kreise $|z|<|p|$

$$F(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\cdots \tag{2}$$

lautet, und schließlich unter $g(z)$ eine ebenfalls für $|z|<R$ schlichte Funktion mit Pol im Nullpunkt,

$$g(z)=b_{-1} z^{-1}+b_0+b_1 z+b_2 z^2+\cdots. \tag{3}$$

Mit $N_1, N_2, N_3, \ldots$ werden Zahlen bezeichnet, die unter den Werten einer schlichten Funktion im Innern des Kreises $|z|<R$ nicht vorkommen, mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ Randwerte.

§ 2. Der verallgemeinerte Flächensatz und eine aus ihm hervorgehende allgemeine Funktionalungleichung für schlichte Funktionen.

Aus der schlichten Funktion $f(z)$ [§ 1, (1)] läßt sich eine von zwei Parametern z_1 und z_2, $|z_1|, |z_2|<R$, abhängige schlichte Funktion

$$q(t)=\frac{1}{f\left(R^2\,\frac{z_1+t}{R^2+\bar{z}_1 t}\right)-f(z_2)} \tag{1}$$

herleiten. Diese besitzt einen Pol p, der sich aus der Gleichung

$$R^2 \frac{z_1 + p}{R^2 + \bar{z}_1 p} = z_2$$

mit

$$p = R^2 \frac{z_2 - z_1}{R^2 - \bar{z}_1 z_2} \tag{2}$$

ergibt.

Es werde

$$t = r e^{i\vartheta}, \quad |p| < r < R$$

gesetzt. Die Bilder der Kreise $r = \text{Const.}$, falls ϑ von 0 auf 2π zunimmt, sind einfache geschlossene Kurven mit negativem Umlaufssinn. Das von einer solchen Bildkurve begrenzte Flächenstück besitzt also negativen Inhalt, d.h. es gilt die Formel

$$I = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(r e^{i\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\bar{\varphi}(r e^{-i\vartheta})]\, d\vartheta < 0. \tag{3}$$

Zu ihrer Auswertung dient die Reihendarstellung

$$\varphi(t) = \frac{\varkappa}{t - p} + k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots, \tag{4}$$

die auf nachstehende Formeln führt:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} [\bar{\varphi}(r e^{-i\vartheta})] = \frac{i \bar{\varkappa} r e^{-i\vartheta}}{(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2} - i (\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = -\frac{|\varkappa|^2 r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\vartheta}\, d\vartheta}{(r e^{i\vartheta} - p)(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2}$$

$$I_2 = \frac{\varkappa}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r e^{i\vartheta} - p} (\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots) \right] d\vartheta$$

$$I_3 = -\frac{\bar{\varkappa} r}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-i\vartheta}}{(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2} (k_0 + k_1 r e^{i\vartheta} + k_2 r^2 e^{2i\vartheta} + \cdots) \right] d\vartheta$$

$$I_4 = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(k_0 + k_1 r e^{i\vartheta} + k_2 r^2 e^{2i\vartheta} + \cdots)(\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots)]\, d\vartheta.$$

Die Integration ergibt

$$I_1 = -\frac{|\varkappa|^2 r}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{p}{r^2} e^{-i\vartheta} + \frac{p^2}{r^3} e^{-2i\vartheta} + \cdots \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\bar{p}}{r^3} e^{i\vartheta} + \frac{3\bar{p}^2}{r^4} e^{2i\vartheta} + \cdots \right) \right] d\vartheta$$

$$= -|\varkappa|^2 r \pi \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2|p|^2}{r^5} + \frac{3|p|^4}{r^7} + \cdots \right) = -\frac{|\varkappa|^2 r^2 \pi}{(r^2 - |p|^2)^2}$$

$$I_2 = I_3 = 0$$

$$I_4 = \pi (|k_1|^2 r^2 + 2|k_2|^2 r^4 + 3|k_3|^2 r^6 + \cdots).$$

Mithin lautet der explizite Ausdruck von (3) vermöge (4):

$$(5)\qquad \begin{cases} -\dfrac{|\varkappa|^2}{(r^2-|p|^2)^2}+|k_1|^2+2|k_2|^2r^2+3|k_3|^2r^4+\cdots<0 \\ \text{für jedes } r,\quad |p|<r<R. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$|k_1|<\frac{|\varkappa|}{r^2-|p|^2}$$

und sogar

$$(6)\qquad |k_1|\leq\frac{|\varkappa|}{R^2-|p|^2}.$$

Es handelt sich nun darum, die Größen k_1 und $\varkappa$ durch $f(z)$ auszudrücken. Aus (4), (1) und (2) folgt

$$\varkappa=\lim_{t=p}[(t-p)\varphi(t)]=\frac{(R^2+\bar{z}_1p)^2}{f'\left(R^2\dfrac{z_1+p}{R^2+\bar{z}_1p}\right)R^2(R^2-|z_1|^2)}=\frac{R^2(R^2-|z_1|^2)}{(R^2-\bar{z}_1z_2)^2f'(z_2)}.$$

Hieraus und aus den gleichen Formeln findet man

$$k_1=\varphi'(0)+\frac{\varkappa}{p^2}=-\frac{f'(z_1)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}\,\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2}+\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2(z_2-z_1)^2f'(z_2)}.$$

Durch Substitution der Werte von k_1, $\varkappa$, p geht (6) über in

$$\left|\frac{-f'(z_1)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}\,\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2}+\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2(z_2-z_1)^2f'(z_2)}\right|\leq\frac{R^2-|z_1|^2}{[|R^2-\bar{z}_1z_2|^2-R^2|z_2-z_1|^2]\,|f'(z_2)|},$$

$$\left|\frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}-\frac{1}{(z_2-z_1)^2}\right|\leq\frac{R^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}.$$

Diese Funktionalungleichung ist offenbar invariant gegenüber ganzen linearen Transformationen der abhängigen Variablen. Sie ist es auch gegenüber gebrochenen, da sie insbesondere durch die Transformation $f(z)=\dfrac{1}{F(z)-N}$ in sich übergeht. Also gilt allgemein

$$(7)\qquad \left|\frac{F'(z_1)F'(z_2)}{(F(z_2)-F(z_1))^2}-\frac{1}{(z_2-z_1)^2}\right|\leq\frac{R^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}.$$

Die Funktionalungleichung ist auch invariant gegenüber linearen Transformationen der unabhängigen Variablen, die den Kreis $|z|\leq R$ in sich überführen. Dies geht aus folgenden Gleichungen hervor:

$$(8)\qquad \begin{cases} z=\varepsilon R^2\dfrac{s+\alpha}{R^2+\bar{\alpha}s}, \qquad |\alpha|<R, \qquad |\varepsilon|=1 \\ F(z)=\Phi(s), \qquad F'(z)=\Phi'(s)\bar{\varepsilon}\dfrac{(R^2+\bar{\alpha}s)^2}{R^2(R^2-|\alpha|^2)} \\ z_2-z_1=\varepsilon R^2\dfrac{(R^2-|\alpha|^2)(s_2-s_1)}{(R^2+\bar{\alpha}s_1)(R^2+\bar{\alpha}s_2)}, \quad R^2-|z|^2=R^2\dfrac{(R^2-|\alpha|^2)(R^2-|s|^2)}{|R^2+\bar{\alpha}s|^2}. \end{cases}$$

Um festzustellen, ob es schlichte Funktionen gibt, für die in (7) das Gleichheitszeichen gilt, möge von der Funktion $\varphi(t)$ ausgegangen werden. Wenn für eine

schlichte Funktion die Ungleichung (6) in eine Gleichung übergehen soll, muß sein

$$k_2 = k_3 = k_4 = \cdots = 0;$$

es werde gesetzt

$$\varkappa = \lambda k_1 (R^2 - |p|^2), \qquad |\lambda| = 1;$$

dafür, daß

$$\varphi(t) = \frac{\varkappa}{t - p} + k_0 + k_1 t$$

schlicht ausfällt, ist notwendig und hinreichend, daß jedem Werte t_1, $|t_1| < R$, vermöge der Gleichung $\varphi(t_2) = \varphi(t_1)$ ein t_2, $|t_2| > R$ zugeordnet wird. Der einzige Wert von λ, der dieser Bedingung genügt, ist $\lambda = -\frac{p}{\bar{p}}$. Es gilt dann

$$t_2 = \frac{p}{\bar{p}} \frac{\bar{p} t_1 - R^2}{t_1 - p},$$

d.h. $\varphi(t)$ gestattet eine Transformation, die das Kreisinnere in das Kreisäußere und den Rand in sich überführt. Diese Eigenschaft überträgt sich gemäß Gl. (1) auf $f(z)$. Zwecks genauer Feststellung der Schrankenfunktionen ist also in (7) eine gebrochene Funktion zweiten Grades zu substituieren, die eine Transformation der bezeichneten Art zuläßt. Nach Anwendung einer linear gebrochenen Transformation darf die Funktion zweiten Grades ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$F(z) = \frac{2Rz + \alpha z^2}{(R + \beta z)^2} \tag{9}$$

angesetzt werden. Aus

$$F(z_2) - F(z_1) = \frac{R(z_2 - z_1)}{(R + \beta z_1)^2 (R + \beta z_2)^2} [2R^2 + \alpha R(z_1 + z_2) + 2\beta(\alpha - \beta) z_1 z_2]$$

findet man nach kurzer Rechnung als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Möglichkeit einer Transformation der obengenannten Art:

$$|\beta| = |\gamma| = |\alpha - \beta| = 1, \qquad \gamma \neq \beta. \tag{10}$$

Die Substitution von $F(z)$ in (7) führt auf

$$\left| \frac{4(R + \beta z_1)(R + \beta z_2)(R + \gamma z_1)(R + \gamma z_2)}{[2R^2 + \alpha R(z_1 + z_2) + 2\beta\gamma z_1 z_2]^2} - 1 \right| \leq \frac{R^2 |z_2 - z_1|^2}{(R^2 - |z_1|^2)(R^2 - |z_2|^2)},$$

woraus man nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von (10)

$$|\,|\alpha|^2 (R^2 + \bar{z}_1 z_2) + 2R(\bar{\alpha}\bar{z}_1 + \alpha z_2)| \geq 0$$

findet. Gleichheit tritt in dieser Relation nur ein für

$$z_2 = -\frac{\bar{\alpha} R}{\alpha} \frac{\alpha R + 2\bar{z}_1}{2R + \bar{\alpha}\bar{z}_1}. \tag{11}$$

Im Falle $\alpha = 0$ lautet die Bedingung

$$z_2 = \bar{\beta}^2 \bar{z}_1. \tag{12}$$

Diese Gleichungen ordnen umkehrbar eindeutig jedem Punkt z_1, $|z_1| \leq R$, einen Punkt z_2, $|z_2| \leq R$, zu. Offenbar bleibt diese Eigenschaft bei jeder Transformation der unabhängigen Variablen, die den Kreis in sich überführt, erhalten.

Satz 1. *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Relation*

$$\left| \frac{F'(z_1)\,F'(z_2)}{[F(z_2) - F(z_1)]^2} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \right| \leq \frac{R^2}{(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)}.$$

Die Ungleichung ist invariant gegenüber linearen Transformationen der unabhängigen Variablen, die den Kreis $|z| \leq R$ in sich überführen, und gegenüber beliebigen linearen Transformationen der abhängigen Variablen. Ausschließliche Schrankenfunktionen sind die gebrochenen Funktionen zweiten Grades gemäß den Gl. (9) *und* (10) *sowie deren linear gebrochene Funktionen; Gleichheit tritt ein für die Wertepaare laut Gl.* (11) *bzw.* (12).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Koebeschen Schrankenfunktionen, die sich aus (9) für $\alpha = 0$ ergeben. Die nähere Durchrechnung zeigt, daß auch die aus vorstehendem Satze durch Abschwächung hervorgehende Formel

$$(13) \qquad \frac{|F'(z_1)\,F'(z_2)|}{|F(z_1) - F(z_2)|^2} \leq \frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2\,(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)}$$

scharf ist und dieselben Schrankenfunktionen besitzt.

§ 3. Anwendung der Funktionalungleichung von § 2 auf Funktionen mit reeller Potenzreihenentwicklung und ungerade Funktionen.

Als erste Anwendung des Satzes 1 bzw. der Formel (13) § 2, erhält man für schlichte Funktionen, die eine Potenzreihenentwicklung mit reellen Koeffizienten besitzen, wenn man $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$ setzt,

$$(1) \qquad \left| \frac{F'(z)}{F(z) - F(\bar{z})} \right| \leq \frac{|R^2 - z^2|}{|z - \bar{z}|\,(R^2 - |z|^2)}.$$

Wie man aus den Formeln (9) bis (12), § 2 entnimmt, geht diese Ungleichung in eine Gleichung über für die Funktion $\frac{z}{(R \pm z)^2}$ und ihre reellen linear gebrochenen Funktionen und zwar für jedes z, $|z| < R$.

Allgemein ist zu bemerken, daß mit Ausnahme des Falles von § 2 kein Beweis dafür vorliegt, daß die jeweils genannten Schrankenfunktionen die einzigen sind.

Zu weiterreichenden Folgerungen führt die Behandlung der ungeraden Funktionen. Diese müssen von der Form (1) oder (3), § 1, sein[1]). In beiden Fällen liefert Ungleichung (7), § 2, für $z_1 = z$, $z_2 = -z$ den

Satz 2: *Eine schlichte ungerade Funktion $f(z)$ oder $g(z)$ genügt im Kreise $|z| < R$ der Ungleichung*

$$\left| \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]^2 - \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{4R^2}{(R^2 - |z|^2)^2} \quad \textit{bzw.} \quad \left| \left[\frac{g'(z)}{g(z)} \right]^2 - \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{4R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}.$$

[1]) Offenbar vermeidet $g(z)$ den Wert 0 im Kreisinnern.

Diese Ungleichungen besitzen die Schrankenfunktionen

$$f(z) = \frac{C z}{R^2 - \varepsilon^2 z^2}, \qquad g(z) = \frac{R^2 - \varepsilon^2 z^2}{C z},$$

die für die Werte $z_2 = \pm \bar{\varepsilon} |z|$ *Gleichheit hervorrufen.*

Die letzte Aussage entnimmt man den Formeln (9) bis (12), § 2.

Die erste Ungleichung des Satzes 2 läßt sich etwas abschwächen in

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{R^2 + |z|^2}{|z|\,(R^2 - |z|^2)}. \tag{2}$$

Die Ungleichung (2) läßt sich sowohl längs eines Radius als auch längs der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt leicht integrieren. Zunächst sei in $z = r e^{i\vartheta}$ ϑ konstant, $r_2 \geq r_1$. Setzt man $f(z) = h(r)$, so ist

$$\left| \frac{h'(r)}{h(r)} \right| \leq \frac{R^2 + r^2}{r(R^2 - r^2)},$$

$$\left| \lg \left[\frac{h(r_2)}{h(r_1)} \right] \right| = \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{h'(r)}{h(r)}\, dr \right| \leq \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{h'(r)}{h(r)} \right| dr \leq \int_{1}^{r_2} \frac{R^2 + r^2}{r(R^2 - r^2)}\, dr;$$

$$\left| \lg \left[\frac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \right| \leq \lg \left[\frac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)} \right], \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1. \tag{3}$$

Eine leichte Abschwächung dieses Resultates führt auf

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right| \leq \dfrac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)}, \\ \operatorname{arc} \left[\dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \leq \dfrac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)}, \end{array} \right\} \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1. \tag{4}$$

Aus der ersten dieser Ungleichungen entnimmt man durch den Grenzübergang $\lim r_1 = 0$

$$|f(z)| \leq \frac{|f'(z)|\, R^2 |z|}{R^2 - |z|^2}, \tag{5}$$

in Verbindung mit (2)

$$|f'(z)| \leq |f'(0)|\, R^2 \frac{R^2 + |z|^2}{(R^2 - |z|^2)^2}. \tag{6}$$

Die Ungleichungen (2) bis (6) besitzen mit Ausnahme der zweiten Relation (4) dieselbe Schrankenfunktion wie Satz 2.

Sieht man andererseits in $z = r\, e^{i\vartheta}\, r$ als konstant an und setzt $f(z) = \psi(\vartheta)$, so erhält man aus (2)

$$\left| \frac{\psi'(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} \right| \leq \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2},$$

$$\left| \lg \left[\frac{\psi(\vartheta_2)}{\psi(\vartheta_1)} \right] \right| \leq \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}\, d\vartheta, \quad (\vartheta_2 \geq \vartheta_1)$$

$$\left| \lg \left[\frac{f(r\, e^{i\vartheta_2})}{f(r\, e^{i\vartheta_1})} \right] \right| \leq (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_2 \geq \vartheta_1. \tag{7}$$

Für diese Abschätzung ist keine Schrankenfunktion bekannt.

Weitere Eigenschaften schlichter ungerader Funktionen ergeben sich in einem späteren Stadium der Untersuchung. Sie befinden sich § 5 (5), § 7 (5) bis (7) und (21). Darüber hinaus kann durch Umkehrung des im nächsten Paragraphen zu erörternden Prinzips aus jeder eine Funktion $f(z)$ enthaltenden Ungleichung eine solche für eine ungerade Funktion gewonnen werden.

§ 4. Übertragung der Ergebnisse von § 3 auf allgemeine schlichte Funktionen. Herleitung einer zweiten allgemeinen Funktionalungleichung nebst Anwendungen.

Die Übertragung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf im Kreisinnern reguläre allgemeine schlichte Funktionen erfolgt auf Grund der bekannten Gleichungen

$$f(z) = \varphi^2(t), \quad z = t^2;$$

hierin bedeutet $\varphi(t)$ eine im Innern des Kreises $|t| < \sqrt{R}$ schlichte und reguläre ungerade Funktion, die folglich im Nullpunkt verschwindet. Setzt man die Ungleichungen von § 3 für $\varphi(t)$ an und berücksichtigt die Beziehung

$$\varphi'(t) = f'(z)\sqrt{\frac{z}{f(z)}},$$

so erhält man aus Satz 2:

(1) $$\left|\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^2 - \frac{1}{z^2}\right| \leq \frac{4R}{|z|\,(R-|z|)^2}$$

aus (2):

(2) $$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{R+|z|}{|z|\,(R-|z|)}$$

aus (3):

(3) $$\left|\lg\left[\frac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})}\right]\right| \leq \lg\left[\frac{r_2(R-r_1)^2}{r_1(R-r_2)^2}\right], \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1.$$

aus (4):

(4) $$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})}\right| \leq \left|\dfrac{r_2}{r_1}\right|\left|\dfrac{R-r_1}{R-r_2}\right|^2, \\ \operatorname{arc}\left[\dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})}\right] \leq \left|\dfrac{r_2}{r_1}\right|\left|\dfrac{R-r_1}{R-r_2}\right|^2, \end{array}\right\} \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1$$

aus (5):

(5) $$|f(z)| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2|z|}{(R-|z|)^2}$$

aus (7):

(6) $$\left|\lg\left[\frac{f(r e^{i\vartheta_2})}{f(r e^{i\vartheta_1})}\right]\right| \leq (\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{R+r}{R-r}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_2 \geq \vartheta_1.$$

Die Verbindung der vorstehenden Ungleichungen (2) und (5) liefert:

(7) $$|f'(z)| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2(R+|z|)}{(R-|z|)^3},$$

Von diesen Resultaten sind die Ungleichungen (2), (5) und (7) bereits bekannt. Schrankenfunktion dieser Relationen außer der zweiten (4) und (6) ist die KOEBEsche Funktion $\frac{Cz}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, für die Werte, die auf der Geraden $z=\bar{\varepsilon}|z|$ liegen. Dies ergibt sich aus dem entsprechenden Resultat in § 3.

Eine erste Verallgemeinerung der Ungleichung (1) läßt sich durch eine lineare Transformation des Kreises $|z|\leq R$ in sich erzielen.

Es wird unter Einführung einer willkürlichen Konstanten z_0 gesetzt

$$t=R^2\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z},\quad |z_0|<R$$

$$\varphi(t)=f(z)-f(z_0)$$

$$\varphi'(t)=f'(z)\frac{(R^2-\bar{z}_0 z)^2}{R^2(R^2-|z_0|^2)}$$

Führt man diese Werte in die auf $\varphi(t)$ angewandte Ungleichung (1) ein, so findet man

$$\left|\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\right]^2-\left[\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(R^2-\bar{z}_0 z)}\right]^2\right|\leq\frac{4R[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|\,(R^2-|z|^2)^2}. \tag{8}$$

Dieses Resultat läßt sich nochmals erweitern durch Einführung einer allgemeinen schlichten Funktion vermöge der Gleichungen

$$f(z)-f(z_0)=\frac{F(z)-F(z_0)}{F(z)-N},\qquad f'(z)=\frac{F(z_0)-N}{[F(z)-F(z_0)]^2}F'(z).$$

Dadurch erhält man nachstehenden Satz, in welchem die Schrankenfunktion in derselben Weise aus derjenigen von Formel (1) hervorgeht, wie der Satz selbst aus dieser Formel abgeleitet ist.

Satz 3. *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Inneren des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left|\left\{\frac{[F(z_0)-N]F'(z)}{[F(z)-F(z_0)][F(z)-N]}\right\}^2-\left\{\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(R^2-\bar{z}_0 z)}\right\}^2\right|\leq\frac{4R[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|\,(R^2-|z|^2)^2}.$$

Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion

$$F(z)=\frac{A[(R^2-\bar{z}_0 z)^2+\varepsilon^2 R^2(z-z_0)^2]+B(R^2-\bar{z}_0 z)(z-z_0)}{C[(R^2-\bar{z}_0 z)^2+\varepsilon^2 R^2(z-z_0)^2]+D(R^2-\bar{z}_0 z)(z-z_0)},\qquad |\varepsilon|=1$$

mit der Nebenbedingung

$$N=\frac{2\varepsilon A R+B}{2\varepsilon C R+D}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls z auf dem durch die Gleichung

$$\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}=\bar{\varepsilon}\left|\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}\right|$$

gegebenen Bogen eines Orthogonalkreises zu $|z|=R$ liegt.

Aus der für die Schrankenfunktion gegebenen Formel scheint hervorzugehen, daß diese von drei beliebigen komplexen Parametern sowie den

weiteren Parametern $z_0, |z_0| < R$, und $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, abhängt. Diese Größen treten jedoch in derartigen Verbindungen auf, daß als wesentliche Parameter nur übrigbleiben: Drei komplexe und zwei vom absoluten Betrage 1. Das erkennt man aus der Betrachtung der speziellen in obigem Ausdruck enthaltenen Schrankenfunktion

$$f(z) = \frac{z_0}{(R + \varepsilon z_0)^2} + \frac{(z - z_0)(R^2 - \bar{z}_0 z)}{[(R^2 - \bar{z}_0 z) - \varepsilon R(z - z_0)]^2}$$
$$= \frac{(R^2 - |z_0|^2)[(R^2 - \varepsilon^2 z_0^2) z + (\varepsilon^2 z_0 - \bar{z}_0) z^2]}{(R + \varepsilon z_0)^2 [R(R + \varepsilon z_0) - (\varepsilon R + \bar{z}_0) z]^2}.$$

Diese Funktion erweist sich bis auf einen Faktor als identisch mit der Funktion von § 2, (9) und (10)

$$\frac{2Rz + \alpha z^2}{(R + \beta z)^2}, \qquad |\beta| = |\alpha - \beta| = 1.$$

Durch eine leichte Abschwächung von Satz 3 oder durch eine Umformung von (2) analog derjenigen, die (1) in Satz 3 überführt, erhält man

$$\left| \frac{[F(z_0) - N] F'(z)}{[F(z_0) - F(z)][F(z) - N]} \right| \leq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| + R|z - z_0|]^2}{|z - z_0| |R^2 - \bar{z}_0 z| (R^2 - |z|^2)}. \tag{9}$$

Es ist dies eine Formel, die sich für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $R = 1$ bereits bei R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 86, Berlin 1936, in etwas abweichender Schreibweise findet. Für die Schrankenfunktion gilt das bei Satz 3 Gesagte. In gleicher Weise läßt sich Ungleichung (5) verallgemeinern in

$$\left| \frac{[F(z) - N] F'(z_0)}{[F(z_0) - F(z)][F(z_0) - N]} \right| \geq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| - R|z - z_0|]^2}{|z - z_0| |R^2 - \bar{z}_0 z| (R^2 - |z_0|^2)}, \tag{10}$$

eine Formel, die der vorhergehenden vollkommen analog gebaut ist und über deren Schrankenfunktion das gleiche gilt. Aus ihr folgt, wenn $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $z = 0$ gesetzt und z an Stelle von z_0 geschrieben wird,

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \geq \frac{R - |z|}{|z| (R + |z|)}, \tag{11}$$

das bereits bekannte Gegenstück zu (2). Ebenso erhält man aus Ungleichung (7)

$$\left| \frac{F'(z)}{F'(z_0)} \right| \left| \frac{F(z_0) - N}{F(z) - N} \right|^2 \leq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| + R|z - z_0|]^4}{(R^2 - |z_0|^2)(R^2 - |z|^2)^3} \tag{12}$$

mit unveränderter Schrankenfunktion. Diese Relation wird in § 5, Satz 5 in etwas erweiterter Fassung nochmals bewiesen.

Setzt man in Satz 3 $z = 0$ und schreibt z an Stelle von z_0, so erhält man eine implizite Abschätzung für $F(z)$:

$$\left| \left\{ \frac{[F(z) - N] F'(0)}{[N - F(0)][F(z) - F(0)]} \right\}^2 - \left(\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 z} \right)^2 \right| \leq \frac{4(R + |z|)^2}{R^3 |z|}, \tag{13}$$

die sich für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$ vereinfacht in

$$\left| \left[\frac{f'(0)}{f(z)} \right]^2 - \left(\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 z} \right)^2 \right| \leq \frac{4(R + |z|)^2}{R^3 |z|}, \tag{14}$$

eine Formel, die eine Verschärfung der bekannten Verzerrungsformel

$$|f(z)| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 |z|}{(R+|z|)^2} \tag{15}$$

darstellt.

Hieraus gewinnt man durch Multiplikation mit (11) die Verzerrungsformel

$$|f'(z)| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 (R-|z|)}{(R+|z|)^3}. \tag{16}$$

Für eine im Kreise $|t| < R$ schlichte und reguläre, im Nullpunkt verschwindende Funktion $\varphi(t)$, deren Randwerte mit ϱ und deren Nichtbildpunkte mit N bezeichnet seien, findet man durch den Grenzübergang $|t| \to R$ aus (15)

$$|\varrho| \geq \frac{|\varphi'(0)|\, R}{4}$$

und erst recht

$$|N| \geq \frac{|\varphi'(0)|\, R}{4}.$$

Von $\varphi(t)$ geht man zu einer allgemeinen schlichten Funktion $\psi(t)$ über vermöge der Gleichung

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t) - \psi(0)}{\psi(t) - N_1};$$

es gilt dann ferner

$$\varphi'(t) = \frac{\psi(0) - N_1}{(\psi(t) - N_1)^2}\, \psi'(t), \qquad N = \frac{N_2 - \psi(0)}{N_2 - N_1};$$

somit ist

$$\left| \frac{N_2 - \psi(0)}{N_2 - N_1} \right| \geq \frac{|\psi'(0)|\, R}{4\,|N_1 - \psi(0)|}.$$

Hieraus findet man durch eine Transformation des Kreises in sich

$$\left| \frac{F'(z)}{F(z) - N_1} - \frac{F'(z)}{F(z) - N_2} \right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}. \tag{17}$$

Radiale Integration dieser Formel und nachfolgende Transformation des Kreises in sich führt auf folgende Abschätzung für das Doppelverhältnis aus zwei Bild- und zwei Nichtbildpunkten:

$$\left| \lg \left[\frac{(F(z_2) - N_1)\,(F(z_1) - N_2)}{(F(z_1) - N_1)\,(F(z_2) - N_2)} \right] \right| \leq 2 \lg \left[\frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R\,|z_1 - z_2|}{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R\,|z_1 - z_2|} \right]. \tag{18}$$

Die Ungleichungen (17) und (18) sind scharf; sie besitzen die KOEBEsche Schrankenfunktion. In ihnen sind zwei von A. J. MACINTYRE gefundene Resultate enthalten [J. London Math. Soc. **11**, 7–11 (1936)]. Dort handelt es sich um schlichte, im Einheitskreis reguläre Funktionen, die im Kreisinnern den Wert $\frac{1}{4}$ nicht erreichen, für die also gilt:

$$F(z) = f(z), \quad \lim N_1 = \infty, \quad N_2 = \tfrac{1}{4}, \quad R = 1.$$

Aus (17) erhält man mit MACINTYRE für derartige Funktionen

$$\left| \frac{f'(z)}{1 - 4 f(z)} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

und ebenso aus (18), falls $z_2 = 0$:

$$|\lg[1 - 4f(z)]| \leq 2\lg\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Durch den Grenzübergang $z_1 \to p$ geht Ungleichung (18) über in

$$\left|\lg\left[\frac{F(z)-N_1}{(F(z)-N_2}\right]\right| \leq 2\lg\left[\frac{|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|}{|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|}\right]. \tag{19}$$

Führt man den Grenzübergang $\lim z_0 = p$ durch, so nimmt Satz 3 die spezielle Gestalt

$$\left|\left[\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right]^2 - \left[\frac{R^2-|p|^2}{(z-p)(R^2-\bar{p}z)}\right]^2\right| \leq \frac{4R[|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)^2} \tag{20}$$

an. Ebenso findet man aus (9) und (10)

$$\frac{[|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)} \leq \left|\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right| \leq \frac{[|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)} \tag{21}$$

und:

$$\frac{[|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|]^2}{(R^2-|p|^2)|z-p||R^2-\bar{p}z|} \leq \left|\frac{F(z)-N}{P}\right| \leq \frac{[|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|]^2}{(R^2-|p|^2)|z-p||R^2-\bar{p}z|}. \tag{22}$$

§ 5. Herleitung einer dritten allgemeinen Funktionalungleichung aus derjenigen von § 4 und Integration derselben.

In der Ungleichung von Satz 3 soll der Grenzübergang $\lim z_0 = z$ vorgenommen werden. Schreibt man $z_0 = z + dz$, so lautet sie

$$\left|\left[\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)}\right]^2\left[\frac{F(z+dz)-N}{F(z)-N}\right]^2 - \left[\frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right]^2\right|$$
$$\leq \frac{4R[|R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}|+R|dz|]^2}{|dz||R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}|(R^2-|z|^2)^2}.$$

Der absolute Betrag auf der linken Seite läßt sich in zwei Faktoren zerlegen. Der erste ist

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)}\,\frac{F(z+dz)-N}{F(z)-N} + \frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right| = \frac{|2+O(dz)|}{|dz|},$$

der zweite

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} - \frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right|$$
$$= \left|\frac{F'(z)}{F'(z)\,dz+\frac{1}{2}F''(z)\,dz^2+\cdots} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} - \frac{1}{dz}\left[1-\frac{\bar{z}\,dz+|dz|^2}{R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}}\right]\right|$$
$$= \left|-\frac{F''(z)}{2F'(z)} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} + \frac{\bar{z}}{R^2-|z|^2} + O(dz)\right|.$$

Der Grenzübergang liefert also den

Satz 4: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2:*

$$\left|\frac{F''(z)}{F'(z)} - \frac{2F'(z)}{F(z)-N} - \frac{2\bar{z}}{R^2-|z|^2}\right| \leq \frac{4R}{R^2-|z|^2}.$$

Sie besitzt insbesondere die Schrankenfunktion $\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, *wobei* $\lim N=\infty$ *oder* $N=-\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}$ *zu wählen ist und das Gleichheitszeichen für* $z=\pm\bar{\varepsilon}|z|$ *gilt; die Kombination der je zwei Möglichkeiten für N und z ist frei.*

Die Invarianzeigenschaften und die Schrankenfunktionen bestätigt man leicht durch Rechnung.

Das allgemeine Integral von Satz 4 läßt sich am schnellsten in zwei Etappen bestimmen. Die Ungleichung werde zunächst für $\varphi(t)$, $0\leq t<R$, geschrieben

$$\left|\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}-\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)-N}-\frac{2t}{R^2-t^2}\right|\leq\frac{4R}{R^2-t^2},$$

woraus man durch Integration findet

$$\left|\lg\left[\frac{\varphi'(t)\,(\varphi(0)-N)^2\,(R^2-t^2)}{\varphi'(0)\,(\varphi(t)-N)^2\,R^2}\right]\right|\leq 2\lg\left(\frac{R+t}{R-t}\right).$$

Setzt man nun

$$t=\varepsilon R^2\frac{z-z_1}{R^2-\bar{z}_1 z},\qquad \varepsilon=\frac{(\bar{z}_2-\bar{z}_1)\,(R^2-\bar{z}_1 z_2)}{|z_2-z_1|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|},$$

$$\varphi(t)=F(z),\qquad \varphi'(t)=F'(z)\,\bar{\varepsilon}\,\frac{(R^2-\bar{z}_1 z)^2}{R^2(R^2-|z_1|^2)},$$

so erhält man für $z=z_2$ den

Satz 5: *Eine allgemeine schlichte Funktion* $F(z)$ *genügt im Innern des Kreises* $|z|<R$ *der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left|\lg\left[\frac{F'(z_2)\,(F(z_1)-N)^2\,(R^2-|z_2|^2)\,(R^2-\bar{z}_1 z_2)}{F'(z_1)\,(F(z_2)-N)^2\,(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-z_1\bar{z}_2)}\right]\right|\leq 2\lg\left[\frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|}\right].$$

Zu den Schrankenfunktionen der Ungleichung gehört

$$F(z)=\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2},\qquad |\varepsilon|=1,$$

und zwar tritt Gleichheit ein für

$$z_1=\sigma_1\bar{\varepsilon}|z_1|,\qquad z_2=\sigma_2\bar{\varepsilon}|z_2|,\qquad \sigma_1=\pm 1,\qquad \sigma_2=\pm 1$$

verbunden mit

$$\lim N=\infty\quad \textit{oder}\quad N=-\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}.$$

Die Kombination der verschiedenen Möglichkeiten ist frei.

Durch eine leichte Vergröberung findet man aus Satz 5:

$$\left|\frac{F'(z_2)\,(F(z_1)-N)^2}{F'(z_1)\,(F(z_2)-N)^2}\right|\leq\frac{[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_2-z_1|]^4}{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)^3},\tag{1}$$

wie bereits in § 4, (12). Der Wertebereich, innerhalb dessen die KOEBEsche Funktion $f(z)=\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, Gleichheit herbeiführt, ist kleiner als in

Satz 5. Es sind nur folgende Kombinationen zulässig:

$\lim N = \infty$ mit	$N = -\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}$ mit
$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = +1$	$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = -1$
$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = +1$ für $\lvert z_2\rvert \geq \lvert z_1\rvert$	$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = -1$ für $\lvert z_2\rvert \geq \lvert z_1\rvert$
$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = -1$ für $\lvert z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert$	$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = +1$ für $\lvert z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert$.

Für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$ geht (1) über in

$$\left|\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)}\right| \leq \frac{[\,|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R|z_2 - z_1|\,]^4}{(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)^3}, \tag{2}$$

eine Formel, aus der die Einsetzung von $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ die Relationen (7) und (16), aus § 4 liefert. — Aus Satz 5 entnimmt man, wenn man $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $z_1 = 0$, $z_2 = z$ setzt,

$$\left|\lg\left[\frac{f'(z)\,(R^2 - |z|^2)}{f'(0)\,R^2}\right]\right| \leq 2\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right). \tag{3}$$

Dieses Resultat wurde für $f'(0) = 1$, $R = 1$ bereits von GRUNSKY gefunden, veröffentlicht: Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 1, Heft 3: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung einfach und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Aus (3) ist der BIEBERBACHsche Drehungssatz

$$\operatorname{arc}\left[\frac{f'(z)}{f'(0)}\right] \leq 2\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right)$$

unmittelbar abzulesen.

Setzt man in der Formel von Satz 5 $z_2 = z$, $\lim z_1 = p$, so lautet sie

$$\left|\lg\left[\frac{F'(z)\,P(R^2 - |z|^2)\,(R^2 - \bar{p}\,z)}{(F(z) - N)^2\,(R^2 - |p|^2)\,(R^2 - p\,\bar{z})}\right]\right| \leq 2\lg\left[\frac{|R^2 - \bar{p}\,z| + R|z - p|}{|R^2 - \bar{p}\,z| - R|z - p|}\right], \tag{4}$$

Ist $f(z)$ eine *ungerade Funktion*, so liefert Satz 5 das einfache Ergebnis

$$\left|\lg\left[\left(\frac{f(z) - N}{f(z) + N}\right)^2\right]\right| \leq 4\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right). \tag{5}$$

Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion $\frac{C\,z}{R^2 + \varepsilon^2 z^2}$, $|\varepsilon| = 1$. Das Gleichheitszeichen gilt für $z = \pm\,\bar{\varepsilon}\,|z|$, falls gleichzeitig $N = \mp\,\frac{C\,\bar{\varepsilon}}{2R}$ gewählt wird.

Die Übertragung von (5) auf eine allgemeine schlichte Funktion des Typus $f(z)$ ergibt

$$\left|\lg\left[\left(\frac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{N}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{N}}\right)^2\right]\right| \leq 4\lg\left(\frac{\sqrt{R} + \sqrt{|z|}}{\sqrt{R} - \sqrt{|z|}}\right). \tag{6}$$

Aus Satz 4 dieses Paragraphen folgt für $z = 0$

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{N - a_0}\right| \leq \frac{2}{R}, \tag{7}$$

worin für $F(z)=f(z)$, $\lim N=\infty$ die bekannte Koeffizientenabschätzung

$$|c_2| \leq \frac{2|c_1|}{R} \tag{8}$$

enthalten ist. Beide Ungleichungen liefern obere Schranken für den Radius des Kreises, innerhalb dessen eine Funktion schlicht bzw. schlicht und regulär sein kann.

Aus der letzten Formel entnimmt man den

Satz 6: *Eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion*

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots$$

kann höchstens in dem Kreise $|z| < \frac{2|C_1|}{|C_2|}$ *schlicht und regulär bleiben; ist sie in einem größeren Kreise um den Nullpunkt schlicht, so besitzt sie in dem abgeschlossenen Kreise* $|z| \leq \frac{2|C_1|}{|C_2|}$ *einen Pol.*

Aus der auf eine Funktion $f(z)$ ($\lim N=\infty$) angewandten Ungleichung des Satzes 4

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2-|z|^2}\right| \leq \frac{4R}{R^2-|z|^2}$$

läßt sich eine Verallgemeinerung und Verschärfung der Relation § 4, (7) herleiten. Zunächst wird die eben erwähnte Spezialisierung von Satz 4 vermittels § 4, (7) abgeschwächt in

$$|(R^2-|z|^2)f''(z) - 2\bar{z}f'(z)| \leq \frac{4|f'(0)|R^3(R+|z|)}{(R-|z|)^3}.$$

Durch radiale Integration erhält man

$$\begin{cases} |(R^2-|z_2|^2)f'(z_2) - (R^2-|z_1|^2)f'(z_1)| \\ \qquad \leq 4|f'(0)|R^3\left[\frac{|z_2|}{(R-|z_2|)^2} - \frac{|z_1|}{(R-|z_1|)^2}\right], \\ \qquad \text{falls} \quad \arc z_2 = \arc z_1, \qquad |z_2| \geq |z_1|. \end{cases} \tag{9}$$

Für $z_1=0$ folgt hieraus

$$|(R^2-|z|^2)f'(z) - R^2 f'(0)| \leq \frac{4|f'(0)|R^3|z|}{(R-|z|)^2}, \tag{10}$$

worin die Aussage von § 4, (7) enthalten ist.

§ 6. Die Ersetzung von Nicht-Bildpunkten durch Bildpunkte in einigen Ungleichungen.

Als ein geeigneter Weg zur Weiterführung der Untersuchung erweist sich nach dem Vorgange von R. NEVANLINNA, der hierdurch aus dem KOEBEschen $\frac{1}{4}$-Satze die Ungleichung § 4, (9) fand, die Abbildung eines aufgeschlitzten Kreisbereiches der z-Ebene auf einen vollen Kreis der t-Ebene. Es wird dann von der schlichten Funktion nur die Schlichtheit, gegebenenfalls auch Regularität, im Schlitzbereiche benutzt. Durch die Abbildung $z \to t$ wird erreicht, daß dem Endpunkte des Schlitzes im Kreise der z umkehrbar eindeutig ein

Peripheriepunkt des Kreises der t und damit ein Randwert der schlichten Funktion von t entspricht.

Zur Herstellung der Abbildung $z \to t$ werde von den Gleichungen

$$(1) \qquad w = t + \frac{R^2}{t} = A z + \frac{\bar{A} R^2}{z} + B, \qquad \bar{B} = B,$$

ausgegangen. Die Bilder der beiden Kreisperipherien in der w-Ebene sind die reellen Strecken

$$-2|A|R + B \leq w \leq 2|A|R + B \quad \text{und} \quad -2R \leq w \leq 2R;$$

dafür, daß das Bild der t-Peripherie dasjenige der z-Peripherie als echte Teilmenge enthält, ist notwendig und hinreichend

$$-2R \leq -2|A|R + B < 2|A|R + B \leq 2R,$$

wobei das Gleichheitszeichen höchstens einmal gelten darf. Es werde Gleichheit auf der linken Seite angenommen, also $B = 2(|A| - 1)R$ gesetzt. Dann lautet die notwendige und hinreichende Bedingung

$$|A| < 1.$$

Den Werten $2|A|R + B = 2(2|A| - 1)R \leq w \leq 2R$ entsprechen Punkte z im Kreise $|z| \leq R$, die der Gleichung $z = \frac{\bar{A}}{|A|}|z|$ genügen; der Schlitz ist also geradlinig, und zwar radial. — Die längs der Strecke $-2R$, $+2R$ aufgeschlitzte w-Ebene ist einerseits schlichtes Bild des Kreisinnern $|t| < R$, andererseits schlichtes Bild des längs einer radial verlaufenden Strecke aufgeschlitzten Kreises $|z| < R$, woraus sich ergibt, daß die Abbildung $z \to t$ von der gewünschten Art ist.

Der Endpunkt des Schlitzes im z-Kreise sei ζ. Aus ζ läßt sich A bestimmen gemäß den Gleichungen

$$\zeta = \frac{\bar{A}}{|A|}|\zeta|, \qquad |A|\left(|\zeta| + \frac{R^2}{|\zeta|}\right) + 2(|A| - 1)R = 2R,$$

$$|A| = \frac{4R|\zeta|}{(R + |\zeta|)^2}, \qquad A = \frac{4R\bar{\zeta}}{(R + |\zeta|)^2}.$$

Für $|\zeta| < R$ ist, wie verlangt, $|A| < 1$. Die explizite Darstellung von t ergibt folgendes:

$$(2) \qquad \begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}(|\zeta| z + R\zeta), \qquad V = \sqrt{(R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - z)} \\ t = \frac{R(U - V)^2}{(R + |\zeta|)^2 z} = \frac{R(R + |\zeta|)^2 z}{(U + V)^2} \\ \frac{dt}{dz} = \frac{R(R + |\zeta|)^2 (R\zeta - |\zeta| z)}{(U + V)^2 V \sqrt{\zeta}} \\ \frac{dt}{dz}_{z=0} = \frac{(R + |\zeta|)^2}{4R\zeta} \\ \frac{d^2t}{dz^2}_{z=0} = \frac{(R^2 - |\zeta|^2)^2}{4R^3\zeta^2}. \end{cases}$$

Aus dem Ansatz (1), der zu der vorstehenden Abbildung führte, ist ersichtlich, daß die KOEBEschen Schrankenfunktionen

$$\frac{Ct}{(R+t)^2}$$

wieder in KOEBEsche Schrankenfunktionen übergehen; d.h., scharfe Ungleichungen, die die genannten Schrankenfunktionen besitzen, gehen wieder in scharfe Ungleichungen über. Bei der Abbildung entspricht dem Werte $z=\zeta$ der Wert $t=R$. Es gehen also nur solche Ungleichungen von $\varphi(t)$ in scharfe Ungleichungen über, bei denen Gleichheit für $N=\varphi(R)$ eintritt; gegebenenfalls ist noch eine Ersetzung von t durch εt, $|\varepsilon|=1$, erforderlich.

Zwecks Anwendung der obigen Abbildung möge die Ungleichung § 4, (10) spezialisiert werden in

$$\left|\frac{\varphi'(0)\,[\varphi(t)-N]}{[\varphi(t)-\varphi(0)]\,[N-\varphi(0)]}\right| \geq \frac{(R-|t|)^2}{R^2|t|}.$$

Setzt man

$$\varphi(t)=F(z), \qquad N=\varphi(R),$$

so gilt

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geq \frac{(R+|\zeta|)^2(R-|t|)^2}{4R^3|\zeta t|}.$$

Man erhält

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geq \frac{1}{2R^2|\zeta z|}\left[\frac{1}{|\zeta|}\,|\,|\zeta|\,z+R\zeta\,|^2+|R^2-\bar{\zeta}z|\,|\zeta-z|-(R+|\zeta|)^2|z|\right]$$

und nach kurzer Rechnung den

Satz 7: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation*

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{|\zeta|}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{|z|}\right)(|z|-|\zeta|)+\frac{1}{2R^2}\left|\frac{\zeta-z}{\zeta z}\right|(|R^2-\bar{\zeta}z|-R|\zeta-z|)$$

und der durch Vertauschung von ζ und z aus ihr hervorgehenden. Diese Ungleichungen sind scharf. Sie besitzen KOEBEsche *Schrankenfunktionen.*

Dieses Resultat läßt sich durch eine lineare Transformation des Kreises in sich verallgemeinern; auch kann man einen analogen, aber weniger brauchbaren Satz aus § 4, (9) gewinnen.

Formt man die Ungleichung § 5, Satz 4

$$\left|\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}-\frac{2\varphi'(0)}{\varphi(0)-N}\right| \leq \frac{4}{R}$$

vermittels der Abbildung (1) dieses Paragraphen um, wobei die Gleichungen

$$\varphi(t)=F(z), \qquad t'\varphi'(t)=F'(z),$$
$$t''\varphi'(t)+t'^2\varphi''(t)=F''(z), \qquad N=\varphi(R)$$

gelten, so erhält man

$$(3) \qquad \left| \frac{F''(0)}{F'(0)} + \frac{2F'(0)}{F(\zeta) - F(0)} - \frac{(R - |\zeta|)^2}{R^2 \zeta} \right| \leq \frac{(R + |\zeta|)^2}{R^2 |\zeta|} .$$

Durch eine lineare Abbildung des Kreises in sich verallgemeinert sich diese Ungleichung in

Satz 8: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left| \frac{F''(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{2F'(z_1)}{F(z_2) - F(z_1)} - \frac{2\bar{z}_1}{R^2 - |z_1|^2} - \frac{[|R^2 - z_1 \bar{z}_2| - R|z_2 - z_1|]^2}{(R^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)(R^2 - z_1 \bar{z}_2)} \right|$$
$$\leq \frac{[|R^2 - z_1 \bar{z}_2| + R|z_2 - z_1|]^2}{(R^2 - |z_1|^2)|z_2 - z_1||R^2 - z_1 \bar{z}_2|} .$$

Die Ungleichung besitzt Koebesche *Schrankenfunktionen.*

Läßt man in dieser Relation z_2 zum Kreisrande rücken, so geht sie, falls der Randwert $F(z_2)$ existiert, über in

$$\left| \frac{F''(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{2F'(z_1)}{F(z_2) - F(z_1)} - \frac{2\bar{z}_1}{R^2 - |z_1|^2} \right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z_1|^2} .$$

Dies ist nichts anderes als die Ungleichung § 5, Satz 4, in der der Randwert $F(z_2)$ an die Stelle von N getreten ist. Für Randwerte sind also die Sätze 4 und 8 miteinander identisch.

Weiter findet man noch durch Umformung der Ungleichung § 5, (6) ohne weitere Rechnung:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| \lg \left[\left(\dfrac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{f(\zeta)}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(\zeta)}} \right)^2 \right] \right| \\ \qquad \leq 4 \lg \left[\dfrac{R\zeta + |\zeta| z + \sqrt{\zeta (R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - z)}\,| + (R + |\zeta|)\sqrt{|\zeta z|}}{R\zeta + |\zeta| z + \sqrt{\zeta (R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - z)}\,| - (R + |\zeta|)\sqrt{|\zeta z|}} \right] . \end{array} \right.$$

§ 7. Folgerungen aus den Ergebnissen von § 6.

Die zuletzt abgeleitete Relation vereinfacht sich wesentlich, wenn ζ und z auf einem Radius liegen. Dann geht sie über in

$$(1) \qquad \left| \lg \left[\left(\frac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{f(\zeta)}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(\zeta)}} \right)^2 \right] \right| \leq 2 \lg \left[\frac{(R + \sqrt{|\zeta z|})(\sqrt{|\zeta|} + \sqrt{|z|})}{(R - \sqrt{|\zeta z|})|\sqrt{|\zeta|} - \sqrt{|z|}|} \right] .$$

Satz 7 liefert für $\arc \zeta = \arc z$:

$$(2) \qquad \left| \frac{F(\zeta) - F(z)}{(F(z) - F(0))(F(\zeta) - F(0))} \right| \geq \frac{|\zeta - z|\,|R^2 - \bar{\zeta} z|}{|F'(0)|\,R^2\,|\zeta z|} .$$

Wegen der Regularität von $F(z)$ darf man aus (2) schließen

$$(3) \qquad \frac{|F'(z)|}{|F(z) - F(0)|^2} \geq \frac{R^2 - |z|^2}{|F'(0)|\,R^2 |z|^2} .$$

Durch eine lineare Transformation des Kreises in sich verallgemeinert sich diese Ungleichung in

$$\frac{|F'(z_1)\,F'(z_2)|}{|F(z_1)-F(z_2)|^2} \geq \frac{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)}{|z_1-z_2|^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2}, \tag{4}$$

eine Relation, die schärfer ist als die aus § 2, (7) hervorgehende Abschätzung der linken Seite nach unten.

Für *ungerade* Funktionen führt die letzte Ungleichung auf

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \geq \frac{R^2-|z|^2}{|z|\,(R^2+|z|^2)} \tag{5}$$

und in Verbindung mit der aus § 4, (15) leicht folgenden Abschätzung

$$|f(z)| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2|z|}{R^2+|z|^2} \tag{6}$$

weiterhin auf

$$|f'(z)| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2(R^2-|z|^2)}{(R^2+|z|^2)^2}. \tag{7}$$

Die Formeln (2) und (3) schreiben sich am einfachsten für Funktionen $g(z)$. Für diese gilt

$$\left|\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}\right| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|\zeta z|}{R^2|\zeta z|}, \tag{8}$$

falls $\arc \zeta = \arc z$, und

$$|g'(z)| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|z|^2}{R^2|z|^2}. \tag{9}$$

Ein zu Formel (8) analoges Ergebnis wurde von G. M. GOLUSIN erzielt, nämlich

$$\left|\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}\right| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|z|^2}{R^2|z|^2}, \quad \text{falls} \quad |\zeta|=|z|,$$

veröffentlicht [Mat. Sbornik, II. ser. **19**, 183–202 (1946)]. — Läßt man in Ungleichung (3) z nach p konvergieren, so findet man

$$|P| \leq \frac{|F'(0)|\,R^2|p|^2}{R^2-|p|^2}. \tag{10}$$

Setzt man in Satz 7 $\lim z = p$, so ergibt sich eine p enthaltende Abschätzung für $|F(z)-F(0)|$ nach oben

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{|F(z)-F(0)|} \geq \frac{1}{2|F'(0)|}\left(1+\frac{R}{|z|}\right)\left(1-\frac{R}{|p|}\right)\frac{|p|-|z|}{R^2} + \\ + \frac{|z-p|\,[|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|]}{2|F'(0)|\,R^2|pz|},\end{aligned}\right. \tag{11}$$

in der p und z vertauscht werden dürfen.

Die obige Ungleichung (4) läßt sich, angewandt auf $f(z)$, schreiben

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|^2 \leq \frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2}{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)}\,|f'(z_1)\,f'(z_2)|.$$

Vermöge der Relation § 4, (7) findet man hieraus

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|}{(R-|z_1|)^2\,(R^2-|z_2|)^2}, \tag{12}$$

Durch lineare Transformation beider Variablen geht diese Ungleichung über in

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{|F(z_1)-F(z_2)|}{|F(z_1)-N|\,|F(z_2)-N|} \\ \qquad \leq \dfrac{|F'(z_3)|}{|F(z_3)-N|^2}\,\dfrac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar z_1 z_2|\,(R^2-|z_3|^2)^3}{[|R^2-\bar z_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar z_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}. \end{array}\right.$$

Das zu vermutende Gegenstück von (12)

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2|R^2-\bar z_1 z_2|}{(R+|z_1|)^2\,(R+|z_2|)^2}$$

läßt sich aus (8) in Verbindung mit § 4, (15) nur unter der Voraussetzung arc $z_2 = \text{arc}\, z_1$ beweisen.

In diesem Zusammenhang ist eine Formel von Iliev [Über endliche Summen schlichter Funktionen, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., N. s. **70**, 9–11 (1950)] zu erwähnen:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geq \frac{1-r}{(1+r)^3}$$

für $f'(0)=1$, $R=1$, $|z_1|, |z_2| \leq r<1$.

Falls die Vermutung richtig ist, folgt die Ungleichung von Iliev durch Vergröberung. Aus § 2, (13) und § 4, (16) kann man die Abschätzung

$$(14)\quad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2(R-|z_1|)\,(R-|z_2|)}{|R^2-\bar z_1 z_2|\,(R+|z_1|)\,(R+|z_2|)}$$

gewinnen, die für $|z_2|=|z_1|$ schlechter, für $z_1=0$ besser ist als die Formel von Iliev.

Die Ungleichung (3) und Satz 8 des vorigen Paragraphen lassen sich durch eine leichte Abschwächung vereinfachen in

$$(15)\quad \left|\frac{a_1}{F(z)-a_0}+\frac{a_2}{a_1}\right| \leq \frac{R^2+|z|^2}{R^2|z|}$$

und

$$(16)\quad \left|\frac{F''(z_1)}{F'(z_1)}+\frac{2F'(z_1)}{F(z_2)-F(z_1)}-\frac{2\bar z_1}{R^2-|z_1|^2}\right| \leq 2\,\frac{|R^2-\bar z_1 z_2|^2+R^2|z_2-z_1|^2}{(R^2-|z_1|^2)\,|z_2-z_1|)\,|R^2-\bar z_1 z_2|}.$$

Läßt man in Satz 8 z_2 nach p konvergieren, so erhält man

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{F''(z)}{F'(z)}-\dfrac{2\bar z}{R^2-|z|^2}+\dfrac{[|R^2-\bar p z|-R|z-p|]^2}{(R^2-|z|^2)\,(z-p)\,(R^2-\bar p z)}\right| \\ \qquad \leq \dfrac{[|R^2-\bar p z|+R|z-p|]^2}{(R^2-|z|^2)\,|z-p|\,|R^2-\bar p z|}. \end{array}\right.$$

Durch den Grenzübergang $|p| \to R$ gelangt man von hier wieder zur Ungleichung des Satzes 4, § 5 für $F(z)=f(z)$, $\lim N=\infty$ zurück.

Aus Ungleichung (15) gewinnt man den

Satz 9: *Befriedigen die Koeffizienten a_1 und a_2 der Potenzreihe einer allgemeinen schlichten Funktion die Ungleichung $|a_2| \geq \frac{2|a_1|}{R}$, so liegt der Pol der Funktion bereits im Kreise*

$$|p| \leq \left|\frac{a_2}{a_1}\right|\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2|a_1|}\sqrt{|a_2|^2R^2-4|a_1|^2} \leq R.$$

Die Schranke wird erreicht bei der Funktion $\dfrac{Cz}{R^2 - \left(|p| + \dfrac{R^2}{|p|}\right) z + z^2}$.

Man erhält nämlich aus (15) für $\lim z = p$:

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \leq \frac{R^2 + |p|^2}{R^2 |p|},$$

$$\left[|p| - \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \frac{R^2}{2}\right]^2 \geq \frac{R^2}{4|a_1|^2} \left[|a_2|^2 R^2 - 4|a_1|^2\right],$$

woraus die oben angegebene Abschätzung hervorgeht. Die alternative untere Schranke für $|p|$ ist bedeutungslos, da $\geq R$. — Der Satz 6, § 5, ist hiermit verschärft. — Setzt man in (17) $z = 0$, so wird die Abschätzung für p noch schärfer insofern, als auch der arcus mit erfaßt wird.

Die Relation § 6, (3) nimmt eine besonders einfache Gestalt durch Einführung einer Funktion $g(z)$ an. Wird $\dfrac{1}{F(z) - F(0)} = g(z)$ gesetzt, so lautet sie (nach einer elementaren Rechnung)

$$\left|g(z) - b_0 - b_{-1} \frac{(R - |z|)^2}{2R^2 z}\right| \leq |b_{-1}| \frac{(R + |z|)^2}{2R^2 |z|}, \tag{18}$$

woraus durch Vergröberung

$$|g(z) - b_0| \leq |b_{-1}| \frac{R^2 + |z|^2}{R^2 |z|} \tag{19}$$

folgt.

Aus der Ungleichung § 6, (3)

$$\left|\frac{2a_1}{F(z) - a_0} + \frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| \leq \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|}$$

entnimmt man zwecks Abschätzung von $|F(z) - a_0|$ zunächst

$$\left|\frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| - \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} \leq \left|\frac{2a_1}{F(z) - a_0}\right| \leq \left|\frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| + \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|}.$$

Die linke Ungleichung führt nur dann zu einer Abschätzung nach oben für $|F(z) - a_0|$, wenn der links stehende Ausdruck nichtnegativ ist. Dieser erreicht auf einem Kreise $|z| = \text{Const.}$ sein Maximum für

$$\arc z = \arc\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \pi \quad \text{mit} \quad 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| - \frac{4}{R}.$$

Für die Möglichkeit einer Abschätzung ist somit notwendig:

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \geq \frac{2}{R}.$$

Das Minimum besitzt den Wert

$$-\frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} + \left[\frac{(R - |z|)^2}{R^2 |z|} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right] = -\frac{4}{R} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|$$

oder

$$-\frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} - \left[\frac{(R - |z|)^2}{R^2 |z|} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right] = 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| - 2\frac{R^2 + |z|^2}{R^2 |z|},$$

je nachdem der Ausdruck in der eckigen Klammer nichtnegativ oder nichtpositiv ist; es ist dann und nur dann nichtnegativ, wenn

$$\frac{R^2+|z|^2}{R^2|z|} \leq \left|\frac{a_2}{a_1}\right|.$$

Setzt man

$$\frac{R^2+\gamma^2}{R^2\gamma} = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \qquad \gamma \leq R,$$

so ist die Abschätzung auf der vollen Kreisperipherie mit dem Radius $|z|$ dann und nur dann möglich, wenn $R \geq |z| \geq \gamma$. Aus dem Beweise von Satz 9 folgt $\gamma \geq |p|$. Somit gewinnt man den

Satz 10: *Für jede allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ gilt im Innern des Kreises $|z|<R$ die Relation*

$$|F(z)-a_0| \geq \frac{2|a_1|R^2|z|}{\left|2\frac{a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|+(R+|z|)^2} \geq \frac{|a_1|R^2|z|}{R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|+|z|^2}.$$

Falls die Koeffizienten a_1 und a_2 der Ungleichung $|a_2| \geq \frac{2|a_1|}{R}$ genügen, ist außerdem in derjenigen Nähe von arc $z = \arc\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\pi$, in der der Nenner positiv bleibt,

$$|F(z)-a_0| \leq \frac{2|a_1|R^2|z|}{\left|2\frac{a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|-(R+|z|)^2}.$$

Im Kreisringe $R \geq |z| \geq \gamma \geq |p|$, $\frac{R^2+\gamma^2}{R^2\gamma} = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|$, $\gamma \leq R$, besteht diese Relation, die sich alsdann in

$$|F(z)-a_0| \leq \frac{|a_1|R^2|z|}{-R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|-|z|^2}$$

abschwächen läßt, für alle arc z. — Die erste Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion $\frac{Cz}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, die dritte diejenige von Satz 9.

Aus diesem Satz erhält man für arc $z = \arc\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\pi$ die von $|z|$ freie, aber unscharfe Abschätzung

$$|F(z)-a_0| \leq \frac{|a_1|^2 R}{|a_2|R-2|a_1|}.$$

Die erste Ungleichung des Satzes ist in der abgeschwächten Form für $F(z)=f(z)$ bereits bekannt. Sie befindet sich bei Kösslер (Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême **1932**, Nr. 5, S. 1—7). Durch Anwendung von § 5, (8) erhält man aus genannter Formel die Verzerrungsformel § 4, (15).

Aus der Formel (3) und Satz 10 dieses Paragraphen ergibt sich:

$$(20)\quad |F'(z)| \geq \frac{4|a_1|R^2(R^2-|z|^2)}{\left|2\frac{a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|+(R+|z|)^2\Big]^2} \geq \frac{|a_1|R^2(R^2-|z|^2)}{\left[R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|+|z|^2\right]^2}.$$

Für die letzte Ungleichung gilt das bei Satz 10 Gesagte (Kösslер).

Aus Satz 8 lassen sich zwei Ungleichungen, enthaltend $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ gewinnen. Zunächst erhält man für eine *ungerade Funktion* $f(z)$ $(z_2 = -z_1)$:

$$(21) \qquad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2 - |z|^2} + \frac{(R - |z|)^4}{2z(R^4 - |z|^4)} \right| \leq \frac{(R + |z|)^4}{2|z|(R^4 - |z|^4)}.$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die am Eingang von § 4 definierte ungerade Funktion $\varphi(t)$ an, für die zusätzlich zu den dort aufgeführten Gleichungen

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 2\sqrt{z}\,\frac{f''(z)}{f'(z)} - \sqrt{z}\,\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

gilt, so findet man

$$\left| \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} - \frac{2\bar{t}}{R^2 - |t|^2} + \frac{(\sqrt{R} - |t|)^4}{2t(R^2 - |t|^4)} \right| \leq \frac{(\sqrt{R} + |t|)^4}{2|t|(R^2 - |t|^4)},$$

$$(22) \qquad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{2z} - \frac{|z|}{z(R - |z|)} + \frac{(\sqrt{R} - \sqrt{|z|})^4}{4z(R^2 - |z|^2)} \right| \leq \frac{(\sqrt{R} + \sqrt{|z|})^4}{4|z|(R^2 - |z|^2)}.$$

Diese Relation läßt sich vergröbern in die immer noch scharfe Ungleichung (KOEBEsche Schrankenfunktion)

$$(23) \qquad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{R - 3|z|}{2z(R - |z|)} \right| \leq \frac{R^2 + 6R|z| + |z|^2}{2|z|(R^2 - |z|^2)}.$$

Ferner liefert Satz 8 für $F(z) = f(z)$, $z_2 = 0$:

$$(24) \qquad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2f'(z)}{f(z)} + \frac{R^2 - 2R|z| - |z|^2}{z(R^2 - |z|^2)} \right| \leq \frac{R + |z|}{|z|(R - |z|)}.$$

Auch diese Abschätzung ist scharf wie (23).

Die beiden letzten Formeln sowie der spezialisierte Satz 4, § 5,

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2 - |z|^2} \right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}$$

enthalten dieselben Größen, besitzen die gleiche Schrankenfunktion, sind jedoch, wie eine elementare Rechnung zeigt, nicht auseinander ableitbar.

Die Ungleichungen (22) und (24) sollen nunmehr radial integriert werden. Zu diesem Zwecke werde zunächst in (22) substituiert

$$z = \varepsilon r^2, \quad |\varepsilon| = 1 \text{ (Const.)},$$

$$f(z) = h(r), \quad f'(z) = \frac{1}{2\varepsilon r}\,h'(r),$$

$$f''(z) = \frac{1}{4\varepsilon^2 r^2}\,h''(r) - \frac{1}{4\varepsilon^2 r^3}\,h'(r).$$

Dann schreibt sich (22)

$$\left| \frac{h''(r)}{2\varepsilon r h'(r)} - \frac{h'(r)}{2\varepsilon r h(r)} - \frac{1}{\varepsilon(R - r^2)} + \frac{(\sqrt{R} - r)^3}{4\varepsilon r^2 (R + r^2)(\sqrt{R} + r)} \right| \leq \frac{(\sqrt{R} + r)^3}{4r^2 (R + r^2)(\sqrt{R} - r)},$$

$$\left| \frac{h''(r)}{h'(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r - \sqrt{R}} - \frac{1}{r + \sqrt{R}} + \frac{r}{R + r^2} \right| \leq \frac{1}{2r} - \frac{2}{r - \sqrt{R}} + \frac{r}{R + r^2}.$$

Die Integration zwischen den Grenzen r_1 und r_2, $r_2 \geq r_1$, liefert

$$(25)\quad \begin{cases} \left| \lg \left[\dfrac{f'(z_2)\, f(z_1) \sqrt[4]{|z_2|^3}\,(\sqrt{R}-\sqrt{|z_2|})\,(\sqrt{R}+\sqrt{|z_1|})\,\sqrt{R+|z_2|}}{f'(z_1)\, f(z_2) \sqrt[4]{|z_1|^3}\,(\sqrt{R}-\sqrt{|z_1|})\,(\sqrt{R}+\sqrt{|z_2|})\,\sqrt{R+|z_1|}} \right] \right| \\ \qquad \leq \lg \left[\dfrac{\sqrt[4]{|z_2|}\,(\sqrt{R}-\sqrt{|z_1|})^2\,\sqrt{R+|z_2|}}{\sqrt[4]{|z_1|}\,(\sqrt{R}-\sqrt{|z_2|})^2\,\sqrt{R+|z_1|}} \right] \\ \qquad \text{für} \quad \arc z_2 = \arc z_1, \quad |z_2| \geq |z_1| . \end{cases}$$

Hieraus gewinnt man durch Vergröberung

$$(26)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{f'(z_1)}{f(z_1)} \right| \dfrac{|z_1|\,(R+|z_1|)}{R-|z_1|} \leq \left| \dfrac{f'(z_2)}{f(z_2)} \right| \dfrac{|z_2|\,(R+|z_2|)}{R-|z_2|} \\ \qquad \text{für} \quad \arc z_2 = \arc z_1, \quad |z_2| \geq |z_1| . \end{cases}$$

Hierin ist die Abschätzung § 4, (11) enthalten; sie ergibt sich durch den Grenzübergang $z_1 \to 0$.

Setzt man in Ungleichung (24)

$$\begin{cases} z = \varepsilon r, \qquad |\varepsilon| = 1 \ \text{(Const.)}, \\ f(z) = h(r), \qquad f'(z) = \bar{\varepsilon}\, h'(r), \qquad f''(z) = \bar{\varepsilon}^2 h''(r), \end{cases}$$

so geht sie über in

$$\left| \frac{h''(r)}{h'(r)} - \frac{2h'(r)}{h(r)} + \frac{R^2 - 2Rr - r^2}{r(R^2 - r^2)} \right| \leq \frac{R+r}{r(R-r)} ,$$

Die Integration liefert ($r_2 \geq r_1$):

$$(27)\quad \begin{cases} \left| \lg \left[\dfrac{f'(z_2)\, f^2(z_1)\, |z_2|\,(R+|z_1|)\,(R-|z_2|)}{f'(z_1)\, f^2(z_2)\, |z_1|\,(R+|z_2|)\,(R-|z_1|)} \right] \right| \leq \lg \left[\dfrac{|z_2|\,(R-|z_1|)^2}{|z_1|\,(R-|z_2|)^2} \right] \\ \text{für} \quad \arc z_2 = \arc z_1, \qquad |z_2| \geq |z_1| . \end{cases}$$

Durch Vergröberung und Übergang zu einer Funktion $g(z)$ erhält man hieraus

$$(28)\quad \frac{|g'(z_1)|\,|z_1|^2}{R^2 - |z_1|^2} \leq \frac{|g'(z_2)|\,|z_2|^2}{R^2 - |z_2|^2} \quad \text{für} \quad \arc z_2 = \arc z_1, \quad |z_2| \geq |z_1| .$$

Die Ungleichung (9) dieses Paragraphen ergibt sich aus vorstehendem Resultat durch $\lim z_1 = 0$. Die nochmalige radiale Integration (von 28) liefert

$$(29)\quad \begin{cases} |g(z_1) - g(z_2)| \leq \dfrac{|g'(z_3)|\,|z_3|^2}{R^2 - |z_3|^2} \dfrac{R^2 - |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|}\, |z_1 - z_2| \\ \text{für} \quad \arc z_1 = \arc z_2 = \arc z_3, \ |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| . \end{cases}$$

§ 8. Gegenseitige Beschränkung von Funktionswerten.

In diesem Paragraphen sollen aus den bisherigen Resultaten einige Formeln gefolgert werden, die nur Argumente und Funktionswerte, aber keine Nichtbildpunkte, Ableitungen und Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung enthalten. Es werden nur Funktionen $f(z)$ betrachtet. Sämtliche Formeln sind scharf; sie besitzen unter anderem die spezielle Schrankenfunktion $\frac{z}{(R+z)^2}$.

Jeder Formel werden die auf der reellen Achse liegenden Werte von z_k, $z_k = \sigma_k r_k$, $\sigma_k^2 = 1$, für die die angegebene KOEBEsche Schrankenfunktion Gleichheit herbeiführt, hier unter der Bezeichnung „Schrankenwerte", beigefügt.

Aus den Formeln § 7, (4)

$$\frac{|f'(z_1)\,f'(z_2)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2} \geq \frac{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)}{|z_1-z_2|^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2}$$

und § 4, (9)

$$|f'(z_1)| \leq |f(z_1)-f(z_3)|\,\frac{[|R^2-\bar{z}_1 z_3|+R|z_1-z_3|]^2}{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,(R^2-|z_1|^2)}$$

findet man durch Elimination der Ableitungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{|f(z_1)-f(z_3)|\,|f(z_2)-f(z_4)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2} \\ \geq \dfrac{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,|z_2-z_4|\,|R^2-\bar{z}_2 z_4|\,(R^2-|z_1|^2)^2\,(R^2-|z_2|^2)^2}{|z_1-z_2|^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|+R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_4|+R|z_2-z_4|]^2} \end{cases}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_4 r_4 \leq 0$.

Für $z_4 = z_1$ liefert diese Formel:

$$(2)\qquad \left|\frac{f(z_1)-f(z_3)}{f(z_1)-f(z_2)}\right| \geq \frac{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_2|]^2}{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|+R|z_1-z_3|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \geq 0$, $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leq 0$.

Ebenso findet man aus (1) für $z_4 = z_3$:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{|f(z_1)-f(z_3)|\,|f(z_2)-f(z_3)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2} \\ \geq \dfrac{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,|z_2-z_3|\,|R^2-\bar{z}_2 z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}{|z_1-z_2|^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|^2\,(R-|z_3|^2)^4} \end{cases}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \leq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leq 0$.

Die Relationen § 7, (13)

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f'(z_3)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R^2-|z_3|^2)^3}{[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}$$

und § 4, (2)

$$\left|\frac{f'(z_3)}{f(z_3)}\right| \leq \frac{R+|z_3|}{|z_3|\,(R+|z_3|)}$$

führen auf

$$(4)\qquad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R-|z_3|)^2\,(R+|z_3|)^4}{|z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$, $r_3 \leq r_1, r_2$.

Wendet man dieses Ergebnis auf die Funktion

$$\varphi(t) = f(z) - f(z_4), \qquad t = R^2\,\frac{z-z_4}{R^2-\bar{z}_4 z},$$

an, so verallgemeinert es sich in

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)-f(z_4)}\right| \\ \leq \dfrac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R^2-|z_3|^2)^2\,[|R^2-\bar{z}_3 z_4|+R|z_3-z_4|]^2}{|z_3-z_4|\,|R^2-\bar{z}_3 z_4|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2} \end{array} \right.$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leq 0$, $\sigma_3 r_3 - \sigma_4 r_4 \leq 0$.

Umgekehrt spezialisiert sich die letzte Formel für $z_3 = 0$ nach Umbenennung von z_4 in z_3 in

$$(6)\quad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_3|)^2}{|z_3|\,(R-|z_1|)^2\,(R-|z_2|)^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = +1$.

Setzt man in (5) $z_2 = 0$ und schreibt statt z_1 z_3, statt z_3 z_1 und statt z_4 z_2, so erhält man

$$(7)\quad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)}\right| \geq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2}{|z_3|\,(R+|z_1|)^2\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $r_1 - \sigma_2 r_2 \leq 0$, $r_1 - \sigma_3 r_3 \geq 0$.

Aus (4) findet man für $z_3 = z_1$:

$$(8)\quad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $r_2 \geq r_1$.

Ungleichung (2) geht für $z_2 = 0$ und Umbenennung von z_3 in z_2 über in das Gegenstück von (8):

$$(9)\quad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \geq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R-|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = +1$, $r_2 \geq r_1$.

Durch Abschwächung von (8) gelangt man zu

$$(10)\quad \left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leq 1 + \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $r_2 \geq r_1$.

Weiterhin ergibt sich aus (6) für $z_1 = 0$ und Umbenennung von z_3 in z_1

$$(11)\quad \left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leq \frac{|z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,(R-|z_2|)^2},$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$,

daraus durch Abschwächung

$$(12)\quad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leq \frac{(|z_1|+|z_2|)\,(R^2+|z_1 z_2|)}{|z_1|\,(R-|z_2|)^2},$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$,

und aus (1) für $z_3 = z_4 = 0$:

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|^2}{|f(z_1)\, f(z_2)|} \leq \frac{|z_1 - z_2|^2 |R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 z_2|\,(R - |z_1|)^2\,(R - |z_2|)^2}, \tag{13}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$.

In § 4, (18) wurde die Ungleichung bewiesen

$$\left| \lg \left[\frac{(\varphi(t) - N^*)\,(\varphi(0) - N)}{(\varphi(t) - N)\,(\varphi(0) - N^*)} \right] \right| \leq 2 \lg \left(\frac{R + |t|}{R - |t|} \right).$$

Durch die Abbildung § 6, (1) ff. geht sie über in

$$\left\{ \begin{aligned} &\left| \lg \left[\frac{(F(z_2) - F(z_1))\,(F(0) - N)}{(F(z_2) - N)\,(F(0) - F(z_1))} \right] \right| \\ &\qquad \leq \lg \left[\frac{\frac{1}{|z_1|} |\,|z_1|\, z_2 + R\, z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\,|z_1 - z_2| + (R + |z_1|)^2 |z_2|}{\frac{1}{|z_1|} |\,|z_1|\, z_2 + R\, z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\,|z_1 - z_2| - (R + |z_1|)^2 |z_2|} \right], \end{aligned} \right. \tag{14}$$

für $F(z) = f(z)$ speziell in

$$\left\{ \begin{aligned} &\left| \lg \left[1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right] \right| \\ &\qquad \leq \lg \left[\frac{\frac{1}{|z_1|} |\,|z_1|\, z_2 + R\, z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\,|z_1 - z_2| + (R + |z_1|)^2 |z_2|}{\frac{1}{|z_1|} |\,|z_1|\, z_2 + R\, z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\,|z_1 - z_2| - (R + |z_1|)^2 |z_2|} \right]. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Schrankenwerte sind: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$, und $\sigma_1 = \sigma_2 = +1$, $r_2 \leq r_1$.

Im ersten Falle tritt Gleichheit ein derart, daß $\left| 1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right|$ seine obere Grenze, im zweiten derart, daß es seine untere Grenze erreicht.

Beim Vergleich der hier aufgeführten Relationen ist folgendes festzustellen:

Der Quotient $\frac{f(z_2)}{f(z_1)}$ wird durch (10) und (11) abgeschätzt. Aus der Verschiedenheit der Schrankenwerte von (10) und (11) geht hervor, daß jede dieser Ungleichungen den Quotienten in einem anderen Teilbereiche von $|z_1| < R$, $|z_2| < R$ besser abschätzt. Analoges gilt für die den Ausdruck $\left[1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right]$ enthaltenden Ungleichungen (8), (12) und (15) bzw. (9) und (15). Von den die drei Funktionswerte $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ aufweisenden Formeln (2), (3), (4), (6) und (7) besitzen nur (4) und (6) eine im gleichen Sinne abgeschätzte linke Seite, aber voneinander verschiedene Schrankenwerte; sie ergänzen also einander.

Für drei Punkte, die auf einem zu $|z| = R$ senkrechten Kreise liegen, läßt sich aus § 4, (3) eine bessere Abschätzung als (2) gewinnen. Die erwähnte Formel lautet

$$\left| \lg \left[\frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_3)} \right] \right| \leq \lg \left[\frac{|t_2|\,(R - |t_3|)^2}{|t_3|\,(R - |t_2|)^2} \right],$$

falls $\varphi(t)$ eine im Kreisinnern schlichte und reguläre, im Nullpunkt verschwindende Funktion ist und $|t_2| \geq |t_3|$, $\arc t_2 = \arc t_3$ gilt. Durch Transformation des Kreises in sich erhält man

$$t = R^2 \frac{z - z_1}{R^2 - \bar{z}_1 z}, \qquad \varphi(t) = f(z) - f(z_1)$$

$$(16)\quad \begin{cases} \left| \lg \left[\dfrac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_1) - f(z_3)} \right] \right| \leq \lg \left\{ \dfrac{|z_1 - z_2|\,|R^2 - \bar{z}_1 z_2|\,[|R^2 - \bar{z}_1 z_3| - R|z_1 - z_3|]^2}{|z_1 - z_3|\,|R^2 - \bar{z}_1 z_3|\,[|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R|z_1 - z_2|]^2} \right\}, \\ \text{falls} \quad \left| \dfrac{z_1 - z_2}{R^2 - \bar{z}_1 z_2} \right| \geq \left| \dfrac{z_1 - z_3}{R^2 - \bar{z}_1 z_3} \right|, \qquad \arc \left(\dfrac{z_1 - z_2}{R^2 - \bar{z}_1 z_2} \right) = \arc \left(\dfrac{z_1 - z_3}{R^2 - \bar{z}_1 z_3} \right). \end{cases}$$

Schrankenwerte dieser Relation sind diejenigen Zahlen, die gleichzeitig den Ungleichungen

$$\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \geq 0, \qquad \sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \geq 0$$

und den obigen Gültigkeitsbedingungen von (16) genügen. Nach kurzer Rechnung findet man

$$\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \geq 0, \qquad \sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leq 0.$$

Ungleichung (16) ist für ihre zulässigen Werte offensichtlich genauer als (2).

Aus Ungleichung (11) läßt sich eine Abschätzung für den Radius R gewinnen, falls eine sich noch herausstellende Voraussetzung erfüllt ist. Genannte Formel läßt sich schreiben

$$\frac{R + |z_1|}{R - |z_2|} \geq \sqrt{\left| \frac{z_1 f(z_2)}{z_2 f(z_1)} \right|},$$

$$(17)\qquad R\left[\sqrt{|z_1 f(z_2)|} - \sqrt{|z_2 f(z_1)|}\right] \leq \sqrt{|z_1 z_2|}\left[\sqrt{|z_1 f(z_1)|} + \sqrt{|z_2 f(z_2)|}\right].$$

Sie liefert eine Abschätzung für R dann und nur dann, wenn

$$|z_1 f(z_2)| \geq |z_2 f(z_1)|.$$

Falls z. B.

$$f(z_1) = \frac{|z_1|}{(R' + |z_1|)^2}, \qquad f(z_2) = \frac{|z_2|}{(R' - |z_2|)^2}$$

ist, liefert die Ungleichung $R \leq R'$.

§ 9. Die Abschätzung des Schwarzschen Differentialausdruckes.

Aus der Grundformel § 2, (7) findet man durch den Grenzübergang $\lim z_2 = z_1$ nach kurzer Rechnung

$$(1)\qquad \left| 2\frac{F'''(z)}{F'(z)} - 3\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2 \right| \leq \frac{12R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}.$$

Dieses Resultat ist bereits bekannt; es ist veröffentlicht von Kraus in den Mitteilungen des mathematischen Seminars Gießen, Heft 21, 1932.

Nach dem im Anschluß an § 2, (7) Gesagten ist Ungleichung (1) invariant gegenüber beliebigen linearen Transformationen der abhängigen Veränderlichen und gegenüber solchen linearen Transformationen der unabhängigen

Veränderlichen, die den Kreis in sich überführen. Schrankenfunktionen sind die Funktionen gemäß § 2, (9) und (10) und deren linear gebrochene Funktionen, und zwar tritt nach § 2, (11) und (12) Gleichheit ein für Werte z, die auf dem Orthogonalkreis

$$|\alpha|^2|z|^2 + 2R(\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z) + |\alpha|^2 R^2 = 0$$

bzw. dem Radius

$$z = \bar{\beta}^2 \bar{z}$$

liegen.

Durch leichte Abschwächungen kann man aus (1) die Formeln

$$\left|\frac{F'''(z)}{F'(z)}\right| \geq \frac{3}{2}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|^2 - \frac{6R^2}{(R^2 - |z|^2)^2} \tag{2}$$

und

$$\left|\frac{d}{dz}\left[\frac{F''(z)}{F'(z)}\right]\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|^2 - \frac{6R^2}{(R^2 - |z|^2)^2} \tag{3}$$

ableiten. Beide sind scharf. Die Herleitung der allgemeinen Schrankenfunktion bedingt einen großen Rechenaufwand. Es mögen daher folgende Angaben genügen:

$$f(z) = \frac{z}{(R - \varepsilon z)^2}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

führt in (2) für $z = \pm\bar{\varepsilon}|z|$ Gleichheit herbei, in (3) für $z = \bar{\varepsilon}|z|$ unbeschränkt, für $z = -\bar{\varepsilon}|z|$ nur unter der Beschränkung $|z| \leq \frac{R}{2+\sqrt{3}}$. Die Funktion

$$g(z) = z + \frac{\varepsilon^2 R^2}{z}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

bewirkt in (2) Gleichheit für $z = \pm\varepsilon|z|$ unbeschränkt, in (3) jedoch nur im Intervalle $|z| \leq \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Aus (1) findet man für $z = 0$

$$\left|\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right| \leq \frac{1}{R^2} \tag{4}$$

sowie nach kurzer Rechnung

$$\left|\frac{b_1}{b_{-1}}\right| \leq \frac{1}{R^2}. \tag{5}$$

Diese Formeln liefern eine Abschätzung nach oben für R.

§ 10. Abschätzungen für Nichtbildpunkte und die Funktionen $M(r)$ und $m(r)$.

Die Relation § 5, (7)

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{N - a_0}\right| \leq \frac{2}{R}$$

läßt sich zu einer Abschätzung für $N - a_0$ ausgestalten. Man findet, falls $|a_2|R > 2|a_1|$ ist,

$$\left|(|a_2|^2 R^2 - 4|a_1|^2)(N - a_0) + R^2 a_1^2 \bar{a}_2\right| \leq 2R|a_1|^3, \tag{1}$$

d.h., der von Bildpunkten freie Teil der Ebene ist im Innern eines Kreises enthalten. Das Äußere dieses Kreises, dem insbesondere das Kreisinnere

$$|w-a_0|<\frac{|a_1|^2 R}{|a_2|R+2|a_1|}$$

und das Kreisäußere

$$|w-a_0|>\frac{|a_1|^2 R}{|a_2|R-2|a_1|}$$

angehören, wird von Bildpunkten bedeckt.

Ist dagegen $|a_2|R<2|a_1|$, so gilt

$$|(4|a_1|^2-|a_2|^2R^2)(N-a_0)-R^2a_1^2\bar{a}_2|\geq 2R|a_1|^3, \tag{2}$$

d.h., die Nichtbildpunkte liegen außerhalb eines Kreises, und die Funktion nimmt alle Punkte desselben und erst recht des Kreises

$$|w-a_0|\leq\frac{|a_1|^2 R}{|a_2|R+2|a_1|}$$

an. Im Grenzfalle $|a_2|R=2|a_1|$ sind die Nichtbildpunkte auf die Halbebene beschränkt:

$$\bar{a}_1^2 a_2(N-a_0)+a_1^2\bar{a}_2(\bar{N}-\bar{a}_0)+|a_1|^4\leq 0.$$

Diese Ergebnisse sind größtenteils bereits enthalten in einer Arbeit von Werner Fenchel (Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Berlin, physik.-math. Kl. **1931**, H. 22/23, 431–436).

Aus den Formeln § 4, (9) und (10) findet man für $F(z)=f(z)$, z bzw. $z_0=0$

$$\frac{(R-|z|)^2}{|f'(0)|R^2|z|}\leq\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{N}\right|\leq\frac{(R+|z|)^2}{|f'(0)|R^2|z|}, \tag{3}$$

eine Verallgemeinerung der bekannten Verzerrungsformeln. Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion

$$f(z)=\frac{R^2 z}{(\varepsilon R-z)(\bar{\varepsilon}R-z)},\qquad|\varepsilon|=1,$$

mit $N=\frac{R}{2-\varepsilon-\bar{\varepsilon}}$; Gleichheit ergibt sich links für $z=|z|$, rechts für $z=-|z|$. Durch Multiplikation mit der Ungleichung

$$|N|\geq\frac{|f'(0)|R}{4}$$

[aus § 4, (15)], und den Verzerrungsformeln § 4, (5) und (15) geht (3) über in

$$\left|\frac{N}{f(z)}-1\right|\geq\frac{(R-|z|)^2}{4R|z|}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^2\leq\left|1-\frac{f(z)}{N}\right|\leq\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^2, \tag{5}$$

$$|N-f(z)|\geq\frac{|f'(0)|R(R-|z|)^2}{4(R+|z|)^2}. \tag{6}$$

Setzt man in (3) $\arc N_1 = \arc\big(f(z)\big)$, so erhält man eine Abschätzung für diejenigen Nichtbildpunkte, die auf der Verbindungsgeraden $0-f(z)$ liegen:

$$|N_1| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2|z|\,|f(z)|}{|f'(0)|\,R^2|z| - (R-|z|)^2|f(z)|}. \tag{7}$$

Entsprechend gilt für $\arc N_2 = \arc\big(f(z)\big) + \pi$, d. h. für die auf der rückwärtigen Verlängerung dieser Geraden liegenden Nichtbildpunkte

$$|N_2| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2|z|\,|f(z)|}{(R+|z|)^2|f(z)| - |f'(0)|\,R^2|z|}. \tag{8}$$

Unter $M(r)$ und $m(r)$ werden, wie üblich, das Maximum und Minimum des absoluten Betrages einer Funktion auf dem Kreise $|z| = r$ verstanden.

Um untere Schranken für das Maximum $M(r)$ einer Funktion $f(z)$ zu bestimmen, werde von einer im Einheitskreise schlichten und regulären Funktion

$$W = \varphi(w) = C_1 w + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \cdots$$

ausgegangen. Wenn

$$w = \frac{f(z)}{M(r)}, \qquad |z| \leq r < R$$

gesetzt wird, ist

$$W = \varphi\left(\frac{f(z)}{M(r)}\right) = \psi(z)$$

eine im genannten Kreise schlichte und reguläre Funktion von z. Ihre Potenzreihenentwicklung beginnt

$$\psi(z) = \frac{C_1 c_1}{M(r)} z + \left[\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right] z^2 + \left[\frac{C_1 c_3}{M(r)} + \frac{2 C_2 c_1 c_2}{M^2(r)} + \frac{C_3 c_1^3}{M^3(r)}\right] z^3 + \cdots.$$

Aus § 5, (8) und § 9, (4) folgt einerseits

$$|C_2| \leq 2|C_1|, \qquad |C_1 C_3 - C_2^2| \leq |C_1|^2,$$

andererseits

$$\left|\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right| \leq \frac{2}{r}\,\frac{|C_2 c_1|}{M(r)},$$

$$\left|\frac{C_1 c_1}{M(r)}\left[\frac{C_1 c_3}{M(r)} + \frac{2 C_2 c_1 c_2}{M^2(r)} + \frac{C_3 c_1^3}{M^3(r)}\right] - \left[\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right]^2\right| \leq \frac{|C_1 c_1|^2}{r^2 M^2(r)}.$$

Vereinfacht schreibt sich das zweite Ungleichungssystem

$$\left|c_2 r M(r) + \frac{C_2}{C_1} c_1^2 r\right| \leq 2|c_1|\,M(r),$$

$$\left|(c_1 c_3 - c_2^2) r^2 M^2(r) + \frac{C_1 C_3 - C_2^2}{C_1^2} c_1^4 r^2\right| \leq |c_1|^2 M^2(r).$$

Die schärfsten, vermöge der beiden ersten Ungleichungen richtigen Abschätzungen sind nunmehr

$$M(r) \geq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1| - |c_2| r}, \tag{9}$$

$$M^2(r) \geq \frac{|c_1|^4 r^2}{|c_1|^2 - |c_1 c_3 - c_2^2| r^2}. \tag{10}$$

Aus beiden Relationen folgt durch Abschwächung

$$M(r) \geq |c_1 r|. \tag{11}$$

Alle drei Formeln besitzen die Schrankenfunktion $c_1 z$.

Obere Schranken für $m(r)$ lassen sich unter Benutzung der Umkehrungsfunktion gewinnen. Es werde die Funktion

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

im Kreise $|z| \leq r < R$ betrachtet. Sie besitzt im Kreise $|w| \leq m(r)$ eine schlichte und reguläre Umkehrungsfunktion $z = \varphi(w)$, die in genanntem Kreise absolut kleiner oder gleich r ist. Folglich ist auch

$$\zeta = \psi(w) = \frac{z}{(r + \varepsilon z)^2} = C_1 w + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \cdots, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

eine für $|w| < m(r)$ schlichte und reguläre Funktion von w. Ihre drei ersten Koeffizienten drücken sich nach kurzer Rechnung wie folgt aus:

$$C_1 = \frac{1}{c_1 r^2}, \qquad C_2 = -\frac{1}{c_1^3 r^3}(c_2 r + 2\varepsilon c_1),$$

$$C_3 = \frac{1}{c_1^5 r^4}(-c_1 c_3 r^2 + 2c_2^2 r^2 + 4\varepsilon c_1 c_2 r + 3\varepsilon^2 c_1^2).$$

Aus den Ungleichungen § 5, (17) und § 10, (5) entnimmt man

$$m(r) \leq \frac{2|C_1|}{|C_2|}, \qquad m^2(r) \leq \frac{|C_1|^2}{|C_1 C_3 - C_2^2|};$$

$$m(r) \leq \frac{2|c_1|^2 r}{|c_2 r + 2\varepsilon c_1|}, \qquad m^2(r) \leq \frac{|c_1|^4 r^2}{|(c_1 c_3 - c_2^2) r^2 + \varepsilon^2 c_1^2|}.$$

Hieraus gewinnt man die schärfsten Abschätzungen

$$m(r) \leq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1| + |c_2| r}, \tag{12}$$

$$m^2(r) \leq \frac{|c_1|^4 r^2}{|c_1|^2 + |c_1 c_3 - c_2^2| r^2}, \tag{13}$$

die ebenso wie die Abschwächung

$$m(r) \leq |c_1| r \tag{14}$$

den Abschätzungen von $M(r)$ nach unten vollkommen analog gebaut sind. Alle drei Formeln besitzen die Schrankenfunktion $c_1 z$.

Faßt man die Ungleichungen (9) bis (14) zusammen und fügt die Relationen § 4, (15), § 7, Satz 10 und § 4, (5) hinzu, so erhält man die übersichtliche Reihe von

Satz 11: *Für die einer schlichten Funktion $f(z)$ zugeordneten Funktionen $M(r)$ und $m(r)$ gelten im Innern des Kreises $|z|<R$ die Relationen:*

$$\frac{|c_1|R^2 r}{(R+r)^2},\ \frac{|c_1|^2 r}{2|c_1|+|c_2|r} \leq \frac{|c_1|^2 R^2 r}{|c_1|R^2+|c_2|R^2 r+|c_1|r^2} \leq m(r) \leq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1|+|c_2|r},$$

$$\frac{|c_1|^2 r}{\sqrt{|c_1|^2+|c_1 c_3-c_2^2|r^2}} \leq |c_1|r \leq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1|-|c_2|r},$$

$$\frac{|c_1|^2 r}{\sqrt{|c_1|^2-|c_1 c_3-c_2^2|r^2}} \leq M(r) \leq \frac{|c_1|R^2 r}{(R-r)^2}.$$

Hiervon ist die zweite Ungleichung nicht scharf, die erste, dritte und letzte besitzen die KOEBE*sche Schrankenfunktion $\frac{c_1 R^2 z}{(R+\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, alle übrigen $c_1 z$.*

Insbesondere geht aus der Ungleichung $m(R) \leq |c_1|R$ hervor, daß es auf jedem Kreise um den Nullpunkt der Bildebene, dessen Radius $\geq |c_1|R$ ist, Nichtbildpunkte gibt.

Für schlichte Funktionen mit Pol liefern die Relationen § 4, (21) und (22) Abschätzungen der Nichtbildpunkte, wenn man $z=0$ setzt:

$$(15) \qquad \frac{|F'(0)|R^2|p|}{(R+|p|)^2} \leq |N-F(0)| \leq \frac{|F'(0)|R^2|p|}{(R-|p|)^2}$$

$$(16) \qquad \frac{|P|(R-|p|)}{|p|(R+|p|)} \leq |N-F(0)| \leq \frac{|P|(R+|p|)}{|p|(R-|p|)}.$$

Etwas genauer werden die rechten Schranken, wenn man von § 4, Satz 3 ausgeht. — Das Ergebnis (15) wurde bereits von BIEBERBACH gefunden und veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, physik.-math. Klasse, 1937, S. 359.

Die in § 8 abgeleiteten Relationen zwischen verschiedenen Funktionswerten können als Grundlage für die Abschätzung von Nichtbildpunkten dienen. Setzt man $\frac{Nf(z)}{N-f(z)}$ an die Stelle von $f(z)$, so erhält man z. B. aus § 8, (9):

$$(17) \qquad \left|\frac{N}{N-f(z_2)}\right| \geq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R-|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|]^2}\left|\frac{f(z_1)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|$$

aus § 8, (8):

$$(18) \qquad \left|\frac{N}{N-f(z_2)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}\left|\frac{f(z_1)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|$$

aus § 8, (2):

$$(19) \qquad \left|\frac{N-f(z_3)}{N-f(z_3)}\right| \geq \frac{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|+R|z_1-z_3|]^2}\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_1)-f(z_3)}\right|.$$

Diesen Ungleichungen ist noch eine weitere hinzuzufügen, die aus § 4, (18) für $F(z)=f(z)$, $\lim N_2=\infty$ durch Abschwächung entsteht:

$$(20) \qquad \left[\frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|}\right]^2 \leq \left|\frac{N-f(z_1)}{N-f(z_2)}\right| \leq \left[\frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|}\right]^2.$$

Die Formeln (17) bis (20) lassen sich zusammenfassend in der Gestalt

$$\left|\frac{N-A}{N-B}\right| \leq C, \qquad C \geq 1$$

schreiben; die Bedingung für C ergibt sich daraus, daß die Ungleichung für $\lim N = \infty$ richtig ist. Nach Durchführung einiger Rechnungen findet man für N die Beschränkung

$$|(C^2 - 1)N + (A - BC^2)| \geq C|A - B|.$$

Dementsprechend kann man für jede der Ungleichungen (17) bis (20) einen Kreis angeben derart, daß Nichtbildpunkte nur in seinem Äußeren anzutreffen sind, während sein Inneres von Bildpunkten überdeckt ist. Die hier nicht behandelten Ergebnisse von § 8 führen teilweise zu komplizierteren Abschätzungen.

Eine erste, zwei Nichtbildpunkte enthaltende Relation wurde bereits in § 4, (17) gefunden:

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)-N_1} - \frac{F'(z)}{F(z)-N_2}\right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}.$$

Für $F(z) = f(z)$, $z = 0$ folgt hieraus

$$\left|\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right| \leq \frac{4}{|f'(0)|R}, \tag{21}$$

woraus nach Szegö (s. Bieberbach, Funktionentheorie II, S. 75) zu schließen ist, daß von zwei diametral gegenüberliegenden Randpunkten mindestens einer eine Entfernung größer oder gleich $\frac{|f'(0)|R}{2}$ vom Nullpunkte besitzt.

Für eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ läßt sich ein ähnlicher Schluß ziehen, wenn es Nichtbildpunkte gibt, die zu $F(0)$ diametral liegen. Gibt es Nichtbildpunkte derart, daß ihre Verbindungslinien mit $F(0)$ senkrecht aufeinanderstehen, so ist nach § 4, (17)

$$\frac{1}{|N_1 - F(0)|^2} + \frac{1}{|N_2 - F(0)|^2} \leq \frac{16}{|F'(0)|^2 R^2}, \tag{22}$$

und für mindestens einen Index gilt:

$$|N_i - F(0)| \geq \frac{|F'(0)|R}{2\sqrt{2}}.$$

Schrankenfunktion für die beiden letzten Ungleichungen ist

$$\frac{z}{R^2 + 2iRz + z^2},$$

wenn $N_1 = F(R)$, $N_2 = F(-R)$ gewählt werden.

Ferner folgt aus § 4, (17) für $\lim z = p$

$$|N_1 - N_2| \leq \frac{4|P|R}{R^2 - |p|^2} \tag{23}$$

und daraus für $\lim p = 0$, d.h. für $g(z)$

$$|N_1 - N_2| \leq \frac{4|b_{-1}|}{R}. \tag{24}$$

In Formel (23) gilt das Gleichheitszeichen für die Funktion

$$\frac{z}{R^2 - \left(|p| + \frac{R^2}{|p|}\right) z + z^2}$$

und die Werte $N_1 = F(R)$, $N_2 = F(-R)$; (24) besitzt die Schrankenfunktion

$$\frac{b_{-1}}{z} + b_0 + \varepsilon \frac{b_{-1} z}{R^2}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Als Ungleichungen, die zwei Nichtbildpunkte enthalten, sind noch die früheren § 4, (18) und (19)

$$\left|\lg\left[\frac{(F(z_2) - N_1)(F(z_1) - N_2)}{(F(z_1) - N_1)(F(z_2) - N_2)}\right]\right| \leq 2\lg\left[\frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R|z_1 - z_2|}{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R|z_1 - z_2|}\right],$$

$$\left|\lg\left[\frac{F(z) - N_1}{F(z) - N_2}\right]\right| \leq 2\lg\left[\frac{|R^2 - \bar{p} z| + R|z - p|}{|R^2 - \bar{p} z| - R|z - p|}\right],$$

und ihre Spezialisierung

$$\left|\lg\left[\frac{N_1 - F(0)}{N_2 - F(0)}\right]\right| \leq 2\lg\left[\frac{R + |p|}{R - |p|}\right] \tag{25}$$

zu erwähnen.

Setzt man in Formel § 4, (17) $z = 0$ und beschränkt sich auf *Funktionen, für die* $a_0 = 0$ *ist*, so erhält man

$$\left|\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right| \leq \frac{4}{|a_1| R},$$

$$\left|\frac{1}{|N_1|} - \frac{1}{|N_2|}\right| \leq \frac{4}{|a_1| R},$$

$$\frac{1}{m(R)} - \frac{1}{M(R)} \leq \frac{4}{|a_1| R}. \tag{26}$$

Aus Ungleichung (23) folgt allgemein

$$|N_1| - |N_2| \leq \frac{4|P| R}{R^2 - |p|^2},$$

$$M(R) - m(R) \leq \frac{4|P| R}{R^2 - |p|^2}. \tag{27}$$

Beschränkt man sich auf *Funktionen mit* $a_0 = 0$, so liefert Formel (25):

$$\frac{M(R)}{m(R)} \leq \left(\frac{R + |p|}{R - |p|}\right)^2. \tag{28}$$

Die Ergebnisse (26) bis (28) sind, wie man leicht verifiziert, scharf.

Für die Schwankung einer Funktion $f(z)$ auf einem Kreise $|z|=r$ findet man aus Satz 11 folgende scharfen Relationen:

$$(29)\qquad \frac{2|c_1|+|c_2|r}{2|c_1|-|c_2|r}, \qquad \sqrt{\frac{|c_1|^2+|c_1c_3-c_2^2|r^2}{|c_1|^2-|c_1c_3-c_2^2|r^2}} \leq \frac{M(r)}{m(r)} \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2,$$

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{4|c_1|^2|c_2|r^2}{4|c_1|^2-|c_2|^2r^2} \leq M(r)-m(r) \leq \dfrac{|c_1|R^3r^2(2|c_1|+|c_2|R)}{(R-r)^2[|c_1|R^2+|c_2|R^2r+|c_1|r^2]} \\ \qquad\qquad \leq \dfrac{4|c_1|R^3r^2}{(R^2-r^2)^2}, \end{cases}$$

$$(31)\qquad \frac{2|c_1|^4|c_1c_3-c_2^2|r^4}{|c_1|^4-|c_1c_3-c_2^2|^2r^4} \leq M^2(r)-m^2(r) \leq \frac{8|c_1|^2R^5(R^2+r^2)r^3}{(R^2-r^2)^4},$$

$$(32)\qquad \frac{|c_2|}{|c_1|^2} \leq \frac{1}{m(r)}-\frac{1}{M(r)} \leq \frac{2|c_1|+|c_2|R}{|c_1|^2R} \leq \frac{4}{|c_1|R},$$

$$(33)\qquad 2\frac{|c_1c_3-c_2^2|}{|c_1|^4} \leq \frac{1}{m^2(r)}-\frac{1}{M^2(r)} \leq 8\frac{R^2+r^2}{|c_1|^2R^3r}.$$

Die Ungleichung § 7, (12) läßt sich in der Form

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leq \frac{|c_1|R^2(|z_2|-|z_1|)(R^2-|z_1z_2|)}{(R-|z_1|)^2(R-|z_2|)^2}$$

schreiben, worin $\arc z_2=\arc z_1$, $|z_2|\geq|z_1|$ ist. Wählt man z_2 derart, daß $|f(z_2)|=M(r_2)$, $(r_1=|z_1|,\ r_2=|z_2|)$, so ist die linke Seite mindestens gleich $M(r_2)-M(r_1)$.

Mithin ergibt sich

$$(34)\qquad M(r_2)-M(r_1) \leq \frac{|c_1|R^2(r_2-r_1)(R^2-r_1r_2)}{(R-r_1)^2(R-r_2)^2} \quad \text{für} \quad r_2\geq r_1.$$

Gleichheit tritt für die Koebesche Schrankenfunktion ein. Eine analoge Formel für $m(r_2)-m(r_1)$ ist dagegen nicht scharf.

Durch ähnliche Vergröberungen wie die soeben angewandte leitet man aus (3) ab;

$$(35)\qquad \frac{1}{M(r)}-\frac{1}{M(R)} \geq \frac{(R-r)^2}{|c_1|R^2r},$$

$$(36)\qquad \frac{1}{m(r)}-\frac{1}{m(R)} \geq \frac{(R-r)^2}{|c_1|R^2r},$$

aus (4):

$$(37)\qquad \frac{m(r)}{m(R)} \leq \frac{4Rr}{(R+r)^2},$$

und aus (6):

$$(38)\qquad m(R)-m(r) \geq \frac{|c_1|R(R-r)^2}{4(R+r)^2}.$$

Alle diese Formeln besitzen die Koebesche Schrankenfunktion.

§ 11. Übertragung von Ungleichungen für ungerade auf allgemeine schlichte Funktionen.

Bekanntlich wird jeder schlichten und regulären Funktion $f(z)$ durch die Gleichungen

$$\varphi^n(t) = f(z), \qquad t^n = z, \qquad n \text{ natürliche Zahl.}$$

eine bis auf eine Einheitswurzel bestimmte, im Kreise $|t| < R^{1/n}$ schlichte und reguläre Funktion $\varphi(t)$ zugeordnet, deren Potenzreihe nur die Potenzen $t, t^{n+1}, t^{2n+1}, \ldots$ enthält. $\varphi(t)$ kann in die bisherigen Formeln eingeführt werden, und es lassen sich dadurch neue Ungleichungen für $f(z)$ gewinnen. Diese brauchen allerdings nicht immer scharf zu sein.

Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß bei Ungleichungen, die nur Schrankenfunktionen der am Ende von § 2 abgeleiteten Art

$$\varphi(t) = C \frac{2R^{1/n} t + (\beta + \gamma) t^2}{(R^{1/n} + \beta t)^2 + \lambda [2R^{1/n} t + (\beta + \gamma) t^2]}$$

$-|\beta| = |\gamma| = 1, \gamma \neq \beta$, C beliebig, λ derart, daß der Nenner $\neq 0$ für $|t| < R^{1/n}$ — besitzen, falls die Trivialität $n = 1$ ausgeschlossen wird, $n = 2$, $\lambda = \gamma = -\beta$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer Schrankenfunktion für $f(z)$ ist.

Unter den angegebenen Voraussetzungen hat die $\varphi(t)$ zugeordnete Funktion $f(z)$ den Ausdruck

$$f(z) = C^n z \left\{ \frac{2R^{1/n} + (\beta + \gamma) z^{1/n}}{(R^{1/n} + \beta z^{1/n})^2 + \lambda [2R^{1/n} z^{1/n} + (\beta + \gamma) z^{2/n}]} \right\}^n.$$

Wegen der Teilerfremdheit von Zähler und Nenner ist für ihre Eindeutigkeit zunächst notwendig

$$\beta + \gamma = 0,$$

so daß sie sich reduziert auf

$$f(z) = \frac{2^n C^n R z}{[R^{2/n} + 2(\beta + \lambda) R^{1/n} z^{1/n} + \beta^2 z^{2/n}]^n};$$

für die Eindeutigkeit ist weiterhin notwendig

$$\beta + \lambda = 0, \qquad n = 2,$$

so daß die KOEBEsche Funktion

$$f(z) = \frac{4C^2 R z}{(R + \beta^2 z)^2}, \qquad |\beta| = 1,$$

hervorgeht, die in der Tat regulär und schlicht ist und für gewisse Wertsysteme die Ungleichung in eine Gleichung überführt.

Mit Ausnahme der Relation § 2, (7) ist für keine Ungleichung bewiesen, daß sie keine Schrankenfunktion außer der verallgemeinerten KOEBEschen besitzt. Umgekehrt ist jedoch, bis auf wenige hier ausscheidende Ausnahmen, keine andere bekannt. Es soll daher im folgenden nur von einer Umformung von Ungleichungen vermöge ungerader Funktionen gemäß den Gleichungen

$$\varphi^2(t) = f(z), t^2 = z$$

Gebrauch gemacht werden. Eine Umformung in scharfe Ungleichungen ist nicht nur für Relationen möglich, die speziell für ungerade Funktionen hergeleitet sind, sondern auch für solche, unter deren Schrankenfunktionen auch ungerade auftreten. Dies ist insbesondere der Fall bei Relationen, die beliebige lineare Transformationen der abhängigen Variablen zulassen.

Zwischen den arcus der Wurzeln zweier Argumentwerte z_1 und z_2 und ihrer Funktionswerte $f(z_1)$ und $f(z_2)$ besteht ein Zusammenhang insofern, als $\sqrt{\frac{f(z)}{z}}$ im Kreise eindeutig ist. Dagegen ist jede Zahl $\sqrt{N}$ zweideutig, da die ungerade Funktion $\varphi(t)$ mit $\sqrt{N}$ auch $-\sqrt{N}$ vermeidet.

Zunächst formt sich die grundlegende Formel § 2, (7)

$$\left| \frac{\varphi'(t_1)\,\varphi'(t_2)}{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^2} - \frac{1}{(t_1-t_2)^2} \right| \leq \frac{R}{(R-|t_1|^2\,(R-|t_2|^2}$$

um in

$$(1)\qquad \left| \frac{f'(z_1)\,f'(z_2)}{\sqrt{f(z_1)\,f(z_2)}\,[\sqrt{f(z_1)}-\sqrt{f(z_2)}]^2} - \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}\,(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2})^2} \right| \leq \frac{R}{\sqrt{|z_1 z_2|}\,(R-|z_1|)\,(R-|z_2|)}.$$

Dieses Resultat läßt sich, ebenso wie der größte Teil der folgenden, durch die bekannten linearen Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen verallgemeinern.

Die Relation § 10, (3)

$$\frac{(\sqrt{R}-|t|)^2}{|\varphi'(0)|\,R|t|} \leq \left| \frac{1}{\varphi(t)} \pm \frac{1}{\sqrt{N}} \right| \leq \frac{(\sqrt{R}+|t|)^2}{|\varphi'(0)|\,R|t|}$$

führt auf

$$(2)\qquad \frac{(\sqrt{R}-\sqrt{|z|})^2}{\sqrt{|f'(0)|}\,R\sqrt{|z|}} \leq \left| \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \pm \frac{1}{\sqrt{N}} \right| \leq \frac{(\sqrt{R}+\sqrt{|z|})^2}{\sqrt{|f'(0)|}\,R\sqrt{|z|}}.$$

Ebenso geht die Ungleichung § 4, (18) über in

$$(3)\qquad \left| \lg \left[\frac{(\sqrt{f(z_2)}+\sigma_1\sqrt{N_1})\,(\sqrt{f(z_1)}+\sigma_2\sqrt{N_2})}{(\sqrt{f(z_1)}+\sigma_1\sqrt{N_1})\,(\sqrt{f(z_2)}+\sigma_2\sqrt{N_2})} \right] \right| \leq 2\lg \left[\frac{|R-\sqrt{\bar{z}_1 z_2}|+\sqrt{R}\,|\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}|}{R-\sqrt{\bar{z}_1 z_2}|-\sqrt{R}\,|\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}|} \right],$$

$$\sigma_1 = \pm 1, \qquad \sigma_2 = \pm 1.$$

Die Umrechnung der Formel § 9, (1)

$$\left| 2\frac{\varphi'''(t)}{\varphi'(t)} - 3\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2 \right| \leq \frac{12R}{(R-|t|^2)^2}$$

liefert

$$(4)\qquad \left| 8\frac{f'''(z)}{f'(z)} - 12\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 + 3\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 - \frac{3}{z^2} \right| \leq \frac{12R}{|z|\,(R-|z|)^2}.$$

Durch lineare Transformation beider Variablen erhält man schließlich

Satz 12: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left| \left[8\frac{F'''(z)}{F'(z)} - 12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2 \right] + 3\left[\frac{(F(z_0)-N)\,F'(z)}{(F(z)-F(z_0))\,(F(z)-N)} \right]^2 - 3\left[\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)\,(R^2-\bar{z}_0 z)} \right]^2 \right|$$
$$\leq \frac{12R\,[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{(R^2-|z|^2)^2\,|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|}.$$

Die Ungleichung besitzt Koebesche *Schrankenfunktionen.*

Diese Ungleichung liefert eine Verschärfung der früheren § 9, (1) und § 4, Satz 3, von denen die erste nur den ersten, die zweite nur die Differenz des zweiten und dritten Terms auf der linken Seite von Satz 12 abschätzt.

Aus Satz 12 gewinnt man, wenn man $F(z)=f(z)$, $z=0$, $\lim N=\infty$ setzt, eine implizite Abschätzung für die Funktion $f(z)$:

$$\left|\left(\frac{c_1}{f(z)}\right)^2+16\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)-\left(\frac{R^2-|z|^2}{R^2 z}\right)^2\right|\leq\frac{4(R+|z|)^2}{R^3|z|}. \tag{5}$$

Die Formel ergänzt die frühere von § 4, (14) der sie mit Ausnahme des dort fehlenden mittleren Terms auf der linken Seite gleicht. Ferner führt Satz 12 für $\lim z_0=p$ auf

$$\begin{cases}\left|8\frac{F'''(z)}{F'(z)}-12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2+3\left(\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right)^2-3\left[\frac{R^2-|p|^2}{(z-p)(R^2-\bar{p}z)}\right]^2\right| \\ \qquad\leq\frac{12R\,[|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|]^2}{(R^2-|z|^2)^2|z-p||R^2-\bar{p}z|}\end{cases} \tag{6}$$

und für $\lim|z_0|=R$ auf

$$\left|8\frac{F'''(z)}{F'(z)}-12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2+3\left[\frac{(\varrho-N)F'(z)}{(F(z)-\varrho)(F(z)-N)}\right]^2\right|\leq\frac{48R^2}{(R^2-|z|^2)^2}. \tag{7}$$

Die letzte Formel verschärft die früheren § 9, (1) und § 4, (17). Insbesondere erhält man hieraus für $z=0$

$$\left|16\left(\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)+a_1^2\left(\frac{1}{N-a_0}-\frac{1}{\varrho-a_0}\right)^2\right|\leq\frac{16}{R^2} \tag{8}$$

und durch weitere Spezialisierung auf eine Funktion $f(z)$

$$\left|16\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)+\left(\frac{c_1}{\varrho}\right)^2\right|\leq\frac{16}{R^2}. \tag{9}$$

Durch diese Ungleichung und den KOEBEschen Satz

$$\left|\frac{c_1}{\varrho}\right|^2\leq\frac{16}{R^2}$$

wird die Größe $1/\varrho^2$ auf das Innere eines abgeschlossenen Kreisbogenzweiecks beschränkt, das nur im Falle

$$\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}=0$$

in einen vollen Kreis entartet. — Die Formeln (8) und (9) liefern Abschätzungen nach oben für R.

Setzt man in Ungleichung (6) $z=0$, so kann das Resultat

$$\left|\left(\frac{a_1}{N-a_0}\right)^2+\frac{16a_3}{a_1}-\frac{16a_2^2}{a_1^2}-\left(\frac{R^2-|p|^2}{R^2 p}\right)^2\right|\leq\frac{4(R+|p|)^2}{R^3|p|} \tag{10}$$

zur Abschätzung von $N-a_0$ dienen. Die Größe $\frac{1}{(N-a_0)^2}$ wird auf das Innere eines Kreises beschränkt. Dagegen sind die der Bedingung

$$\left|\left(\frac{a_1}{w-a_0}\right)^2+\frac{16a_3}{a_1}-\frac{16a_2^2}{a_1^2}-\left(\frac{R^2-|p|^2}{R^2 p}\right)^2\right|>\frac{4(R+|p|)^2}{R^3|p|}$$

genügenden Zahlen w Funktionswerte von $F(z)$.

In dem speziellen Falle $a_0 = 0$ kann man aus (10) die Abschätzung

$$(11) \qquad \frac{1}{M^2(R)} \geq \left| \frac{16 a_3}{a_1^3} - \frac{16 a_2^2}{a_1^4} - \left(\frac{R^2 - |p|^2}{a_1 R^2 p} \right)^2 \right| - \frac{4 (R + |p|)^2}{|a_1|^2 R^3 |p|}$$

gewinnen. Sie geht in eine Gleichung über für die Funktion

$$F(z) = \frac{z}{R^2 - \left(|p| + \frac{R^2}{|p|} \right) z + z^2}.$$

Für die analoge Abschätzung von $m(R)$ ist keine Schrankenfunktion bekannt.

§ 12. Folgerungen aus einer Formel von Löwner.

Während alle bisherigen Ergebnisse auf dem in § 2 bewiesenen verallgemeinerten Flächensatz beruhen, sollen in diesem Paragraphen noch einige Formeln hergeleitet werden, deren Grundlage die bekannte LÖWNERsche Abschätzung

$$(1) \qquad |c_3| \leq \frac{3 |c_1|}{R^2}$$

ist [s. Math. Ann. 89 (1923).]

Zunächst ist zu bemerken, daß man aus dieser Formel einen Satz analog Satz 6 in § 5 gewinnen kann.

Durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variablen, die den Kreis in sich überführt, erhält man aus obengenannter Ungleichung den

Satz 13: *Eine schlichte Funktion $f(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Ungleichung:*

$$|(R^2 - |z|^2)^2 f'''(z) - 6 \bar{z} (R^2 - |z|^2) f''(z) + 6 \bar{z}^2 f'(z)| \leq 18 R^2 |f'(z)|.$$

Diese Relation besitzt die KOEBEsche *Schrankenfunktion* $\frac{z}{(R - z)^2}$.

Gemäß § 4, (7) läßt sich diese Ungleichung in

$$(2) \quad |(R^2 - |z|^2)^2 f'''(z) - 6 \bar{z} (R^2 - |z|^2) f''(z) + 6 \bar{z}^2 f'(z)| \leq 18 \frac{|f'(0)| R^4 (R + |z|)}{(R - |z|)^3}$$

vergröbern.

In den weiteren Untersuchungen wird es sich ausschließlich um die Änderungen der Funktionswerte längs eines beliebigen, aber konstanten Radius handeln. Dementsprechend werde gesetzt:

$$z = r e^{i \vartheta}, \qquad \vartheta \text{ konstant}, \qquad f(z) = h(r).$$

Die Ungleichung (2) geht hierdurch über in

$$(3) \quad |(R^2 - r^2)^2 h'''(r) - 6 r (R^2 - r^2) h''(r) + 6 r^2 h'(r)| \leq 18 \frac{|h'(0)| R^4 (R + r)}{(R - r)^3}.$$

Zwecks Integration dieser Formel wird der Ansatz

$$\frac{d}{dr} [\varphi_1(r) h''(r) + \varphi_2(r) h'(r) + \varphi_3(r) h(r)]$$
$$= \varphi_4(r) [(R^2 - r^2)^2 h'''(r) - 6 r (R^2 - r^2) h''(r) + 6 r^2 h'(r)]$$

gemacht, der durch die Funktionen

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_1(r) = (R^2 - r^2)^2 \left[a\, t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + c\right] \\ \varphi_2(r) = (R^2 - r^2)\left[-a\left(i\sqrt{2}\,R + 2r\right) t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\left(i\sqrt{2}\,R - 2r\right) t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} - 2cr\right] \\ \varphi_3(r) = 2cR^2 \\ \varphi_4(r) = a\, t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + c \\ t = \dfrac{R+r}{R-r} \end{cases}$$

befriedigt wird. Es sind nur solche Funktionen $\varphi_4(r)$ von Interesse, die in einem Intervall der Variablen r reell und nichtnegativ sind. Definiert man

$$t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \lg t}, \qquad \lg t \geq 0,$$

so wird diese Forderung sogar im abgeschlossenen Intervall $0 \leq r \leq R$ erfüllt, falls

$$\bar{c} = c > 0, \qquad b = \bar{a}, \qquad |a| \leq \frac{c}{2}.$$

Die Konstanten a, b, c mögen diesen Bedingungen entsprechend gewählt werden; dann gilt Ungleichung (3) auch nach Multiplikation mit $\varphi_4(r)$, und sie kann zwischen den Grenzen r_1 und r_2, $0 \leq r_1 < r_2 \leq R$, integriert werden. Man erhält

$$(5)\quad \begin{cases} \left|\left[\varphi_1(r_2)\, h''(r_2) + \varphi_2(r_2)\, h'(r_2) + 2cR^2 h(r_2)\right] - \right. \\ \qquad \left. - \left[\varphi_1(r_1)\, h''(r_1) + \varphi_2(r_1)\, h'(r_1) + 2cR^2 h(r_1)\right]\right| \\ \qquad \leq \dfrac{|h'(0)|\, R^3}{2} \left\{ t_2^2 \left[\left(8 - 2i\sqrt{2}\right) a\, t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \left(8 + 2i\sqrt{2}\right) \bar{a}\, t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + 9c\right] - \right. \\ \qquad \left. - t_1^2 \left[\left(8 - 2i\sqrt{2}\right) a\, t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \left(8 + 2i\sqrt{2}\right) \bar{a}\, t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + 9c\right]\right\} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq R, \qquad \bar{c} = c > 0, \qquad |a| \leq \frac{c}{2}. \end{cases}$$

Die Ungleichung besitzt unabhängig von der Wahl der Konstanten die Schrankenfunktion $\frac{z}{(R-z)^2}$. Um eine übergroße Komplikation der Formeln zu vermeiden, beschränken sich die nachstehenden Ausführungen auf den Fall $a = 0$, also die Relation [aus (5)]:

$$(6)\quad \begin{cases} \left|\left[(R^2 - r_2^2)^2 h''(r_2) - 2r_2 (R^2 - r_2^2)\, h'(r_2) + 2R^2 h(r_2)\right] - \right. \\ \qquad \left. - \left[(R^2 - r_1^2)^2 h''(r_1) - 2r_1 (R^2 - r_1^2)\, h'(r_1) + 2R^2 h(r_1)\right]\right| \\ \qquad \leq \frac{9}{2} |h'(0)|\, R^3 (t_2^2 - t_1^2), \qquad \text{falls} \qquad 0 \leq r_1 < r_2 \leq R. \end{cases}$$

Zum Zwecke ihrer Integration wird der Ansatz

$$\frac{d}{dr}\left[\psi_1(r)\,h'(r) + \psi_2(r)\,h(r)\right] = \psi_3(r)\left[(R^2-r^2)^2\,h''(r) - 2r(R^2-r^2)\,h'(r) + 2R^2\,h(r)\right]$$

gemacht. Das allgemeine reelle Integral dieses Differentialsystems hat, unter Weglassung einer willkürlichen multiplikativen Konstante, den Ausdruck

$$(7)\qquad \begin{cases} \psi_1(r) = \dfrac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r^2)\,\mu \\ \psi_2(r) = \lambda \\ \psi_3(r) = \dfrac{i\,\mu}{\sqrt{2}\,R(R^2-r^2)} \\ \lambda = \varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \bar{\varepsilon}\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}, \quad |\varepsilon| = 1 \\ \mu = \varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \bar{\varepsilon}\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}. \end{cases}$$

Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen festzustellen dafür, daß die Funktion $\psi_3(r)$ in einem Intervall $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq R$ nichtnegativ ausfällt. — Die gestellte Forderung ist gleichbedeutend damit, daß der Ausdruck

$$i\left(\varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \bar{\varepsilon}\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right) \geq 0$$

in einem gewissen Intervall $t_1\,t_2$, $t_2 > t_1$. Hierfür ist notwendig und hinreichend

$$-\pi \leq \arc \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} \lg t \leq 0, \qquad t_1 \leq t \leq t_2.$$

(Die Hinzufügung eines willkürlichen Summanden $2k\pi$ zu $\arc \varepsilon$ ist bedeutungslos.)

Falls ε den schärfsten hierin enthaltenen Ungleichungen

$$-\pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \lg t_1 \leq \arc \varepsilon \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \lg t_2$$

genügt, befriedigt es auch die vorhergehenden. Die letzten Bedingungen sind dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$(8)\qquad \begin{cases} -\pi - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \lg t_1 \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \lg t_2, \\ t_2 \leq e^{\pi\sqrt{2}}\, t_1, \\ r_2 \leq R^2 \dfrac{s + r_1}{R^2 + s\,r_1}, \\ s = R \dfrac{e^{\pi\sqrt{2}} - 1}{e^{\pi\sqrt{2}} + 1} \sim 0{,}976\,75\,R \end{cases}$$

Das Intervall $r_1 r_2$, in dem $\psi_3(r)$ nichtnegativ ausfällt, hat nie die Länge des vollen Radius R. Soll die obere Schranke für r_2 in der Nähe von R liegen, so muß das untere Intervallende r_1 ebenfalls in der Nähe von R gewählt werden.

Aus Ungleichung (6) erhält man durch Multiplikation mit $\psi_3(r_2)$ und Integration von r_2 bis r_3 nach dem zuletzt Bewiesenen

$$(9)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}R}(R^2-r_3^2)\mu_3 h'(r_3)+\lambda_3 h(r_3)-\frac{i}{\sqrt{2}R}(R^2-r_2^2)\mu_2 h'(r_2)-\lambda_2 h(r_2)\right]+\right. \\ \left.\quad+\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2R^2}\left[(R^2-r_1^2)^2 h''(r_1)-2r_1(R^2-r_1^2)h'(r_1)+2R^2 h(r_1)\right]\right| \\ \quad\le \frac{|h'(0)|R}{4}\left[t_3^2(\lambda_3+2i\sqrt{2}\mu_3)-t_2^2(\lambda_2+2i\sqrt{2}\mu_2)+9t_1^2(\lambda_2-\lambda_3)\right], \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\le r_2\le r_3\le R^2\frac{s+r_2}{R^2+sr_2}, \\ \qquad\qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2\le \arc\varepsilon\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_3. \end{cases}$$

Setzt man hierin $r_1=0$, so ergibt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}R}(R^2-r_2^2)\mu_2 h'(r_2)+\lambda_2 h(r_2)-\frac{i}{\sqrt{2}R}(R^2-r_1^2)\mu_1 h'(r_1)-\lambda_1 h(r_1)\right]+\right. \\ \left.\qquad+\frac{R^2}{2}(\lambda_1-\lambda_2)h''(0)\right| \\ \quad\le \frac{|h'(0)|R}{4}\left[t_2^2(\lambda_2+2i\sqrt{2}\mu_2)-t_1^2(\lambda_1+2i\sqrt{2}\mu_1)+9(\lambda_1-\lambda_2)\right], \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\le r_2\le R^2\frac{s+r_1}{R^2+sr_1}, \\ \qquad\qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\le \arc\varepsilon\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2. \end{cases}$$

Wiederum durch die Substitution $r_1=0$ geht diese Relation über in

$$(11)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}R}(R^2-r^2)\mu h'(r)+\lambda h(r)\right]+\frac{ih'(0)}{\sqrt{2}}R(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)+\frac{h''(0)}{2}R^2(\bar{\varepsilon}+\varepsilon-\lambda)\right| \\ \quad\le \frac{|h'(0)|R}{4}\left[t^2(\lambda+2i\sqrt{2}\mu)-9\lambda+8(\bar{\varepsilon}+\varepsilon)+2i\sqrt{2}(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)\right], \\ \qquad \text{falls}\quad r\le s,\qquad -\pi\le \arc\varepsilon\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t. \end{cases}$$

Die Ungleichungen (9) bis (11) enthalten außer den Variablen noch die willkürliche Konstante ε. Schrankenfunktion ist, unabhängig von ε, die KOEBEsche Funktion $\frac{z}{(R-z)^2}$.

Ein ähnlicher Ansatz wie bei den Ungleichungen (3) und (6) gestattet auch bei (9) bis (11) eine Integration. So gewinnt man aus (11):

$$(12)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{h(r_1)}{\mu_1}-\frac{h(r_2)}{\mu_2}\right]+\frac{1}{8}\left[i\sqrt{2}\,h'(0)\,R(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)+h''(0)\,R^2(\bar{\varepsilon}+\varepsilon)\right]\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)+\right. \\ \qquad \left.+\frac{h''(0)}{2}R^2\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)\right| \\ \leq \frac{|h'(0)|\,R}{4\sqrt{2}}\left\{i\sqrt{2}\left(\frac{t_1^2-9}{\mu_1}-\frac{t_2^2-9}{\mu_2}\right)+\left[(\varepsilon-\bar{\varepsilon})+2i\sqrt{2}\,(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\right]\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right\}, \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\leq r_2\leq s, \qquad -\pi\leq \arc\varepsilon\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2. \end{cases}$$

Benennt man in (10) r_2 in r_3 um und integriert über r_1 von r_1 bis r_2 sowie über r_3 von r_3 bis r_4, so geht die Ungleichung

$$(13)\quad \begin{cases} \left|\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\left[\frac{h(r_4)}{\mu_4}-\frac{h(r_3)}{\mu_3}\right]+\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\left[\frac{h(r_2)}{\mu_2}-\frac{h(r_1)}{\mu_1}\right]+\right. \\ \qquad \left.+\frac{h''(0)}{2}R^2\left[\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)+\left(\frac{1}{\mu_3}-\frac{1}{\mu_4}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right]\right| \\ \leq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left\{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\left(\frac{t_4^2}{\mu_4}-\frac{t_3^2}{\mu_3}\right)+\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\left(\frac{t_2^2}{\mu_2}-\frac{t_1^2}{\mu_1}\right)\right]+\right. \\ \qquad \left.+9\left[\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)+\left(\frac{1}{\mu_3}-\frac{1}{\mu_4}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right]\right\}, \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\leq r_2\leq r_3\leq r_4\leq R^2\frac{s+r_1}{R^2+sr_1}, \\ \qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\leq \arc\varepsilon\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_4 \end{cases}$$

hervor.

Die Durchführung des naheliegenden Gedankens, diejenigen Werte von ε zu ermitteln, für die die letzten fünf Ungleichungen am schärfsten ausfallen, führt zu komplizierten Rechnungen und wegen der der Zahl ε auferlegten Beschränkungen zu Falleinteilungen. Es mag daher hier genügen, ε durch spezielle Annahmen zu beseitigen.

In (11) führt die Substitution $\varepsilon=t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}$ auf $\lambda=2$, $\mu=0$, also:

$$\left|h(r)+\frac{i\,h'(0)}{2\sqrt{2}}\,R\left(t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)+\frac{h''(0)}{4}R^2\left(t^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right)^2\right|$$

$$\leq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left[t^2-1+i\sqrt{2}\left(t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)+4\left(t^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right)^2\right], \qquad \text{falls}\quad r\leq s.$$

Durch Rückgang auf die Variablen z und $f(z)$ gewinnt man hieraus den

Satz 14: *Eine schlichte Funktion $f(z)$ genügt in dem abgeschlossenen Kreise $0 \leq |z| \leq s$ der Ungleichung*

$$\left| f(z) + \frac{i f'(0) R z}{2\sqrt{2}\,|z|}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{f''(0) R^2 z}{4\bar{z}}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2 \right|$$
$$\leq |f'(0)|\, R\left\{\frac{R|z|}{(R-|z|)^2} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2 \right\}.$$

Die Relation besitzt die Schrankenfunktion $\frac{C z}{(R-z)^2}$.

Unter Berücksichtigung der Bedingung $r \leq s$, $\lg t \leq \pi\sqrt{2}$ [s. (8)] läßt sich aus diesem Satze eine Abschätzung nach oben für $|f(z)|$ herleiten, die von $\arc z$ frei ist; weiterhin ergibt sich dann aus § 4, (2) eine Abschätzung nach oben für $|f'(z)|$. Hier genüge die Ungleichung

$$(14)\quad \left\{ M(r) \leq \frac{|f'(0)|\, R^2 r}{(R-r)^2} + \left[|f'(0)|\, R - \frac{|f''(0)|\, R^2}{4}\right]\left[\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2 \right.$$
$$\left. \text{für} \quad 0 \leq r \leq s. \right.$$

Sie besitzt noch die Schrankenfunktion $\frac{C z}{(R-z)^2}$. Diese Formel ist — in einem kleineren Kreise — eine Verbesserung der bekannten Verzerrungsformel von § 4. (5).

Ungleichung (12) nimmt für $\varepsilon = -1$ die einfachere Form an

$$(15)\quad \left\{ \left| \left[\frac{h(r_2)}{t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}} - \frac{h(r_1)}{t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{h''(0)}{2} R^2 \left[\frac{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}} - \frac{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}\right] \right|$$
$$\leq i\,|h'(0)|\, R\left[\frac{t_2^2 - 1}{4\left(t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)} - \frac{t_1^2 - 1}{4\left(t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}} - \frac{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}\right], \right.$$
$$\left. \text{falls} \quad r_1 \leq r_2 \leq s. \right.$$

Setzt man in (13) $r_3 = r_2$, so fällt die willkürliche Konstante ε heraus, und es ergibt sich

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right]\left[h(r_3) - \frac{h''(0)}{2}R^2\right] + \left[\left(\frac{t_1}{t_3}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left[h(r_2) - \frac{h''(0)}{2}R^2\right] + \left[\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right]\left[h(r_1) - \frac{h''(0)}{2}R^2\right]\right| \\
&\leq \frac{i\,|h'(0)|\,R}{4}\left\{\left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right](9 - t_3^2) + \left[\left(\frac{t_1}{t_3}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right](9 - t_2^2) + \right. \\
&\qquad \left. + \left[\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right](9 - t_1^2)\right\}, \\
&\qquad\qquad \text{falls} \quad r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq R^2\,\frac{s + r_1}{R^2 + s\,r_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Auch die beiden letzten Formeln besitzen die KOEBEsche Schrankenfunktion.

Durch Fortsetzung des beschrittenen Weges lassen sich lineare Ausdrücke aus bis zu acht Funktionswerten abschätzen, doch sind die erzielbaren Ergebnisse ziemlich kompliziert.

Berlin-Charlottenburg, Fasanenstr. 13.

(Eingegangen am 10. Dezember 1952.)

GASCHÜTZ, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 160—170 (1953)

Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen.

Von

WOLFGANG GASCHÜTZ[1]).

1. Die *Φ-Untergruppe* $\Phi(\mathfrak{G})$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Sie wurde schon zu einem bemerkenswert frühen Zeitpunkt untersucht: 1885 bewies G. FRATTINI[2]) mit einer eleganten Schlußweise, daß sie nilpotent ist. Seither ist diese charakteristische Untergruppe jedoch nur in wenigen Arbeiten[2]) eigentlicher Gegenstand der Betrachtung gewesen.

Die folgenden Seiten wollen erneut das Interesse auf die Φ-Untergruppe lenken und mit einfachen Hilfsmitteln zwei Ziele erstreben. Erstens soll eine Charakterisierung der Lage des nach E. WENDT[3]) in jeder endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmten maximalen nilpotenten Normalteilers $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ über der Φ-Untergruppe angegeben werden. In Verallgemeinerung des Ergebnisses von FRATTINI und eines Satzes von H. WIELANDT[4]) wird dazu bewiesen: Aus dem Nilpotentsein einer Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\Psi$, $\mathfrak{N}$, Ψ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \leqq \Phi(\mathfrak{G})$, folgt, daß $\mathfrak{N}$ nilpotent ist. Wie wir ferner beweisen, enthält ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der nicht Produkt minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, stets von 1 verschiedene Elemente aus $\Phi(\mathfrak{G})$. Aus beiden Tatsachen ergibt sich sodann: $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$. — Zweitens soll die Arbeit die Bedeutung der Φ-Untergruppe für ein allgemeines Konstruktionsverfahren der endlichen Gruppen, ähnlich dem von H. FITTING[5]) vorgeschlagenem, beleuchten. Es zeigt sich nämlich, daß die von FITTING gegebene Theorie der halbeinfachen Gruppen zu einer Theorie der Φ-freien Gruppen, das sind Gruppen $\mathfrak{F}$ mit $\Phi(\mathfrak{F}) = 1$, ausgedehnt werden kann. Die Zusammensetzung jeder endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ aus Φ-Untergruppe und Φ-freier Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ könnte dann, da $\Phi(\mathfrak{G})$ nilpotent ist, die bei FITTING erforderliche Zwischenkonstruktion der

[1]) Herr Prof. H. WIELANDT hat eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen gemacht, die gestatteten, Beweise kürzer zu fassen. Besonders verdanke ich ihm den Hinweis, daß sich mein ursprünglicher und umständlicherer Beweis zu Satz 10 durch den hier gegebenen kurzen ersetzen läßt.

[2]) (a) FRATTINI, G.: Rend. Atti R. Accad. Lincei (4) **1**, 281—285, 455—457 (1885); **2**, 18 (1886). — (b) MILLER, G. A.: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **1**, 6—7 (1915). — (c) MILLER, G. A.: Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 20—26 (1915). — (d) WIELANDT, H.: Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — (e) Ein Abschnitt ist der Φ-Untergruppe ferner in ORE, Ö.: Duke math. J. **5**, 431—460 (1939) gewidmet:

[3]) WENDT, E.: Math. Ann. **55**, 480 (1902). Siehe auch FITTING, H.: Jber. D. M. V. **48**, 77—145 (1938).

[4]) WIELANDT, H.: l. c. [2]) (d).

[5]) FITTING, H.: l. c. [3]).

auflösbaren Gruppen als Radikale (maximale auflösbare Normalteiler) aus den nilpotenten Gruppen umgehen. Dafür stellt sich hier allerdings die Frage ein, welchen genauen Typus die Φ-Untergruppen unter den nilpotenten Gruppen haben. Wenn wir diese im folgenden vorerst auch nur unvollständig beantworten können, so scheint sie uns doch einfacher zu sein, als das bei FITTING auftretende Erweiterungsproblem zur Gewinnung der auflösbaren Gruppen[6]).

Die Kenntnis der Arbeiten[2]) ist nicht erforderlich, es wird alles von der angegebenen Definition der Φ-Untergruppe her neu entwickelt. Unter Gruppen verstehen wir stets solche von endlicher Ordnung. *Nilpotent* heißt eine Gruppe, in der die Sylowgruppen invariante Untergruppen sind, ***halbeinfach***, wenn sie keine invariante abelsche Untergruppe enthält. Eine einfache nichtzyklische Gruppe nennen wir *eigentlich-einfach*. Invariante Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir oft kürzer als *Normalteiler* von $\mathfrak{G}$. Ohne nochmalige Erläuterung verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$,
$\mathsf{J}(\mathfrak{G})$ Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ Zentrum von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$,
$\Phi(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$,
$\Delta(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen und nicht invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Bezeichnungen wie $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ und ähnliche, die *vollreduzible* Gruppen betreffen, werden auf S. 163 erläutert. $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ impliziert zum Unterschied von $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

2. Wir schicken zwei Definitionen voraus, die mit der Φ-Untergruppe in engem Zusammenhange stehen, wie wir sehen werden.

Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{N} \cap \overline{\mathfrak{G}} = 1$, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ *zerspaltet* bzw. *zerfällt* über $\mathfrak{N}$.

Zunächst wollen wir mit dem ersten dieser beiden Begriffe eine Charakterisierung der Φ-Untergruppe angeben, die sich bei der Benutzung der Isomorphiesätze für unsere Zwecke als sehr handlich erweist.

Dazu sei vorerst etwas allgemeiner $\mathfrak{W}$ ein Komplex von Elementen aus $\Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{y}$ ein beliebiger Komplex aus $\mathfrak{G}$. Wird dann $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{y}\}$ von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{y}$ erzeugt, so ist schon $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{y}\}$; anderenfalls würde nämlich für eine maximale Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, die $\{\mathfrak{y}\}$ enthält, $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{G}^*\}$ gelten, im Widerspruch zu $\mathfrak{W} \leqq \Phi(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{G}^*$. Folgt umgekehrt für einen festen Komplex $\mathfrak{W}$ und alle Komplexe $\mathfrak{y} \leqq \mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{y}\}$ schon $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{y}\}$, so liegt $\mathfrak{W}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, wie wir zeigen wollen. Dazu genügt es, $\mathfrak{y}$ alle maximalen Untergruppen $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ durchlaufen zu lassen; da $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}^*$, ist dann auch $\mathfrak{G} \neq \{\mathfrak{W}, \mathfrak{G}^*\}$, d.h. $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{G}^*$. — $\Phi(\mathfrak{G})$ enthält also genau die Elemente von $\mathfrak{G}$, die in jedem Komplex zur Erzeugung von $\mathfrak{G}$ überflüssig sind.

[6]) FITTING, H.: l. c.[5]) § 16.

Offenbar gelten die Betrachtungen des vorigen Absatzes auch noch, wenn man an Stelle von $\mathfrak{H}$ überall die von $\mathfrak{H}$ erzeugte Untergruppe, also eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ setzt. Ist dann $\mathfrak{W} = \mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so entnimmt man ihnen insbesondere

Satz 1. *Für einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ gilt dann und nur dann $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, wenn $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{N}$ nicht zerspaltet.*

Es folgen einige Sätze, die, für sich betrachtet, nur propädeutischen Charakter haben. Sie gestatten, die Beweise in den nachfolgenden Abschnitten übersichtlicher zu machen.

Satz 2. *Ψ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $\Phi(\mathfrak{G}/\Psi) = \Phi(\mathfrak{G})/\Psi$.*

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß der natürliche Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\Psi$ einen Verbandsisomorphismus des Verbandes der Ψ umfassenden Untergruppen von $\mathfrak{G}$ auf den Verband der Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Psi$ induziert.

Satz 3. *Ist σ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$, so ist*

$$\sigma\Phi(\mathfrak{G}) \subseteq \Phi(\sigma\mathfrak{G}). \tag{2.1}$$

Beweis. $\Phi(\sigma\mathfrak{G})$ entspricht in $\mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die den Kern von σ enthalten. Da $\mathfrak{D}$ auch $\Phi(\mathfrak{G})$ enthält, gilt (2.1).

(2.1) kann nicht zu $\sigma\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\sigma\mathfrak{G})$ verschärft werden, wie das Beispiel der Gruppe $\mathfrak{G} = \{A, B;\ A^5 = B^4 = A^3 B A B^{-1} = 1\}$ in bezug auf den natürlichen Homomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ auf die zu dem von A erzeugten Normalteiler $\mathfrak{N}$ gehörige Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ lehrt. Es ist $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ vom Typus der zyklischen Gruppe der Ordnung 4; daher, wie leicht einzusehen, $\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \neq \Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$.

Satz 4. $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.

Beweis. Wäre $\mathfrak{G}^*$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \not\subseteq \mathfrak{G}^*$, so müßte

$$(\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}))\,\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} \tag{2.2}$$

gelten. Da $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ im Zentrum liegt, wäre dann $\mathfrak{G}^*$ Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe; nach Voraussetzung also $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{G}^*$, im Widerspruch zu (2.2).

Satz 5. *Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler, $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$, so ist $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Aus $\mathfrak{N} \not\subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ würde $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ nach Satz 1 folgen; hieraus $\mathfrak{N} \not\subseteq \overline{\mathfrak{G}}$, also erst recht $\mathfrak{N} \not\subseteq \overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U}$ und

$$\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U} < \mathfrak{U}. \tag{2.3}$$

Nach den Isomorphiesätzen wäre ferner

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U}). \tag{2.4}$$

(2.3) und (2.4) stehen aber nach Satz 1 im Widerspruch zu $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$. Also ist $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.

Satz 6[7]). *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, *so ist* $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$.

Beweis. Nach Satz 5 ist jedenfalls $\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Um zu prüfen, wie weit $\Phi(\mathfrak{G})$ über $\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$ hinausragt, setzen wir $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N}) = \tilde{\mathfrak{G}}$ und bilden $\Phi(\tilde{\mathfrak{G}})$ gemäß Satz 2. Es ist $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{M}} \times \tilde{\mathfrak{N}}$, $\tilde{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{M}/\Phi(\mathfrak{M})$, $\tilde{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{N}/\Phi(\mathfrak{N})$. Nach Satz 2 ist $\Phi(\tilde{\mathfrak{M}}) = 1$, $\Phi(\tilde{\mathfrak{N}}) = 1$, also der Durchschnitt der $\tilde{\mathfrak{M}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{N}}$ umfassenden maximalen Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{G}}$ gleich $\tilde{\mathfrak{M}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{N}}$. Wegen $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \tilde{\mathfrak{N}} = 1$ ist daher $\Phi(\tilde{\mathfrak{G}}) = 1$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$; w. z. b. w.

Für die nächsten Sätze und im letzten Abschnitt benötigen wir einige einfache Tatsachen über vollreduzible Gruppen, die wir an dieser Stelle mitteilen wollen. Die Beweise sind mit den bekannten Verallgemeinerungen der Sätze von R. Remak über direkte Produktzerlegungen endlicher Gruppen leicht zu führen und seien dem Leser überlassen[8]).

Mit einer Untergruppe Γ von $A(\mathfrak{R})$ nennen wir eine Gruppe $\mathfrak{R}$ *Γ-vollreduzibel*, wenn $\mathfrak{R}$ Produkt minimaler unter Γ invarianter Untergruppen von $\mathfrak{R}$ ist. Ist $\mathfrak{R}$ speziell Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$, Γ die Gruppe der durch die Transformationen mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{R}$ induzierten Automorphismen und $\mathfrak{R}$ Γ-vollreduzibel, so sagen wir: $\mathfrak{R}$ ist *$\mathfrak{G}$-vollreduzibel*. $\mathfrak{R}$ ist dann Produkt minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Zu jedem Normalteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{R}$ existiert ein Normalteiler $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}'$ ist. Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft einer Untergruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ die $\mathfrak{G}$-Vollreduzibilität von $\mathfrak{R}$. Für $\mathfrak{G}$-vollreduzibles $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_\alpha$ den maximalen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}_\alpha$ ist direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung. Nach der vorher gemachten Bemerkung besteht eine direkte Zerlegung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\alpha \times \mathfrak{R}_\eta$. $\mathfrak{R}_\eta$ ist hierdurch eindeutig bestimmt, halbeinfach und, genauer, direktes Produkt eigentlich-einfacher Gruppen. $\mathfrak{R}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{R}_\eta$ nennen wir die *abelsche* bzw. die *halbeinfache Komponente von* $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{N}$ sei ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{S}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ bezeichnen wir das Produkt der minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{S}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ ist der maximale in $\mathfrak{N}$ enthaltene $\mathfrak{G}$-vollreduzible Normalteiler. Mit $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ bezeichnen wir den Durchschnitt der in $\mathfrak{N}$ maximalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$-vollreduzibel und $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ enthält keinen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$-vollreduzibler Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$. $\mathfrak{S}_\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$ nennen wir den *Sockel*[9]) bzw. *Rumpf* von $\mathfrak{G}$ und schreiben statt dessen $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}$-vollreduzibel, so sagen wir kürzer $\mathfrak{G}$ ist *vollreduzibel*. Die drei Aussagen $\mathfrak{S}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N}) = 1$ und $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{G}$-vollreduzibel sind gleichbedeutend.

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{A}$ *abelscher Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *und*

$$\mathfrak{A} \cap \Phi(\mathfrak{G}) = 1, \tag{2.5}$$

so zerfällt $\mathfrak{G}$ *über* $\mathfrak{A}$. *Außerdem ist* $\mathfrak{A}$ *dann* $\mathfrak{G}$*-vollreduzibel.*

[7]) Miller, G. A.: l. c. (2c).

[8]) Man ziehe etwa H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie Bd. I, Leipzig u. Berlin 1937, III, §§ 1,2, S. 75—82 zu Rate.

[9]) Diese Bezeichnung stammt von R. Remak.

Beweis. a sei die Ordnung von $\mathfrak{A}$. Der Satz ist offenbar richtig, wenn $\mathfrak{G}$ beliebig und $a=1$ ist. Wir nehmen an, es sei $a>1$ und der Satz für beliebiges $\mathfrak{G}$ und abelsche Normalteiler mit einer Ordnung $<a$ bewiesen. Dann ist $\mathfrak{A} \not\subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, und nach Satz 1 existiert $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{G}}. \tag{2.6}$$

Hieraus folgt

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}.$$

$\overline{\mathfrak{A}} \cap \Phi(\overline{\mathfrak{G}})$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, also auch von $\mathfrak{G}$. Nach Voraussetzung (2.5) und Satz 5 ist $\overline{\mathfrak{A}} \cap \Phi(\overline{\mathfrak{G}}) = 1$. Zufolge (2.6) ist $\overline{\mathfrak{A}} : 1 < a$. Wir können also auf $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ unsere Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten: Es existiert $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} < \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \tag{2.7}$$

$$\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = 1.$$

Setzt man (2.7) in (2.6) ein, so ergibt sich $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ mit $\mathfrak{A} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = \mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = \overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = 1$; d.h. $\mathfrak{G}$ zerfällt über $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{B}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$, so ist nach dem soeben Bewiesenen $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = 1$. $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ also auch von $\mathfrak{G}$ und es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}$ daher $\mathfrak{G}$-vollreduzibel.

Satz 8. *Für einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Da nach Satz 2 $\Phi(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = \Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist, muß $\mathfrak{A}\Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ nach Satz 7 $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$-vollreduzibel sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ ist.

3.[10]) Satz 6 gestattet unmittelbar die Bestimmung der Φ-Untergruppe einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}_{p^\nu}$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^ν, so ist $\Phi(\mathfrak{A})$ offenbar die einzige in $\mathfrak{A}$ enthaltene zyklische Untergruppe von der Ordnung $p^{\nu-1}$. Ist $\mathfrak{A}$ direktes Produkt solcher Gruppen, $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^{(1)}_{p^{\nu_1}} \times \cdots \times \mathfrak{Z}^{(r)}_{p^{\nu_r}}$, so ist nach Satz 6 $\Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}^{(1)}_{p^{\nu_1-1}} \times \cdots \times \mathfrak{Z}^{(r)}_{p^{\nu_r-1}}$, $\mathfrak{Z}^{(i)}_{p^{\nu_i-1}} < \mathfrak{Z}^{(i)}_{p^{\nu_i}}$. $\Phi(\mathfrak{A}) = 1$ tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{A}$ direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung ist.

In einer nilpotenten Gruppe $\mathfrak{L}$ ist jede maximale Untergruppe $\mathfrak{L}^*$ bekanntlich Normalteiler und $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}^*$ abelsch. $\Phi(\mathfrak{L})$ ist also der Rumpf von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}/\Phi(\mathfrak{L})$ abelsch. Wir können daher die für abelsche Gruppen gemachte Feststellung erweitern zu

Satz 9. *Ist $\mathfrak{L}$ nilpotent, so gilt $\Phi(\mathfrak{L}) = 1$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{L}$ direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung ist.*

4. Es ist erstaunlich, daß sich aus der rein verbandstheoretischen Definition der Φ-Untergruppe ziemlich starke Einschränkungen hinsichtlich des

[10]) Der Inhalt dieses Abschnittes findet sich im wesentlichen schon bei W. BURNSIDE, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13, 6—12 (1913/14).

gruppentheoretischen Typus für diese und gewisse über der Φ-Untergruppe liegende Gruppen ergeben. In Verallgemeinerung der eingangs erwähnten Schlußweise von FRATTINI beweisen wir nämlich:

Satz 10. *$\mathfrak{M}$ und Ψ seien Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \leqq \mathfrak{M} \cap \Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{M}/\Psi$ nilpotent. Dann ist $\mathfrak{M}$ nilpotent.*

Beweis. Der Fall $\mathfrak{M} = 1$ kann beiseite gelassen werden. p sei eine in $\mathfrak{M}:1$ aufgehende Primzahl und $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}$. Wir zeigen: $\mathfrak{P}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{M}$. $\Psi\mathfrak{P}/\Psi$ ist p-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}/\Psi$ und daher nach Voraussetzung charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{M}/\Psi$, $\Psi\mathfrak{P}$ also Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{P}$ ist p-Sylowgruppe auch von $\Psi\mathfrak{P}$. N sei der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$. Da alle p-Sylowgruppen von $\Psi\mathfrak{P}$ schon unter $\Psi\mathfrak{P}$ konjugiert sind, ist $G\mathfrak{P}G^{-1} = L\mathfrak{P}L^{-1}$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$ durch $L = SP \in \Psi\mathfrak{P}$, $S \in \Psi$, $P \in \mathfrak{P}$ lösbar. Daher ist $P^{-1}S^{-1}G \in \mathsf{N}$, $G \in SP\mathsf{N} \leqq \Psi\mathfrak{P}\mathsf{N} = \Psi\mathsf{N}$, d.h. $\mathfrak{G} = \Psi\mathsf{N}$. Nach Voraussetzung $\Psi \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ und Satz 1 ist dann $\mathsf{N} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ also Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und erst recht von $\mathfrak{M}$; w. z. b. w.

Aus Satz 10 folgt für $\Psi = \Phi(\mathfrak{G})$: $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = \mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$.

In auflösbaren Gruppen $\mathfrak{G} \neq 1$ ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \neq 1$, wie man leicht einsieht. Da jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe selbst auflösbar ist, hat man nach Satz 10, wenn man wieder $\Phi(\mathfrak{G})$ an Stelle von Ψ betrachtet, $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ für diese.

Eine genaue Charakterisierung des Typus derjenigen Gruppen, die Φ-Untergruppen sind, ist nicht bekannt. 3 lehrt, daß jede abelsche Gruppe Φ-Untergruppe sein kann. Daß das nicht für jede nilpotente Gruppe gilt, zeigt der folgende

Satz 11. *Ψ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \leqq \Phi(\mathfrak{G})$. Es ist*

$$\mathsf{J}(\Psi) \leqq \Phi(\mathsf{A}(\Psi)). \tag{4.1}$$

Beweis. Die Transformationen in Ψ mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ induzieren eine homomorphe Abbildung σ von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe U von $\mathsf{A}(\Psi)$. $\sigma\Psi = \mathsf{J}(\Psi)$ liegt nach Satz 2 in $\Phi(\mathsf{U})$ und ist Normalteiler von $\mathsf{A}(\Psi)$. Nach Satz 5 folgt dann die Behauptung des Satzes; w. z. b. w.

Hieraus folgt z.B., daß keine charakteristische Untergruppe einer Φ-Untergruppe vom Typus einer der beiden nichtkommutativen Gruppen der Ordnung 8 sein kann, da bei diesen die innere Automorphismengruppe nicht in der Φ-Untergruppe der vollen Automorphismengruppe liegt.

Indem man Satz 2 anwendet, erkennt man mit Satz 11 ferner, daß auch für jede Faktorgruppe $\overline{\Psi} = \Psi_1/\Psi_2$, Ψ_1, Ψ_2 Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, die Bedingung (4.1) mit $\overline{\Psi}$ an Stelle von Ψ bestehen muß.

5. Befriedigender lassen sich die Typen der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ kennzeichnen. Nach Satz 2 ist $\Phi(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = \Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$. Wir nennen Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$ Φ-frei. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung der Φ-freien Gruppen, die wir allgemein mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wollen. Wir teilen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften derselben mit.

In $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 5 jeder Normalteiler ebenfalls Φ-frei. Insbesondere ist also $\Phi(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))=1$ und, nach Satz 9, $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ abelsch. In einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{G})_\alpha \leqq \mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \tag{5.1}$$

und nach Satz 5 und Abschnitt 3 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{L}) \leqq \Phi(\mathfrak{G})$. Für Φ-freies $\mathfrak{F}$ ist also nach Satz 5 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))=1$, d.h. $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ ist $\mathfrak{F}$-vollreduzibel. Als nilpotenter Normalteiler muß $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ dann abelsch sein und in $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})_\alpha$ liegen. Mit (5.1) zusammen erhalten wir daher

Satz 12. *In einer Φ-freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{F}$.*

Wendet man diesen Satz für beliebige Gruppen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{F}$ an, so erschließt man allgemeiner zufolge der im Anschluß an Satz 10 gemachten Bemerkung

Satz 13. *$\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$.*

Aus Satz 7 folgt unmittelbar, daß das Zerfallen einer Gruppe über der abelschen Komponente ihres Sockels notwendig ist für das Φ-Freisein der betreffenden Gruppe. Wir wollen zeigen, daß es auch hinreichend dafür ist. Sei dazu $\mathfrak{G}$ beliebig, $\Phi(\mathfrak{G}) \neq 1$. Wir nehmen an, es sei nach Definition des Zerfallens

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}(\mathfrak{G})_\alpha \overline{\mathfrak{G}} \tag{5.2}$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{G})_\alpha \cap \overline{\mathfrak{G}} = 1. \tag{5.3}$$

Ψ sei minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$. Da Ψ nilpotent ist, ist Ψ abelsch und $\Psi \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{G})_\alpha$. Es existiert ein Normalteiler Ψ' von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})_\alpha = \Psi \times \Psi'$ ist. Dann ist $\mathfrak{G}=\Psi(\Psi'\overline{\mathfrak{G}})$; ferner, wie aus (5.2), (5.3) und Ordnungsbetrachtungen einsichtig wird, $\Psi'\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}$ zerspaltet über Ψ. Das steht nach Satz 1 im Widerspruch zu $\Psi \leqq \Phi(\mathfrak{G})$. Die Annahmen (5.2), (5.3) waren also falsch. Wir erhalten damit

Satz 14. *Eine Gruppe ist dann und nur dann Φ-frei, wenn sie über der abelschen Komponente ihres Sockels zerfällt.*

Wir wollen eine Eigenschaft des Zentrums der Φ-freien Gruppen beweisen.

Satz 15. *In einer Φ-freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist*

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{F})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}) \tag{5.4}$$

und

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}) = \Delta(\mathfrak{F}). \tag{5.5}$$

Beweis. Nach Satz 7 ist $\mathfrak{F}=\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{Z}\cap\overline{\mathfrak{F}}=1$, d.h. $\mathfrak{F}=\mathfrak{Z}\times\overline{\mathfrak{F}}$. Da das Zentrum eines direkten Produktes gleich dem direkten Produkt der Zentren der Faktoren ist, ist $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{F}})=1$, woraus (5.4) folgt.

9183-58冊

$\mathfrak{D}$ sei der Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{F}$ die invariant unter $\mathfrak{F}$ sind. $\mathfrak{F}/\mathfrak{D}$ ist abelsch. Für $F \in \mathfrak{F}$, $P \in \Delta(\mathfrak{F})$ gilt daher

$$FPF^{-1}P^{-1} \in \mathfrak{D} \cap \Delta(\mathfrak{F}),$$

nach Voraussetzung also $FP = PF$ und $\Delta(\mathfrak{F}) \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{F})$. Ferner gilt aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \leqq \Delta(\mathfrak{G})$ für beliebige Gruppen $\mathfrak{G}$, da aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$ für eine maximale Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ stets folgt: $\mathfrak{G}^*$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Also gilt (5.5), w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{G}$ beliebig, so ergibt insbesondere Satz 15, auf $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}$ angewandt: $\Delta(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist abelsch. Nach Satz 10 erhalten wir daraus

Satz 16. *Für beliebiges $\mathfrak{G}$ ist $\Delta(\mathfrak{G})$ nilpotent.*

6. Satz 14 in Verbindung mit der FITTINGschen Theorie der halbeinfachen Gruppen liefert ein Verfahren, die Φ-freien Gruppen in invarianter Weise als zerfallende Erweiterungen darzustellen. Wir werden in diesem Sinne kurz von einer Konstruktion der Φ-freien Gruppen sprechen, diese im folgenden durchführen und an Hand von ihr entscheiden, wann zwei Φ-freie Gruppen isomorph sind. Wir schicken zunächst das hier benötigte Ergebnis über halbeinfache Gruppen $\mathfrak{H}$ voraus[11]).

(H) $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ ist direktes Produkt eigentlich-einfacher Gruppen. Der Zentralisator von $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ ist 1. Man erhält zu einem vorgegebenen direkten Produkt $\mathfrak{S}$ eigentlich-einfacher Gruppen ein vollständiges Repräsentantensystem für die Typen aller halbeinfachen Gruppen mit dem Sockel $\mathfrak{S}$, wenn man in $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ aus jeder Klasse unter $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ konjugierter, $\mathsf{J}(\mathfrak{S})$ umfassender Untergruppen einen Repräsentanten H auswählt. $\mathsf{J}(\mathfrak{S})$ ist dann der Sockel von H.

Da zwei isomorphe Gruppen isomorphe Sockel besitzen, können wir bei der Konstruktion der Φ-freien Gruppen so vorgehen, daß wir alle Φ-freien Gruppen mit einem festen Sockel bestimmen.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein direktes Produkt einfacher Gruppen und nach dem über vollreduzible Gruppen Gesagten

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\alpha \times \mathfrak{S}_\eta. \tag{6.1}$$

Da $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_\eta$ charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{S}$ sind, ist

$$\mathsf{A}(\mathfrak{S}) = \mathsf{A}(\mathfrak{S})_\alpha \times \mathsf{A}(\mathfrak{S})_\eta, \tag{6.2}$$

wobei $\mathsf{A}(\mathfrak{S})_\alpha$, $\mathsf{A}(\mathfrak{S})_\eta$ die Untergruppe der Elemente von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ ist, die $\mathfrak{S}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{S}_\eta$ elementweise festlassen. Es ist $\mathsf{A}(\mathfrak{S})_\alpha \cong \mathsf{A}(\mathfrak{S}_\alpha)$, $\mathsf{A}(\mathfrak{S})_\eta = \mathsf{A}(\mathfrak{S}_\eta)$. Zur Vereinfachung der Schreibweise denken wir uns in natürlicher Weise die Elemente aus $A(\mathfrak{S})_\alpha$ bzw. $A(\mathfrak{S})_\eta$ mit denen aus $\mathsf{A}(\mathfrak{S}_\alpha)$ bzw. $\mathsf{A}(\mathfrak{S}_\eta)$ identifiziert. Die Komponentenzerlegung gemäß (6.1) und (6.2) kennzeichnen wir unmißverständlich in beiden Fällen durch Anhängen des Index α bzw. η. Die Anwendung der Automorphismen $\lambda \in \mathsf{A}(\mathfrak{S})$ auf $s \in \mathfrak{S}$ schreiben wir als s^λ.

[11]) FITTING, H.: l. c. [3]) § 10.

Die angekündigte Konstruktion der Φ-freien Gruppen mit einem festen Sockel liefert nun

Satz 17. *$\mathfrak{S}$ sei ein direktes Produkt einfacher Gruppen und $\{\Gamma\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klassen unter $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ konjugierter Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ mit folgenden Eigenschaften:*

I. *$\mathfrak{S}_\alpha$ ist Γ_α-vollreduzibel.*

II. $\mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta) \subseteqq \Gamma$.

Durchläuft dann Γ dieses Repräsentantensystem, so bilden die Gruppen $\mathfrak{F}_\Gamma$ mit den Elementen (a, γ), $a \in \mathfrak{S}_\alpha$, $\gamma \in \Gamma$ und der Verknüpfung

$$(a, \gamma)\,(b, \delta) = (a\, b^{\gamma_\alpha}, \gamma\delta)$$

ein vollständiges Repräsentantensystem für die Typen der Φ-freien Gruppen mit einem Sockel vom Typus $\mathfrak{S}$.

Beweis. Es ist klar, daß $\mathfrak{F}_\Gamma$ nach der angegebenen Verknüpfung Gruppeneigenschaften hat. Auf Grund der Forderungen I, II und nach (H) erkennt man durch komponentenweises Rechnen leicht, daß die Elemente (a, σ), $a \in \mathfrak{S}_\alpha$, $\sigma \in \mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta)$ eine mit $\mathfrak{S}$ isomorphe und invariante Untergruppe von $\mathfrak{F}_\Gamma$ bilden, die $\mathfrak{F}_\Gamma$-vollreduzibel ist. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{S}^*$, so gilt also

$$\mathfrak{S}^* \subseteqq \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma). \tag{6.3}$$

Jedes Element von $\mathfrak{F}_\Gamma$, das mit $\mathfrak{S}^*$ elementweise vertauschbar ist, liegt in $\mathfrak{S}^*$: Aus

$$(b, \gamma)\,(a, \sigma) = (a, \sigma)\,(b, \gamma)$$

oder

$$(b\, a^{\gamma_\alpha}, \gamma\sigma) = (a\, b^{\sigma_\alpha}, \sigma\gamma)$$

für alle $(a, \sigma) \in \mathfrak{S}^*$ folgt $\gamma_\alpha = 1$; ferner $\gamma_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta \gamma_\eta$ und $\gamma_\eta = 1$, da 1 nach (H) der Zentralisator von $\mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta)$ ist. $\mathfrak{S}^*$ enthält daher alle minimalen Normalteiler von $\mathfrak{F}_\Gamma$; denn gäbe es außerhalb von $\mathfrak{S}^*$ einen solchen, z. B. $\mathfrak{R}$, so wäre $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}^* = 1$, und also $\mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{R}$ elementweise vertauschbar. Mit (6.3) zusammen haben wir daher $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)$.

$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha$ wird von den Elementen $(a, 1)$, $a \in \mathfrak{S}_\alpha$ gebildet. Bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{F}}_\Gamma$ die Untergruppe der Elemente $(1, \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, so ist offenbar

$$\mathfrak{F}_\Gamma = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha\, \overline{\mathfrak{F}}_\Gamma$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}}_\Gamma = 1.$$

Nach Satz 14 ist $\mathfrak{F}_\Gamma$ daher Φ-frei.

Γ_1, Γ_2 seien Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$, die den Bedingungen I, II genügen, und Λ ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}_{\Gamma_1}$ auf $\mathfrak{F}_{\Gamma_2}$. Bei Λ wird $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_{\Gamma_1})_\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_{\Gamma_2})_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^*$ auf sich abgebildet. Wir können daher

$$(a, \gamma)^\Lambda = (a^{\lambda_\alpha} c_{\Lambda, \gamma}, \gamma^\Lambda)$$

mit $\lambda_\alpha \in \mathsf{A}(\mathfrak{S}_\alpha)$, $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma^\Lambda \in \Gamma_2$ und gewissen $c_{\Lambda,\gamma} \in \mathfrak{S}_\alpha^*$ $c_{\Lambda,1} = 1$ setzen. Die Abbildung $\gamma \to \gamma^\Lambda$ ist dabei ein Isomorphismus von Γ_1 auf Γ_2. Nach (H) folgt hieraus zunächst die Existenz von $\lambda_\eta \in \mathsf{A}(\mathfrak{S}_\eta)$ mit

$$\lambda_\eta \gamma_\eta \lambda_\eta^{-1} = (\gamma^\Lambda)_\eta. \tag{6.4}$$

Außerdem ist einerseits (Multiplikation-Automorphismus)

$$[(1,\gamma)(a,1)]^\Lambda = (a^{\gamma^\Lambda \gamma_\alpha} c_{\Lambda,\gamma}, \gamma^\Lambda) \tag{6.5}$$

andererseits (Automorphismus-Multiplikation)

$$[(1,\gamma)(a,1)]^\Lambda = (a^{(\gamma^\Lambda)_\alpha \lambda_\alpha} c_{\Lambda,\gamma}, \gamma^\Lambda). \tag{6.6}$$

Vergleich von (6.5) und (6.6) ergibt

$$\lambda_\alpha \gamma_\alpha = (\gamma^\Lambda)_\alpha \lambda_\alpha. \tag{6.7}$$

Aus (6.4) und (6.7) folgt, daß Γ_1 und Γ_2 durch $\lambda = \lambda_\alpha \lambda_\eta$ konjugiert sind.

Umgekehrt gilt: Sind Γ_1, Γ_2 Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$, die I, II erfüllen, und ist $\lambda \Gamma_1 \lambda^{-1} = \Gamma_2$, $\lambda \in \mathsf{A}(\mathfrak{S})$, so erweisen sich $\mathfrak{F}_{\Gamma_1}$ und $\mathfrak{F}_{\Gamma_2}$ auf Grund der Abbildung

$$(a,\gamma) \to (a^{\lambda_\alpha}, \lambda \gamma \lambda^{-1}), \qquad \gamma \in \Gamma_1,$$

als isomorph.

Sei schließlich $\mathfrak{F}$ eine beliebige Φ-freie Gruppe mit dem Sockel $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$, nach Satz 14

$$\begin{cases} \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\alpha \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{S}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} = 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

und Γ die durch die Transformationen mit den Elementen aus $\overline{\mathfrak{F}}$ induzierte Untergruppe von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$. $\mathfrak{S}_\alpha$ ist Γ_α-vollreduzibel, Γ umfaßt nach (H) $\mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta)$. Γ erfüllt also die Bedingungen I, II. Es ist $\Gamma \cong \overline{\mathfrak{F}}$, da kein Element $f \in \overline{\mathfrak{F}}$, $f \neq 1$, hierbei $\mathfrak{S}$ elementweise invariant läßt: f^* sei mit $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar. $[f^*]$ sei der von f^* erzeugte Normalteiler von $\mathfrak{F}$. Er ist ebenfalls mit $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar. Nach (6.8) liegt er in $\overline{\mathfrak{F}}$. Wäre er $\neq 1$, so müßte nach (6.8) ein minimaler in ihm enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{F}$ einerseits in $\mathfrak{S}_\eta$ liegen, also nichtabelsch sein, andererseits müßte er, weil er in $\mathfrak{S}$ liegt mit sich selbst elementweise vertauschbar sein. Daher ist $f^* = 1$ und $\Gamma \cong \overline{\mathfrak{F}}$. Für

$$f = a\bar{f} \qquad a \in \mathfrak{S}_\alpha, \qquad \bar{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$$

gemäß (6.8) erweist sich demzufolge die Abbildung

$$a\bar{f} \to (a,\gamma)$$

als ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}_\Gamma$, wenn γ dabei der durch die Transformation mit f induzierte Automorphismus von $\mathfrak{S}$ ist. Damit ist Satz 17 bewiesen.

Die α-Komponente von Γ induziert als Automorphismengruppe einer vollreduziblen abelschen Gruppe und wegen der Bedingung I eine Summe irreduzibler Darstellungen in endlichen Primkörpern. Der eine Teil der Konstruktion führt also auf das Problem der Bestimmung irreduzibler Darstellungen in solchen Körpern. Der andere Teil erfordert, wie FITTING gezeigt hat, im wesentlichen die Kenntnis der eigentlich-einfachen Gruppen und ihrer Automorphismengruppen.

Kiel, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Januar 1953.)

HÄMISCH, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 171—185 (1953)

Die Hauptnorm als Determinante über endlichrangigen Algebren mit Einselement.

Von
WERNER HÄMISCH.

Historische Einführung.

In seiner Arbeit „Les déterminants sur un corps non commutatif"[1]) weist J. DIEUDONNÉ auf die Unzulänglichkeiten früherer Versuche hin, über gewissen nicht kommutativen Ringen Analoga zur Determinante einzuführen[2]). Nicht besprochen, wenn auch erwähnt, ist die Arbeit „Zur Theorie der linearen Gleichungen"[3]) von E. STUDY, der als Einziger unter jenen Autoren eine echte Verallgemeinerung des Determinantenbegriffs entdeckte, echt in dem Sinne, daß sie über kommutativen Körpern mit dem üblichen Determinantenbegriff zusammenfällt. Es wird deshalb weiter unten noch auf diese Arbeit einzugehen sein, zumal sie für die hier vorliegende historisch den Ausgangspunkt bildet.

Dieudonné selbst geht davon aus, daß die Determinante einen Homomorphismus der multiplikativen Gruppe der m-reihigen invertierbaren Matrizen über einem Körper $\mathfrak{K}$ auf die multiplikative Gruppe seiner von Null verschiedenen Elemente definiert. Dementsprechend untersucht er ganz allgemein die Homomorphismen einer solchen Gruppe von Matrizen in eine Abelsche Gruppe auch für den Fall, daß an Stelle von $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Schiefkörper $\mathfrak{S}$ betrachtet wird, d. h. er bestimmt die Kommutatorgruppe der Matrizengruppe. Er findet, daß die zugehörige Faktorgruppe nicht von m abhängt, insbesondere also isomorph ist zu der nach dem Kommutator gebildeten Faktorgruppe von $\mathfrak{S}$. Die Bilder der Matrizen bei einem wohldefinierten kanonischen Homomorphismus der Matrizengruppe in die letztgenannte Faktorgruppe nennt Dieudonné Determinanten, weil sie determinantenähnliche Eigenschaften aufweisen und für $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}$ mit den gewöhnlichen Determinanten übereinstimmen. Dieser Determinantenbegriff besitzt den Vorzug großer Allgemeinheit in dem Sinne, daß jede Funktion, die einen Homomorphismus der Gruppe der invertierbaren m-reihigen Matrizen über einem Schiefkörper $\mathfrak{S}$ in eine Abelsche Gruppe definiert (so daß also der Kern dieses Homomorphismus die Kommutatorgruppe enthält) und als Ersatz für die Determinante in Betracht kommt, nur die Bilder der Dieudonnéschen Determinanten bei einem geeigneten

[1]) DIEUDONNÉ, J.: Bull. Soc. Math. France **71**, 27—45 (1943).

[2]) Nicht erwähnt ist SAGASTUME BERRA, Determinanten und lineare Gleichungen in Quasikörpern (spanisch), Rev. Univ. Nac. Tucuman, A 1, 123—141, dessen Determinantenbegriff aber im Falle kommutativer Körper weit von dem üblichen entfernt ist.

[3]) STUDY, E.: Acta math., Stockh. **42**, 1—61 (1920).

Homomorphismus der genannten Abelschen Faktorgruppe von $\mathfrak{S}$ liefert. Im Hinblick auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme aber ist festzustellen, daß einerseits die Nichtinvertierbarkeit einer Matrix nur daran erkannt werden kann, daß ein Prozeß sukzessiver Elementarumformungen, der bei invertierbaren Matrizen den Wert der Determinante liefert, für die betreffende Matrix vorzeitig abbricht, und daß andrerseits die von Null verschiedenen Elemente der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit invertierbarer Matrix nach Dieudonné mit Hilfe einer Übertragung der Cramerschen Regel nur modulo des Kommutators der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{S}$ bestimmt werden können.

E. Study dagegen geht in seiner oben erwähnten Arbeit geradewegs auf die exakte Lösung linearer Gleichungssysteme über endlichrangigen Algebren mit Einselement aus, indem er bezüglich einer Basis der Algebra das zugehörige lineare Gleichungssystem über dem Grundkörper der Algebra für die Koordinaten der Unbekannten aufstellt und nach der üblichen Cramerschen Regel löst. Die dabei auftretenden Zählerdeterminanten und die Nennerdeterminante sind Polynome in den Koordinaten der Elemente aus der Matrix des Gleichungssystems. Study stellt fest, daß die Nennerdeterminante (z. B. im Falle des Quaternionenkörpers) noch gemeinsame Faktoren der Zählerdeterminanten enthalten kann. Werden diese Faktoren herausgekürzt, dann nennt Study den so verbleibenden Hauptnenner „Nablafunktion" der Matrix des Gleichungssystems, den er noch so normiert, daß er für die Einheitsmatrix das Einselement des Grundkörpers liefert. Eine explizite Angabe dieses Hauptnenners als Funktion der Elemente der Matrix und darauf aufbauend die Fortsetzung der Determinantentheorie gelingt ihm aber nur im Falle der Quaternionenalgebra, und zwar mit Hilfe komplizierter kombinatorischer Überlegungen. Über den Rahmen der Quaternionen hinaus konnte Study für seine Nablafunktion noch eine Reihe determinantenähnlicher Eigenschaften insbesondere Gradsätze [die sich hier unter anderen in § 5 samt der von Study schon für die Quaternionen mitgeteilten Formel (11) wiederfinden] plausibel machen, wenn auch nicht in allen Teilen exakt beweisen.

Herr W. KRULL nun, der die Studysche Arbeit nur durch ein Referat kannte, vermutete schon lediglich auf Grund der sich bereits bei den Quaternionen ergebenden Gradverhältnisse in der Nablafunktion eine Hauptnorm[4]) der Algebra $\mathfrak{A}_m$ aller m-reihigen Matrizen A über der zugrunde gelegten endlichrangigen Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement und gab so den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit. In der Tat stellt das hier in § 2 bewiesene Theorem 2 nichts anderes als die Krullsche Vermutung dar, wenn beachtet wird, daß die Matrix des von Study über dem Grundkörper $\mathfrak{K}$ gebildeten Gleichungssystems bei einer auf $\mathfrak{A}_m$ fortgesetzten regulären Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$ als Bild der

[4]) Im folgenden wird durch den Hinweis „Jacobson" stets auf die von N. JACOBSON in seinem Buch „The Theory of Rings", S. 111—114, New York 1943, gegebene Darstellung der Theorie eines Minimalpolynoms einer Algebra zurückgegriffen. Die von dorther benötigten Begriffe können aber auch hier aus § 1 entnommen werden, und die benötigten Resultate sind unter römischen Nummern in den Text eingestreut.

Matrix des ursprünglichen Gleichungssystems auftritt. Nach diesem Resultat erscheint die Theorie der Hauptnorm, also die des Minimalpolynoms einer Algebra, im Rahmen der linearen Gleichungstheorie als die natürliche Fortsetzung der Determinantentheorie auf endlichrangige Algebren mit Einselement[5]).

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese Einsicht klar zu vermitteln und die Fragen zu behandeln, die sich von der linearen Gleichungstheorie her für die Theorie der Hauptnorm unmittelbar ergeben. Der Konnex beider Theorien ist in der Tat sehr tiefgreifend. Bezeichnend hierfür ist, daß das auch als Satz der reinen Minimalpolynomtheorie interessierende Theorem 5 sich entscheidend auf das in erster Linie gleichungstheoretische Theorem 4 stützt. Besonders deutlich wird dieser enge Zusammenhang aber durch den Weg, der hier in § 1, wesentlich einfacher als der historische, zur Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante führt. Ihm liegt der nicht ferne Gedanke zugrunde, die Inverse einer Matrix in eben der Weise zu bestimmen, wie sich die Inverse einer algebraischen Zahl mit Hilfe ihres Minimalpolynoms bestimmen läßt.

Es möge nun noch die Hauptnorm kurz mit der Determinante Dieudonné's verglichen werden. Für die Hauptnorm erscheint die Beschränkung auf endlichen Rang unerläßlich (Existenz eines Minimalpolynoms!). Dafür entfällt die Beschränkung auf Divisionsalgebren und invertierbare Matrizen, die durch das Nichtverschwinden ihrer Hauptnormen charakterisiert sind, und es werden durch eine entsprechende Übertragung der Cramerschen Regel exakte Lösungen der linearen Gleichungssysteme ermöglicht. Der Allgemeinheit der Dieudonnéschen Determinante, die (s. oben) vom Gesichtspunkt der Gruppentheorie aus alles, was sonst noch Anspruch auf Determinantenartigkeit erheben könnte, in den zweiten Rang verweist[6]), steht eine Aussage der Einzigartigkeit der Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante gegenüber (Theorem 4), nach der alle Polynome in den Koordinaten der Matrixelemente, die außer der Hauptnorm noch als Ersatz für die Determinante in Betracht gezogen werden mögen und insbesondere eine exakte Lösungen liefernde Cramersche Regel gestatten, nur Vielfache der Hauptnorm sein können.

Hinsichtlich einer Fortführung der vorliegenden Untersuchungen seien die beiden folgenden Punkte bemerkt:

---

[5]) Leider scheint es unmöglich zu sein, lediglich aus der Definition der Determinante als einer Hauptnorm ihre Darstellung als Polynom abzuleiten, ist es doch gerade so, daß alle nicht trivialen Sätze über Hauptnormen letztlich auf Determinantentheoremen fußen, die die Polynomdarstellung (oder damit äquivalente Sätze) der Determinante voraussetzen.

[6]) Also im Falle der Schiefkörper endlichen Ranges über einen kommutativen Unterkörper (Zentrum), wo sowohl die Dieudonnésche Determinante als auch die Hauptnorm definiert ist, auch diese, denn da die Hauptnorm einer invertierbaren Matrix bzw. eines Matrizenproduktes nicht verschwindet bzw. dem Produkt der Hauptnormen der Faktormatrizen gleicht, ist die Hauptnorm trivialerweise eine Funktion von der Art, wie sie oben zur Erläuterung der Allgemeinheit des Dieudonnéschen Determinantenbegriffs diente.

a) Study gelingt im Falle der Quaternionen eine Darstellung der Hauptnorm (Nablafunktion) als Polynom in den Elementen der Matrix und deren Konjugierten, während im allgemeinen Falle nur eine Darstellung als Polynom in den Koordinaten der Matrixelemente möglich erscheint. Mit Hilfe der in § 5 zusammengestellten Formeln und Gradsätze kann aber das Resultat Studys, wenn seine kombinatorischen Überlegungen noch zweckmäßig formalisiert werden, auf beliebige Algebren vom Hauptrang 2, wenigstens bei von 2 verschiedener Charakteristik des Grundkörpers, übertragen werden[7]). Damit läßt sich dann als Charakteristikum für den Hauptrang 2 (bei von 2 verschiedener Charakteristik des Grundkörpers) zeigen, daß sich die Hauptnorm nicht ändert, wenn die betreffende Matrix transponiert wird und deren Elemente durch ihre Konjungierten ersetzt werden. Daß einfaches Transponieren einer Matrix ihre Hauptnorm ändern kann, zeigen schon einfachste Beispiele über dem Quaternionenkörper.

b) Eine Ausdehnung der Determinantentheorie nach dem Muster des § 1 auf nichtassoziative Algebren erscheint aussichtslos, denn schon über dem Cayleykörper wird $A^2 A \neq A A^2$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & e_0 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$, wo die Elemente der Basis 1, $e_0, e_1, \ldots, e_6$ sich gemäß der Regel $e_i e_{i+1} = e_{i+3} = -e_{i+1} e_i$ multiplizieren, in der die drei Indizes zyklisch vertauscht werden dürfen und modulo 7 zu reduzieren sind.

§ 1. Die Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit Einselement e und endlichem Rang n über ihrem kommutativen Grundkörper $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{A}_m$ sei die $\mathfrak{K}$-Algebra aller m-reihigen quadratischen Matrizen A mit Elementen aus $\mathfrak{A}$. Ein lineares Gleichungssystem über $\mathfrak{A}$ heiße *rechts-* oder *linksseitig* je nach dem, ob die Unbekannten sämtlich rechts oder links von ihren Koeffizienten stehen. Im folgenden ist mit einem „linearen Gleichungssystem" stets ein rechts- oder linksseitiges mit quadratischer Matrix gemeint. Das Polynom niedrigsten Grades über $\mathfrak{K}$, das $A \in \mathfrak{A}_m$ als Nullstelle besitzt, heißt wie üblich, wenn noch der höchste Koeffizient zu 1 normiert ist, das *Minimalpolynom* $\mu(t; A, \mathfrak{A}_m)$ (über $\mathfrak{K}$) von A als Element von $\mathfrak{A}_m$[8]). Den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen bildet

Lemma 1. *Ein lineares Gleichungssystem über $\mathfrak{A}$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathfrak{A}_m$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A in $\mathfrak{A}_m$ Einheit ist, und dies ist gleichwertig damit, daß das absolute Glied des Minimalpolynoms über $\mathfrak{K}$ von A als Element von $\mathfrak{A}_m$ nicht verschwindet.*

Beweis. Ist $t^s + t^{s-1} \cdot \mu_1 + \cdots + \mu_s$ das Minimalpolynom von $A \in \mathfrak{A}_m$, so wird $E\mu_s = A\tilde{A} = \tilde{A}A$ für $\tilde{A} = -(A^{s-1} + A^{s-2}\mu_1 + \cdots + E\mu_{s-1})$, so daß A Null-

[7]) Siehe meine Inauguraldissertation: Die Hauptnorm als Ausdehnung des Determinantenbegriffs auf Algebren endlichen Ranges, Bonn 1951.

[8]) Der Zusatz „als Element von $\mathfrak{A}_m$" ist notwendig, denn z. B. ist A^0 für ein A aus einem direkten Summanden von $\mathfrak{A}_m$ dem Einselement dieses Summanden oder dem von $\mathfrak{A}_m$ gleichzusetzen je nach dem, ob A als Element jenes Summanden oder als Element von $\mathfrak{A}_m$ betrachtet werden soll.

teiler und damit Nichteinheit, wenn $\mu_s = 0$, während sonst $\tilde{A}\mu_s^{-1} = A^{-1}$ wird. Ist A keine Einheit, also $A\tilde{A} = \tilde{A}A = 0$, und besitzt ein Gleichungssystem mit der Matrix A überhaupt eine Lösung, so ist die Summe dieser Lösung mit einer nicht verschwindenden Spalte bzw. Zeile von $\tilde{A}$ eine weitere Lösung, während für ein invertierbares A die Multiplikation des Gleichungssystems mit A^{-1} eine eindeutige Lösung liefert.

Das absolute Glied des Minimalpolynoms von A entscheidet also in der gleichen Weise über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit der Matrix A, wie die Determinante von A im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, besitzt aber dieser gegenüber den Nachteil, daß sie sich nicht als rationale Funktion der Elemente von A oder wenigstens von deren Koordinaten bezüglich einer Basis von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ darstellen läßt[9]). Daher werde jetzt eine *allgemeine Matrix* U über $\mathfrak{A}$ betrachtet, deren Elemente $u_{ij}(i, j = 1, \ldots, m)$ also bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ Unbestimmte $v_{ij1}, \ldots, v_{ijn}$ als Koordinaten besitzen, so daß $U \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m} = \mathfrak{A}_{m,\mathfrak{Q}}$, wo die $\mathfrak{Q}$-Algebra $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ (bzw. $\mathfrak{A}_{m,\mathfrak{Q}}$) in bekannter Weise aus $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{A}_m$) durch Erweiterung des Grundkörpers $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}(v_{111}, \ldots, v_{11n}, v_{121}, \ldots, v_{12n}, \ldots, v_{mm1}, \ldots, v_{mmn})$ entsteht. Über das Minimalpolynom

$$(1) \qquad \pi(t; U) = \pi(t; U, \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m}) = t^l - t^{l-1}\cdot\pi_1(U) + - \cdots + (-1)^l\cdot\pi_l(U)$$

über $\mathfrak{Q}$ von U[10]) finden sich bei N. Jacobson[11]) (wenn dort $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_m$ ersetzt wird) folgende Bemerkungen:

(I) Die Koeffizienten des Minimalpolynoms von U sind Polynome über $\mathfrak{R}$ in den Unbestimmten $v_{ij\nu}$: $\pi_\lambda(U) = \pi_\lambda(v_{111}, \ldots, v_{mmn})$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$, die für die bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ genommenen Koordinaten $\alpha_{ij\nu}$ der Elemente einer Matrix $A \in \mathfrak{A}_m$ Werte $\pi_\lambda(\alpha_{111}, \ldots, \alpha_{mmn}) = \pi_\lambda(A)$ liefern, die unabhängig sind von der zugrunde gelegten Basis, bezüglich deren U mittels unbestimmten Koordinaten gebildet und bezüglich deren dann auch die Koordinaten der Elemente von A bestimmt wurden. Das nur von A abhängende Polynom $\pi(t; A) = t^l - t^{l-1}\cdot\pi_1(A) + - \cdots + (-1)^l\cdot\pi_l(A)$, dessen Grad l also nur von $\mathfrak{A}_m$ abhängt, heißt das *Hauptpolynom* (principal polynomial) von A, und speziell $\pi_1(A) = T(A)$ und $\pi_l(A) = N(A)$ heißen beziehentlich *Hauptspur* und *Hauptnorm* von A, und entsprechend werden diese Bezeichnungen auch bezüglich der allgemeinen Matrix U an Stelle der Matrix A verwandt, und es wird von $\pi(t; U)$, $T(U)$ und $N(U)$ mitunter auch als von dem Hauptpolynom, der Hauptspur und der Hauptnorm von $\mathfrak{A}_m$ gesprochen.

(II) Das Minimalpolynom $\mu(t; A, \mathfrak{A}_m)$ ist Teiler des Hauptpolynoms $\pi(t; A)$ und es besitzen beide Polynome über $\mathfrak{R}$ die gleichen irreduziblen Faktoren.

---

[9]) Dem entspricht es, daß die Determinante im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ nicht immer das absolute Glied des Minimalpolynoms liefert: $t-2$ ist das Minimalpolynom der Matrix $2E$ über dem Körper der rationalen Zahlen.

[10]) Hier ist der Zusatz „als Element von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m}$" überflüssig, weil U als allgemeine Matrix zu einer bestimmten Basis und damit auch zu einer bestimmten Algebra gehört.

[11]) Ins Einzelne gehende Beweise finden sich in jedem Falle in meiner Inauguraldissertation.

Wird jetzt noch

$$\left(U^{l-1} - U^{l-2} \cdot \pi_1(U) + - \cdots + (-1)^{l-1} E \cdot \pi_{l-1}(U)\right) \cdot (-1)^{l+1} = \overline{U}$$

und das entsprechend definierte $\overline{A}$ *Hauptadjungierte* von U bzw. von A genannt, so folgt aus Lemma 1 und (II) sofort

Theorem 1. *Die Matrix A ist in $\mathfrak{A}_m$ Einheit, genau wenn ihre Hauptnorm $N(A)$ nicht verschwindet, und es ist $N(U) \cdot E = U\overline{U} = \overline{U}U$, wenn E die Einheitsmatrix von $\mathfrak{A}_m$ bedeutet.*

Die Formel in diesem Theorem entspricht dem *Laplaceschen Entwicklungssatz*: Die Multiplikation der i-ten Zeile von $U(\overline{U})$ mit der j-ten Spalte von $\overline{U}(U)$ liefert 0 für $i \neq j$ und sonst $N(U)$ als Linearkombination der Elemente der i-ten Zeile (Spalte) von U. Die Multiplikation von links des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ mit } \overline{A} \text{ liefert die Formel } N(A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \overline{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

die für $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, wo $\pi(t; A) = |E\,t - A|$, also $N(A) = |A|$ und damit $\overline{A}$ die zu A adjungierte Matrix wird, in eine gebräuchliche Formulierung der *Cramerschen Regel* übergeht. Die entsprechende Formel für linksseitige Gleichungssysteme liegt auf der Hand[12]).

§ 2. Die Hauptnorm als ausgezeichnete Verallgemeinerung der Determinante.

Ist R eine treue, d.h. eineindeutige, Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$, so ist die Abbildung von $\mathfrak{A}_\Omega$ auf Matrizen über Ω, die dem Element $\sum_\nu \beta_\nu e_\nu$ die Matrix $\sum_\nu \beta_\nu \cdot Re_\nu$ zuordnet, ersichtlich eine treue Darstellung von $\mathfrak{A}_\Omega$ über Ω, die wieder mit R bezeichnet werden kann, weil sie, wie leicht nachzurechnen, von der Basis $e_1, \ldots, e_n$ unabhängig ist. Durch

$$R \cdot \begin{pmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}, & \ldots, & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rb_{11}, & \ldots, & Rb_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Rb_{m1}, & \ldots, & Rb_{mm} \end{pmatrix}, \quad b_{ij} \in \mathfrak{A}_\Omega,$$

wird R dann weiter zu einer treuen Darstellung von $\mathfrak{A}_{\Omega,\,m}$ über Ω vom Grade mr fortgesetzt, wenn R als Darstellung von $\mathfrak{A}$ den Grad r besitzt. Nach Jacobson ergibt sich dann:

(III) Das Minimalpolynom $\pi(t; U)$ der allgemeinen Matrix $U \in \mathfrak{A}_{\Omega,\,m}$ ist in $\Omega[t]$ letzter invarianter Faktor (höchster Elementarteiler) der charakteristischen Matrix $t \cdot RE - RU$, wenn R eine treue, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildende Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ ist. Die Determinante $|t \cdot RE - RU|$ und ihr Teiler $\pi(t; U)$ in $\Omega[t]$ besitzen also in $\Omega[t]$ beide die gleichen irreduziblen Faktoren.

[12]) Es gilt aber natürlich i. a. nicht $x_i = N(A_i)/N(A) \in \mathfrak{R}$, wo A_i aus A durch Ersetzung der i-ten Spalte durch die $a_1, \ldots, a_m$ entsteht.

$\pi(t;U)$ ergibt sich also aus $|t \cdot RE - RU|$ bei Division durch den größten gemeinsamen Teiler (gr. g. T.) in $\mathfrak{Q}[t]$ aller $(m\,r-1)$-reihigen Unterdeterminanten, dessen höchster Koeffizient bezüglich t gleich 1 ist. In einer analogen Beziehung stehen $N(U)$ und $|RU|$ als Polynome aus $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}[v_{111}, \ldots, v_{mmn}]$ zueinander:

Theorem 2. *Ist R eine treue das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildende Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$, so ist die Hauptnorm $N(U)$ in $\mathfrak{P}$ Teiler der „R-Norm" $|RU|$, und zwar ist $|RU|/N(U)$ gr. g. T. in $\mathfrak{P}$ aller $(m\,r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von RU und $N(E) = 1$.*

Beweis. Es genügt den Beweis für $m = 1$ zu führen, weil in ihm die Eigenschaft von $\mathfrak{A}_m$ eine Matrixalgebra zu sein nicht benötigt wird. Für ein allgemeines Element $u = \sum_\nu v_\nu e_\nu$ der Algebra $\mathfrak{A}$ und deren Einselement $e = \sum_\nu \varepsilon_\nu e_\nu$ existiert nach (III) eine Gleichung

$$|t \cdot Re - Ru| = \delta(t, v_1, \ldots, v_n) \cdot \pi(t;u), \tag{2}$$

wo δ gr. g. T. in $\mathfrak{Q}[t] = \mathfrak{K}(v_1, \ldots, v_n)[t]$ aller $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t \cdot Re - Ru$ und nach dem Gaußschen Theorem[13]) ein Polynom aus $\mathfrak{P}[t] = \mathfrak{K}[v_1, \ldots, v_n, t]$ ist. Bei der Substitution $t \to 0, v_\nu \to -v_\nu$, geht (2) über in

$$|Ru| = \delta(0, -v_1, \ldots, -v_n) \cdot \pi_j(v_1, \ldots, v_n), \tag{3}$$

wenn außer (1) noch beachtet wird, daß $\pi(t;u)$ als Teiler von $|t \cdot Re - Ru| = |\sum(t\varepsilon_\nu - v_\nu) \cdot Re_\nu|$ in allen Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n, t$ homogen ist. Nun ist δ auch in $\mathfrak{P}[t]$ gr. g. T. aller $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t \cdot Re - Ru$, denn wird dieser mit $\tilde{\delta}(t, v_1, \ldots, v_n)$ bezeichnet, wenn noch sein höchster Koeffizient bezüglich t zu 1 normiert ist — das ist möglich, weil $\tilde{\delta}$ nach dem Determinantenentwicklungssatz auch $|t \cdot Re - Ru|$ selbst in $\mathfrak{P}[t]$ teilt —, so ergibt sich, da der höchste Koeffizient bezüglich t von δ nach (2) gleich 1 ist und daher δ nach dem Gaußschen Theorem die genannten Unterdeterminanten schon in $\mathfrak{P}[t]$ teilt, $\tilde{\delta} \equiv 0(\delta)$ in $\mathfrak{P}[t] \subseteq \mathfrak{Q}[t]$, während $\delta \equiv 0(\tilde{\delta})$ in $\mathfrak{Q}[t]$ trivial ist, so daß δ und $\tilde{\delta}$ sich nur um einen Faktor aus $\mathfrak{Q}$ unterscheiden, der aber wegen (2) gleich 1 sein muß. Weiter besitzen die $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t \cdot Re - Ru = \sum_\nu (t\,\varepsilon_\nu - v_\nu) \cdot Re_\nu$ alle die Gestalt $|\sum_\nu (t\,\varepsilon_\nu - v_\nu) \cdot A_\nu|$, wo die A_ν $(r-1)$-reihige Untermatrizen der Re_ν und dann also die $|\sum_\nu v_\nu A_\nu|$ die entsprechenden Unterdeterminanten von $|\sum_\nu v_\nu \cdot Re_\nu| = |Ru|$ sind. Damit ergibt sich bei der zur Herleitung von (3) benutzten Substitution $\delta(0, -v_1, \ldots, -v_n)$ als gemeinsamer Faktor in $\mathfrak{P}$ der $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von Ru und damit als Teiler in $\mathfrak{P}$ von deren gr. g. T. $\delta'(v_1, \ldots, v_n)$ in $\mathfrak{P}$. Andererseits liefert die Substitution $v_\nu \to t\,\varepsilon_\nu - v_\nu$ in entsprechender Weise $\delta(t, v_1, \ldots, v_n) \equiv 0\big(\delta'(t\,\varepsilon_1 - v_1, \ldots, t\,\varepsilon_n - v_n)\big)$ in $\mathfrak{P}[t]$, was bei der Substitution $t \to 0$, $v_\nu \to -v_\nu$ in $\delta(0, -v_1, \ldots, -v_n) \equiv 0\big(\delta'(v_1, \ldots, v_n)\big)$ in $\mathfrak{P}$ übergeht. Schließlich ergibt sich noch $N(e) = 1$ aus der Bemerkung, daß $\pi(t;e)$ nach (II) eine Potenz des Minimalpolynoms $t - 1$ von $e \in \mathfrak{A}$ sein muß.

[13]) Vgl. van der Waerden, Moderne Algebra I, § 23. Berlin 1937.

Hieran schließt sich zwanglos Theorem 3, das sich stützt auf

Lemma 2. *Ist $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ ein Polynom über $\mathfrak{K}$ in den Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$, so sind die Teiler in $\mathfrak{K}[v_1, \ldots, v_n\, t]$ von $\varphi(t\,\alpha_1 - \beta_1 v_1, \ldots, t\,\alpha_n - \beta_n v_n)$, wo $\Pi_\nu \beta_\nu \neq 0$, auch wieder Polynome über $\mathfrak{K}$ in den $t\,\alpha_\nu - \beta_\nu v_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$.*

Beweis. Wird eine Primfaktorzerlegung in $\mathfrak{K}[v_1, \ldots, v_n, t]$ von $\varphi(t\alpha_1 - \beta_1 v_1, \ldots, t\,\alpha_n - \beta_n v_n)$, der Substitution $t \to 0$, $v_\nu \to -\beta_\nu^{-1}(t\,\alpha_\nu - \beta_\nu v_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ unterworfen, die das Polynom selbst reproduziert, so entsteht wieder eine Primfaktorzerlegung, denn zunächst kann bei der Substitution höchstens eine Graderniedrigung der einzelnen Faktoren eintreten, d.h. aber der Grad der einzelnen Faktoren bleibt erhalten, so daß insbesondere kein Faktor in ein Polynom 0-ten Grades übergeht, also aus der Zerlegung verschwindet, und daher dann die Reduzibilität eines Faktors in der neuen Zerlegung die Existenz zweier Primfaktorzerlegungen desselben Polynoms mit verschieden vielen Primfaktoren bedeuten würde.

Theorem 3. *Das Hauptpolynom $\pi(t; U)$ entsteht aus der Hauptnorm $N(U)$ durch die Substitution $v_{ij\nu} \to t\,\delta_{ij}\varepsilon_\nu - v_{ij\nu}$:*

$$\pi(t; U) = \pi_1(t\,\delta_{11}\,\varepsilon_1 - v_{111}, \ldots, t\,\delta_{mm}\,\varepsilon_n - v_{mmn}),$$

wo $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$, während die ε_ν und die Unbestimmten $v_{ij\nu}$ die Koordinaten des Einselementes von $\mathfrak{A}$ und der Elemente von U bezüglich derselben Basis $e_1, \ldots, e_n$ sind.

Beweis. Sind die e_{ij} die Matrixeinheiten, so daß die $e_{ij}e_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{A}_m$ über $\mathfrak{K}$ bilden, so sind die $\delta_{ij}\varepsilon_\nu$ bzw. die $v_{ij\nu}$ die Koordinaten der Einheitsmatrix $E \in \mathfrak{A}_m$ bzw. der allgemeinen Matrix U bezüglich dieser Basis. Es genügt daher wieder, den Beweis für $m = 1$ zu führen. Wegen $|t \cdot Re - Ru| = |\sum_\nu (t\,\varepsilon_\nu - v_\nu) \cdot Re_\nu|$ und (2) existiert nach Lemma 2 über $\mathfrak{K}$ ein Polynom $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ mit $\pi(t; u) \doteq \varphi(t\,\varepsilon_1 - v_1, \ldots, t\,\varepsilon_n - v_n)$, was nach (1) unter Beachtung der schon erwähnten Homogenitätseigenschaft von $\pi(t; u)$ durch die Substitution $t \to 0$, $v_\nu \to -v_\nu$ in $N(u) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ übergeht.

Nach (1) und den Theoremen 1 und 3 können also die drei Größen $\pi(t; U)$, $N(U)$ und $\overline{U}$ aus jeder von ihnen berechnet werden. — Auf Grund von Theorem 2 besitzt $N(U)$ eine wichtige Minimaleigenschaft:

Theorem 4. *Existiert zu einem nicht verschwindenden Polynom $\varphi(v_{111}, \ldots, v_{mmn}) \in \mathfrak{P} = \mathfrak{K}[v_{111}, \ldots, v_{mmn}]$ eine Matrix V aus dem Ring $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},m}$ aller Matrizen aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m}$, deren Elemente bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ (und damit bezüglich jeder Basis von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$) Polynome aus $\mathfrak{P}$ als Koordinaten besitzen, derart, daß*

$$\text{stets } \varphi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{gilt, falls} \quad U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \text{oder daß}$$

stets $(x_1, \ldots, x_m) \cdot \varphi = (a_1, \ldots, a_m) \cdot V$ gilt, falls $(x_1, \ldots, x_m) \cdot U = (a_1, \ldots, a_m)$, so ist $N(U)$ in $\mathfrak{P}$ Teiler von φ und $V = \overline{U} \cdot (\varphi / N(U))$. — Da insbesondere $N(U)$ selbst mit $V = \overline{U}$ die Voraussetzungen erfüllt (s. (I)), *ist $N(U)$ das Polynom*

niedrigsten Grades hinsichtlich der von φ geforderten Eigenschaften mit der Normierung $N(E)=1$ (s. Theorem 2).

Beweis. Nach Theorem 1 ist $U\overline{U}=N(U)\cdot E=\overline{U}U$. Die erste bzw. zweite Gleichung enthält für jede Spalte bzw. Zeile von $\overline{U}$ ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix U, so daß sich nach Voraussetzung in jedem Falle $\varphi\overline{U}=V\cdot N(U)$ ergibt, also die zweite Behauptung. Die Anwendung einer treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung R von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ liefert $\varphi\cdot R\overline{U}=N(U)\cdot RV$, wo $R\overline{U}$ und RV, wegen $\overline{U}$, $V\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},m}$, nur aus Polynomen aus $\mathfrak{P}$ bestehen, so daß die erste Behauptung folgt, wenn die Elemente von $R\overline{U}$ in $\mathfrak{P}$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. In der Tat, es liefert Theorem 1 $RU\cdot R\overline{U}=N(U)\cdot RE$, also, da $\overline{RU}$ nach § 1 die zu RU adjungierte Matrix bedeutet, wegen $(RU)^{-1}=\overline{RU}/|RU|$: $R\overline{U}=\overline{RU}/(|RU|/N(U))$, und es ist $|RU|/N(U)$ nach Theorem 2 größter gemeinsamer Teiler der Elemente von $\overline{RU}$.

Die Hauptnorm stellt also hinsichtlich der linearen Gleichungstheorie in Algebren endlichen Ranges mit Einselement nicht nur, wie in § 1 gezeigt, einen Ersatz der Determinante dar, sondern sie zeichnet sich nach Theorem 4 auch unter allen Funktionen φ, die gegebenenfalls noch als Ersatz in Betracht kommen könnten, durch ihren minimalen Grad aus.

§ 3. Ein Hilfssatz über irreduzible Darstellungen.

Es sei $\overline{\mathfrak{R}}$ die algebraische Abschließung von $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{P}}=\overline{\mathfrak{R}}[v_{111},\ldots,v_{mmn}]$, $\overline{\Omega}$ der Quotientenkörper von $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ die aus $\mathfrak{A}$ durch Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zu $\overline{\mathfrak{R}}$ entstehende $\overline{\mathfrak{R}}$-Algebra. $R_{m1},\ldots,R_{ms}$ sei ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$. Dann lassen sich aus Jacobson ohne besondere Mühe die folgenden, zur Berechnung des Hauptpolynoms von $\mathfrak{A}_m$ wichtigen, Hinweise entnehmen:

(IV) Die $R_{m\sigma}(\sigma=1,\ldots,s)$ sind bis auf Isomorphie in jeder voll ausreduzierten, treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$ als irreduzible Bestandteile (Diagonaldarstellungen) vertreten und bilden $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ auf volle Matrizenringe, insbesondere also das Einselement von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ auf Einheitsmatrizen ab.

(V) Es existiert in $\overline{\mathfrak{P}}[t]$ eine Primfaktorzerlegung von $\pi(t;U)$ der Gestalt $\Pi_{\sigma=1,\ldots,s}|t\cdot R_{m\sigma}E-R_{m\sigma}U|^{k_{m\sigma}}$ $(k_{m\sigma}>0)$[14]).

[14]) Zur Erlangung dieses Resultats ist, außer der trivialerweise vorzunehmenden Ersetzung von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_m$, in den Ausführungen von Jacobson bei Zugrundelegung der im Beweis von Theorem 2 eingeführten Bezeichnungen noch zu beachten, daß für zwei, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf Einheitsmatrizen abbildende irreduzible Darstellungen R_1, R_2 einer Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ genau dann $|t\cdot R_1e-R_1u|=|t\cdot R_2e-R_2u|$ gilt, wenn R_1 und R_2 äquivalent sind, was eine triviale Folge der entsprechenden Behauptung für die Determinanten $|R_1u|$ und $|R_2u|$ ist, die sich in van der Waerden, Moderne Algebra II, S. 184, Berlin 1932, als Übungsaufgabe befindet, und daß die Irreduzibilität von $|t\cdot R_{m\sigma}E-R_{m\sigma}U|$ in $\overline{\Omega}[t]$ natürlich die in $\overline{\mathfrak{P}}[t]$ nach sich zieht, weil der höchste Koeffizient dieses Polynoms bezüglich t gleich 1 ist.

In dieser Primfaktorzerlegung stört die unbekannte Abhängigkeit von m bei den Darstellungen und den Multiplizitäten. Daher interessiert das folgende

Lemma 3. *Bilden die $R_1, \ldots, R_s$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$, so bilden ihre gemäß § 2 definierten Fortsetzungen auf $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R},m}$ wieder ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen.*

Beweis. Da die $R_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s)$ nach (IV) auf volle Matrizenringe abbilden, tun dies auch ihre Fortsetzungen auf $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R},m}$, die somit ebenfalls irreduzibel sind. Diese Fortsetzungen sind aber auch wieder paarweise inäquivalent, denn die Äquivalenz der Fortsetzungen von R_1 und R_2 impliziert $|t \cdot R_1 E - R_1 U| = |t \cdot R_2 E - R_2 U|$ und $r_1 = r_2 = r$ für die Grade r_1, r_2 von R_1, R_2, so daß, wenn alle Elemente von U bis auf $u_{11} = u = \sum_\nu v_\nu e_\nu$ durch 0 ersetzt werden,

$$t^{(m-1)r} |t \cdot R_1 e - R_1 u| = t^{(m-1)r} |t \cdot R_2 e - R_2 u|$$

und damit $|R_1 u| = |R_2 u|$ folgt, was wegen der Irreduzibilität von R_1 und R_2 nur möglich ist, wenn R_1 und R_2 äquivalent sind[15]). Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß unter den Fortsetzungen der R_σ jede nicht verschwindende irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R},m}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$ bis auf Äquivalenz vertreten ist. Da äquivalente Darstellungen äquivalente Fortsetzungen haben[16]) und die R_σ ein vollständiges System nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen bilden, genügt es dazu aber wegen (IV), die Fortsetzung auf $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R},m}$ einer vollausreduzierten treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung R von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$ mit den irreduziblen Bestandteilen $R'_1, \ldots, R'_k$ so auszureduzieren, daß die so entstehende Darstellung als irreduzible Bestandteile nur die Fortsetzungen der $R'_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$ enthält. Das ist aber ohne weiteres möglich, denn die Zuordnung

$$R(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R'_1 a_{ij} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R'_k a_{ij} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R'_1(a_{ij}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R'_k(a_{ij}) \end{pmatrix}$$

wird ersichtlich dadurch bewirkt, daß Zeilen und Spalten ein und derselben Permutation unterworfen werden, und es sind die Diagonaldarstellungen rechts ersichtlich irreduzibel, weil die $R'_\varkappa$ nach (IV) schon $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ auf volle Matrizenringe abbilden.

Auf Grund von Lemma 3 können jetzt also in (V) die $R_{m\sigma}$ durch die $R_{1\sigma} = R_\sigma$ ersetzt werden.

§ 4. Die Primfaktorzerlegung des Hauptpolynoms von $\mathfrak{A}_m$.

Daß in (V) $k_{m\sigma} = k_{1\sigma}$, behauptet

Theorem 5. *Ist $R_1, \ldots, R_s$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$, so*

[15]) Vgl. die Anmerkung zu (V).

[16]) Aus $R_1 a = P \cdot R_2 a \cdot P^{-1}$, für alle a, folgt $R_1(a_{ij}) = \begin{pmatrix} P & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P \end{pmatrix} \cdot R_2(a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} P^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P^{-1} \end{pmatrix}$.

existiert in $\mathfrak{P}[t]$ *eine Primfaktorzerlegung*

$$\pi(t;U) = \Pi_{\sigma=1,\dots,s} |t \cdot R_\sigma E - R_\sigma U|^{k_\sigma} \qquad (k_\sigma > 0),$$

in der die k_σ *vom Grade* m *der Matrix* U *unabhängig sind und es ist dann* $\Pi_{\sigma=1,\dots,s} |R_\sigma U|^{k_\sigma}$ *eine Primfaktorzerlegung in* $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{R}}[v_{111}, \dots, v_{mmn}]$ *von* $N(U)$.

Beweis. Nach (V) und Lemma 3 gilt

$$\pi(t;U) = \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E - R_\sigma U|^{k_{m\sigma}} \qquad (k_{m\sigma} > 0), \tag{4}$$

so daß wegen (1) und $l = \sum_\sigma m r_\sigma k_{m\sigma}$, wo r_σ den Grad der Darstellung R_σ bedeutet,

$$N(U) = \Pi_\sigma |R_\sigma U|^{k_{m\sigma}}, \tag{5}$$

wo die Reduzibilität einer der in den $v_{ij\nu}$ homogenen Determinanten $|R_\sigma U|$ wegen Theorem 3 eine Zerlegung von $\pi(t;U)$ in mehr als $\sum_\sigma k_{m\sigma}$ Faktorpolynome positiven Grades ermöglichen würde. Daher braucht nur noch der erste Teil des Theorems bewiesen zu werden. Für die sich als Schnitt der m' ersten Zeilen und Spalten von U ergebende Untermatrix U' von U und die Einheitsmatrix E' von $\mathfrak{A}_{m'}$ folgt aus (4)

$$\pi\left(t; \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t^{(m-m')\sum_\sigma r_\sigma k_{m\sigma}} \cdot \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}.$$

Da dieses Polynom in t über $\Omega' = \mathfrak{R}(v_{111}, \dots, v_{m'm'n})$ die Nullstelle $\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt und also auch für die Matrix $U' \in \mathfrak{A}_{\Omega', m'}$ verschwindet, die wegen $N(U') \neq 0$ nach Theorem 1 invertierbar ist, besitzt schon das Polynom $\Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}$ die Nullstelle U' und ist damit durch das Minimalpolynom $\pi(t;U') = \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m'\sigma}}$ von U' teilbar, was $k_{m'\sigma} \leq k_{m\sigma}$ bedeutet. $k_{m'\sigma} = k_{m\sigma}$ ist daher wegen $r_\sigma > 0$ gleichbedeutend mit $\sum_\sigma r_\sigma (k_{m'\sigma} - k_{m\sigma}) = 0$. Da nach (5) $l' = m' \sum_\sigma r_\sigma k_{m'\sigma}$ der Grad von $N(U')$ ($|R_\sigma U'|$ ist eine nicht verschwindende Determinante, deren Elemente Linearformen in den $v_{111}, \dots, v_{m'm'n}$ sind), ist damit der Beweis zurückgeführt auf

Lemma 4. *Für den Grad* g' *von* $N(U)$ *bezüglich der unbestimmten Koordinaten* $v_{111}, \dots, v_{m'm'n}$ *der Elemente der Untermatrix* U' *von* U *und den Grad* l' *von* $N(U')$ *gilt* $l' = g' = m' \sum_\sigma r_\sigma k_{m\sigma}$.

Beweis. Da schon $k_{m'\sigma} \leq k_{m\sigma}$ bewiesen wurde, braucht nur noch die zweite Gleichung und $l' \geq g'$ bewiesen zu werden. Zum Beweise der zweiten Gleichung ist nur zu beachten, daß nach (5) sicher $g' \leq \sum_\sigma m' r_\sigma k_{m\sigma}$ ($|R_\sigma U|$ ist in den $v_{111}, \dots, v_{m'm'n}$ höchstens vom Grade $m' r_\sigma$, weil diese Unbestimmten nur im Schnitt der ersten $m' r_\sigma$ Spalten und Zeilen von $R_\sigma U$ auftreten) und daß aus (5) durch Spezialisierung das Polynom $N\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & E'' \end{pmatrix} = \Pi_\sigma |R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}$ (E'' Einheitsmatrix von $\mathfrak{A}_{m-m'}$) entsteht, dessen Grad $\sum_\sigma m' r_\sigma k_{m\sigma}$ (vgl. die Lemma 4 voraufgehende Bemerkung zur Bestimmung von l') somit nicht größer als g' sein kann. Die Ungleichung $l' \geq g'$ ist bewiesen, wenn es gelingt, ein die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllendes Polynom φ anzugeben,

das bezüglich der in U' vorkommenden Unbestimmten $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ höchstens den Grad l' besitzt, denn nach Theorem 4 ist φ dann Vielfaches von $N(U)$. Um ein solches φ zu finden, ist $U\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ einem geeigneten Eliminationsprozeß zu unterwerfen. Zu diesem Zweck werde das Gleichungssystem in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U' & V' \\ V'' & U'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \tag{6}$$

geschrieben, wo die einfach gestrichenen Matrizen und Spalten m'-, die zweifach gestrichenen $m'' = (m - m')$-zeilig sind, und im folgenden die für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten übliche Ausdrucksweise verwandt. Zur Elimination von X'' wird die zweite Gleichung von links mit $\overline{U''}$ multipliziert und das Ergebnis

$$N(U'') \cdot X'' = \overline{U''} A'' - \overline{U''} V'' X' \tag{7}$$

in die mit $N(U'')$ multiplizierte erste Gleichung eingesetzt:

$$\left(N(U'') \cdot U' - V' \overline{U''} V''\right) X' = W' X' = N(U'') \cdot A' - V' \overline{U''} A'', \tag{8}$$

wo W' nur zur Abkürzung des Koeffizienten von X' eingeführt wurde. Linksseitige Multiplikation von (8) mit $\overline{W'}$ liefert die Auflösung nach X':

$$N(W') \cdot X' = \left(N(U'') \cdot \overline{W'}, - \overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \tag{9}$$

was in die mit $N(W')$ multiplizierte Gl. (7) eingesetzt die Auflösung nach X'' ergibt:

$$\begin{aligned} N(W') \cdot N(U'') \cdot X'' &= N(W') \cdot \overline{U''} A'' - \overline{U''} V'' \cdot \left(N(U'') \cdot \overline{W'}, - \overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \\ &= \left(-N(U'') \cdot \overline{U''} V'' \overline{W'}, N(W') \cdot \overline{U''} + \overline{U''} V'' \overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wird hier noch die mit $N(U'')$ multiplizierte Gl. (9) hinzugefügt, so ergibt sich die Auflösung von (6) in der Gestalt

$$\left\{ \begin{aligned} &N(W') \cdot N(U'') \cdot \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} N(U'') \cdot N(U'') \cdot \overline{W'}, & - N(U'') \cdot \overline{W'} V' \overline{U''} \\ -N(U'') \cdot \overline{U''} V'' \overline{W'}, & N(W') \cdot \overline{U''} + \overline{U''} V'' \overline{W'} V' \overline{U''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Da, wie schon in Theorem 4 festgestellt, eine Hauptnorm und die bezüglich einer Basis über $\mathfrak{R}$ gebildeten Koordinaten der Elemente einer Hauptadjungierten Polynome über $\mathfrak{R}$ in den Koordinaten der Elemente der betreffenden Matrix sind, ist sofort zu sehen, daß $N(W') \cdot N(U'')$ als φ und die in (10)

rechtsstehende „zweireihige" Matrix als V die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllen. Zur Vollendung des Beweises ist also nur noch zu zeigen, daß φ bezüglich der in U' vorkommenden Unbestimmten höchstens vom Grade l' ist. Da $N(U'')$ diese Unbestimmten nicht enthält, braucht dies nur für $N(W')$ gezeigt zu werden. Nach (8) besitzt W' die Gestalt $\gamma U' + C$, wo γ ein Polynom über $\mathfrak{R}$ vom Grade 0 in den $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ und C eine m'-reihige Matrix über $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ ist, in der ebenfalls keine Unbestimmten aus U' vorkommen. Daher ergibt sich aus der gemäß (5) unter Beachtung von $|A+B| = |A| + \cdots + |B|$ gebildeten Formel

$$N(\gamma U' + C) = \Pi_\sigma |\gamma \cdot R_\sigma U' + R_\sigma C|^{k m'\sigma} = \Pi_\sigma (\gamma^{m' r_\sigma} |R_\sigma U'| + \cdots + |R_\sigma C|)^{k m'\sigma}$$
$$= \gamma^{l'} \Pi_\sigma |R_\sigma U'|^{k m'\sigma} + \cdots + \Pi_\sigma |R_\sigma C|^{k m'\sigma} = \gamma^{l'} \cdot N(U') + \cdots + N(C)$$

schon bei oberflächlicher Abschätzung der Grad von $N(W')$ bezüglich der Unbestimmten aus U' in der Tat als höchstens gleich dem von $N(U')$, was noch zu beweisen war.

§ 5. Gradsätze und Rechenregeln für Hauptnormen, Hauptadjungierte und Hauptspuren.

Dieser Paragraph stellt lediglich eine Ausschöpfung von Theorem 5 dar.

Theorem 6. 1. *Für den gemeinsamen Grad l von $\pi(t; U)$ und $N(U)$, und den Grad h von $\pi(t; u)$ und $N(u)$, den sog. „Hauptrang" von $\mathfrak{A}$, gilt $l = m h$.*

2. *Bei Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen von $A \in \mathfrak{A}_m$ multipliziert sich $N(A)$ mit dem Faktor $(-1)^k$.*

3. *$N(A)$ verschwindet, wenn A eine Nullspalte oder Nullzeile oder zwei gleiche Spalten oder Zeilen enthält.*

4. *$N(U)$ ist in den Koordinaten bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ der Elemente m' beliebiger Spalten bzw. Zeilen von U homogen vom Grade $m'h$ und erreicht diesen Grad in bezug auf die Koordinaten der Elemente einer jeden m'-reihigen Untermatrix von U.*

Beweis. 1. Nach Theorem 5 ist $l = \sum_\sigma m r_\sigma k_\sigma$ und $h = \sum_\sigma r_\sigma k_\sigma$. 2. Eine Vertauschung zweier Spalten von A bewirkt in der Matrix $R_\sigma A$ eine Vertauschung von r_σ Spalten unter Beibehaltung ihrer gegenseitigen Lage mit r_σ anderen Spalten, die dabei ebenfalls ihre Lage zueinander nicht ändern. Daher multipliziert sich $|R_\sigma A|$ bei dieser Vertauschung mit $(-1)^{r_\sigma r_\sigma} = (-1)^{r_\sigma}$ und $N(A)$ dann zufolge Theorem 5 mit $(-1)^{\sum_\sigma r_\sigma k_\sigma} = (-1)^k$. In diesem Beweise kann überall „Spalte" durch „Zeile" ersetzt werden. 3. Gleiche oder verschwindende Spalten (Zeilen) in A bewirken gleiche oder verschwindende Spalten (Zeilen) in $R_\sigma A$. Daher wegen Theorem 5 die Behauptung. 4. Es habe U' die gleiche Bedeutung wie in § 4. Nach Theorem 5 und Lemma 4 ist $g' = m'h$. Wegen 2. ist damit der zweite Teil der Behauptung bereits bewiesen. Auch der erste Teil der Behauptung braucht wegen 2. nur für die m' ersten Spalten bzw. Zeilen bewiesen zu werden, und wegen Theorem 5 reicht es dazu aus, die $|R_\sigma U|$ bezüglich der in ihren $m' r_\sigma$ ersten Spalten bzw. Zeilen vorkommenden Unbestimmten als homogen vom Grade $m' r_\sigma$ zu erweisen.

Das ist aber trivial, weil die Behauptung für Determinanten zutrifft und die Elemente von $R_\sigma U$ Linearformen sind.

Theorem 7. *Für allgemeine Matrizen* $U, V, U_1, \ldots, U_k$ *gilt* $N(UV) = N(U) \cdot N(V)$ *und*

$$N\begin{pmatrix} U_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix} = N(U_1) \ldots N(U_k) = N\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ * & U_k \end{pmatrix}.$$

Beweis. Folgt wegen Theorem 5 sofort aus den entsprechenden Determinantensätzen.

Korollar. 1. $N(A)$ *ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte von* A *eine von rechts mit a multiplizierte andere Spalte oder zu einer Zeile eine von links mit a multiplizierte andere Zeile addiert wird.*

2. *Bei Multiplikation einer Spalte von rechts oder einer Zeile von links mit a multipliziert sich* $N(A)$ *mit* $N(a)$.

3. $N(E\,\alpha) = \alpha^{m\,k}$, $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Beweis. 1. Die in 1. bzw. 2. gebildete Matrix entsteht aus A durch Multiplikation mit einer Matrix, die in der Hauptdiagonalen nur Einsen und außerhalb derselben nur ein möglicherweise von 0 verschiedenes Element a enthält, bzw. mit einer Matrix, die in der Hauptdiagonalen außer einem a nur Einsen und sonst nur Nullen enthält. 3. Nach Theorem 7 ist $N(E\,\alpha) = (N(e\,\alpha))^m$ und nach Theorem 5 wird $N(e\,\alpha) = \alpha^k$ wegen $R_\sigma \cdot e\,\alpha = R_\sigma e \cdot \alpha$, wo $R_\sigma e$ nach (IV) die r_σ-reihige Einheitsmatrix ist.

Theorem 8. *Mit den Voraussetzungen von Theorem 7 gilt:* 1. $\overline{UV} = \overline{V} \cdot \overline{U}$, 2. $N(\overline{U}) = (N(U))^{m\,k-1}$, 3. $\overline{\overline{U}} = U \cdot (N(U))^{m\,k-2}$,

4. $$\overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \cdot \Pi_{\varkappa \neq 1} N(U_\varkappa) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \cdot \Pi_{\varkappa \neq k} N(U_\varkappa) \end{pmatrix} \quad \textit{und}$$

5. $$\overline{E\,\alpha} = E\,\alpha^{m\,k-1}, \qquad \alpha \in \mathfrak{R}.$$

Beweis. 1. Folgt aus $UV \cdot \overline{UV} = E \cdot N(U) \cdot N(V) = U \cdot N(V) \cdot \overline{U} = UV \cdot \overline{V}\,\overline{U}$ wegen $N(UV) = N(U)\,N(V) \neq 0$. 2. Folgt aus $N(U) \cdot N(\overline{U}) = N(U\overline{U}) = N\big(E \cdot N(U)\big)$ nach Korollar 3 von Theorem 7. 3. Mit 2. wird $U\overline{U} = E \cdot N(\overline{U}) = E \cdot (N(U))^{m\,k-1}$. Daher nach Linksmultiplikation mit U die Behauptung. 4. Folgt aus

$$\begin{pmatrix} E \cdot N(U_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E \cdot N(U_k) \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_k \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \end{pmatrix} \Pi_\varkappa N(U_\varkappa).$$

5. Nach 4. und dem Korollar 3 von Theorem 7 wird

$$\overline{E\alpha} = E \cdot \overline{e\alpha}\,(N(e\alpha))^{m-1} = E \cdot \overline{e\alpha} \cdot \alpha^{(m-1)h}.$$

Aus

$$e\alpha \cdot \overline{e\alpha} = e \cdot N(e\alpha) = e\alpha^h \quad \text{folgt aber} \quad \overline{e\alpha} = e\,\alpha^{h-1}.$$

Theorem 9. *Mit den Voraussetzungen der Theoreme 7 und 8 wird:*

$$T(U) = \textstyle\sum_\sigma k_\sigma \cdot T(R_\sigma U), \quad T(A\alpha) = \alpha \cdot T(A), \quad T(U+V) = T(U) + T(V),$$

$$T(UV) = T(VU), \quad T\begin{pmatrix} U_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & U_k \end{pmatrix} = T(U_1) + \cdots + T(U_k), \quad T(e\alpha) = h\alpha,$$

und es hat die Transponierte einer Matrix die gleiche Hauptspur wie die Matrix selbst.

Beweis. Da $-T(U)$ der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von t in $\pi(t;U)$ ist, ergibt sich die erste Formel sofort aus Theorem 5 und alle anderen Behauptungen folgen aus ihr, weil sie für Matrizen über kommutativen Körpern bereits gelten. Bei der vorletzten ist nur wieder zu beachten, daß $R_\sigma e$ die r_σ-reihige Einheitsmatrix ist, und bei der letzten, daß die Transponierte von $R_\sigma U$ die gleiche Hauptdiagonale besitzt wie das R_σ-Bild der Transponierten von U.

Schließlich sei noch bemerkt: Mit $U = (u_{ik})$, $\overline{U} = (u^{ik})$ wird

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ u_{m'+1,1}, & \cdots, & u_{m'+1,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_{m,1}, & \cdots, & u_{m,m} \end{pmatrix} \overline{U} = \begin{pmatrix} u^{11}, & \cdots, & u^{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u^{m'1}, & \cdots, & u^{m'm} \\ & N(U) & \\ 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 \quad N(U) & \end{pmatrix}$$

wie aus $U\overline{U} = E \cdot N(U)$ ersichtlich, und durch Hauptnormenbildung nach Theorem 7, Korollar 3 von Theorem 7 und Theorem 8,2:

$$(11) \qquad N\begin{pmatrix} u_{m'+1,m'+1}, & \cdots, & u_{m'+1,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_{m,m'+1}, & \cdots, & u_{m,m} \end{pmatrix} \cdot (N(U))^{m'h-1} = N\begin{pmatrix} u^{11}, & \cdots, & u^{1m'} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u^{m'1}, & \cdots, & u^{m'm'} \end{pmatrix},$$

womit für $m' = 1$ eine Formel gewonnen ist, die gegebenenfalls einen Induktionsschluß nach m bei geradem h für die positive Definitheit von $N(U)$ ermöglicht.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

JURKAT, W., und A. PEYERIMHOFF
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 186—203 (1953)

Summierbarkeitsfaktoren.

Von
WOLFGANG JURKAT und ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Wir haben kürzlich[1]) Spezialfälle eines Problems über Summierbarkeitsfaktoren behandelt. Dieses Problem kann man allgemein so formulieren: Ausgehend von zwei Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird nach genauen Bedingungen dafür gefragt, daß eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ jede $\mathfrak{A}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ überführt. Die Zahlen $\bar{\varepsilon}_\nu$ wollen wir dann Summierbarkeitsfaktoren nennen.

Für CESÀROsche Verfahren gab I. SCHUR [*18*] notwendige und hinreichende Bedingungen ohne Beweis an; Beweise gaben BOSANQUET [*1*], [*2*], [*3*] und KNOPP [*14*] (vgl. ferner die bei HARDY [*7*], S. 146 zitierten Arbeiten). Im Falle $\mathfrak{B}$ = Konvergenz, d. h. für Konvergenzfaktoren sind genaue Bedingungen bekannt, wenn $\mathfrak{A}$ gewisse NÖRLUND-Verfahren[2]) oder RIESZsche Mittel[3]) sind. In unserer oben erwähnten Arbeit konnten wir das Problem vollständig lösen für die Spezialfälle $\mathfrak{B}$ = Konvergenz und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Dabei hatten wir vorausgesetzt, daß für $\mathfrak{A}$ ein gewisser Mittelwertsatz gilt. Diese letzte Voraussetzung wollen wir auch in dieser Arbeit beibehalten, doch $\mathfrak{B}$ darf jetzt weitgehend beliebig sein. Es wird an $\mathfrak{A}$ nur noch durch eine Vergleichsbedingung allgemeiner Art gebunden sein, die in der Natur der Sache zu liegen scheint. Unter diesen Voraussetzungen werden wir das Problem vollständig lösen.

In § 1 formulieren wir den Hauptsatz in seinen verschiedenen Formen. Der Beweis erfolgt in § 2. In § 3 werden die Voraussetzungen diskutiert, unter anderem wird gezeigt, daß unsere früheren Ergebnisse Spezialfälle des Hauptsatzes sind. Als Anwendungen untersuchen wir bewichtete arithmetische Mittel, NÖRLUND-Verfahren, CESÀROsche Verfahren und RIESZsche Mittel. Insbesondere werden auch spezielle Summierbarkeitsfaktoren für diese Verfahren angegeben. Eine Reihe bekannter Sätze sind als Spezialfälle in unseren Überlegungen enthalten.

1. Der Hauptsatz.

Wir betrachten (reelle) Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$ der Form

$$(1) \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \qquad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)$$

mit

$$(2) \qquad a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu > n, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n,\nu+1}.$$

[1]) JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*].
[2]) MOORE [*15*].
[3]) JURKAT [*9*], [*11*].

Die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Matrizen $A = (a_{n\nu})$ bzw. $\overline{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ heißen normal, wenn

$$a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0$$

ist. Mit $Sp_0(A)$ und $Sp_1(\overline{A})$ bezeichnen wir die folgenden Spaltenbedingungen

$Sp_0(A)$: $\quad a_{n\nu} \to 0$ für $n \to \infty$, ν fest,

$Sp_1(\overline{A})$: $\quad \bar{a}_{n\nu} \to 1$ für $n \to \infty$, ν fest.

Für A gilt der Mittelwertsatz $M(A)$, wenn für jede Folge $\{s_\nu\}$ und für alle $n \leq m$ die Ungleichung

$M(A)$: $$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leq K \left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right| \qquad (0 \leq n' \leq n)$$

mit geeignetem n' gilt[4]). Entsprechende Bezeichnungen gelten für die Transformation $\mathfrak{B}$

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu .$$

Zum Beweis des Hauptsatzes brauchen wir eine gewisse Vergleichsbedingung $V(A, B)$ zwischen A und B: Für jede Folge $\{s_\nu\}$ und beliebig vorgegebene Zahlen n, m', m mit $n \leq m' \leq m$ gilt

$V(A, B)$: $$\left|a_{m'n} \sum_{\nu=0}^{n} b_{m\nu} s_\nu\right| \leq K \left|b_{m'n} \sum_{\nu=0}^{n''} a_{n'\nu} s_\nu\right|$$

mit geeigneten Zahlen n', n'' $(n'' \leq n', n'' \leq n, n' \leq m)$. Durch $V(A, B)$ wird also verlangt, daß Zeilenstücke der Transformation $\mathfrak{B}$ sich mit vorgeschriebenem Faktor durch Zeilenstücke der Transformation $\mathfrak{A}$ abschätzen lassen. Mit hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit von $V(A, B)$ werden wir uns in § 3 beschäftigen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Hauptsatz zu formulieren. Dabei wollen wir statt der $\mathfrak{A}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_\nu$ allgemeiner eine beliebige Größenordnung der $\mathfrak{A}$-Transformation zulassen. Dies wird keinerlei Mehraufwand bei den Beweisen erfordern.

Satz I. *Die Matrizen A und B seien normal, und es gelte $M(A)$, $Sp_0(A)$ und $V(A, B)$. Die Transformation $\mathfrak{B}$ sei permanent.*

Notwendig und hinreichend dafür, daß aus

(S) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad bzw. \quad \sigma_n = O(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$ [5])

stets die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:

$(\overline{F})$ *Es gilt die Darstellung*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \bar{\varepsilon}_\nu - \bar{\varepsilon}_{\nu+1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < +\infty$$

[4]) Vgl. [12].

[5]) Das Zeichen „$\nearrow$“ („$\searrow$“) bedeutet: wächst (fällt) monoton im weiteren Sinn.

oder auch (falls die folgende Darstellung konvergiert)

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu}, \quad \textit{mit passendem } \alpha;$$

$$(\overline{G}) \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}} \quad \textit{bzw.} \quad (\overline{g}) \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}.$$

Zusatz. Die Voraussetzung $Sp_0(A)$ kann ersetzt werden durch

$$(3) \qquad a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest.}$$

Eine Variante von Satz 1 ist

Satz 2. *Voraussetzungen wie bei Satz 1 (bzw. Zusatz). Notwendig und hinreichend dafür, daß aus (S) stets die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit*[6]*) der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt, sind die Bedingungen $(\overline{F})$ und $(\overline{G})$.*

Die Beweise dieser beiden Sätze erbringen wir in § 2.

Neben $V(A, B)$ kann man auch die nachstehende Bedingung $V'(A, B)$ betrachten:

1°. Aus $\sigma_n = O(\eta_n)$ folgt stets $\tau_n = O(\eta_n)\dfrac{b_{nn}}{a_{nn}}$ $(0 < \eta_n \nearrow)$;

2°. Zu jedem k und n gibt es ein ϱ $(k \le \varrho \le n)$, so daß gleichmäßig für $k \le n$ die Abschätzung

$$\sum_{\mu=0}^{k} \left| \Delta_\mu \left(\frac{\bar{a}_{k\mu} b_{n\mu}}{a_{\varrho\mu}} \right) \right| = O(1) \qquad \left(\Delta_\mu \left(\frac{\bar{a}_{k\mu} b_{n\mu}}{a_{\varrho\mu}} \right) = \frac{\bar{a}_{kk} b_{nk}}{a_{\varrho k}} \quad \text{für} \quad \mu = k \right)$$

besteht. (Natürlich ist hierbei $a_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \le n$ anzunehmen.) Es gilt dann

Satz 3. *Ersetzt man in den Sätzen 1 und 2 die Voraussetzung $V(A, B)$ durch $V'(A, B)$, so bleiben diese (mit Zusatz) wörtlich richtig.*

Die Voraussetzungen $V(A, B)$ und $V'(A, B)$ sind eng miteinander verwandt; z. B. sind die hinreichenden Bedingungen für $V(A, B)$ von § 3 im wesentlichen auch hinreichend für $V'(A, B)$. Uns schien jedoch die Bedingung $V(A, B)$ einfacher und natürlicher, deshalb wollen wir sie im folgenden bevorzugen.

2. Beweis des Hauptsatzes.

2.1. Wir beschäftigen uns zuerst mit dem notwendigen Teil des Beweises.

Lemma 1. *Die Matrizen A und B seien normal, und es gelte $Sp_0(A)$, $Sp_1(\bar{B})$. (Zusatz wie bei Satz 1.)*

Dann sind die Bedingungen $(\overline{F})$ und $(\overline{G})$ bzw. $(\overline{g})$ notwendig für den in Satz 1 beschriebenen Sachverhalt.

Beweis. a) Die Notwendigkeit der Bedingung $(\overline{F})$. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [16], Satz 3.6 bzw. [11], Lemma 16. Ohne Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel kann man auch folgendermaßen schließen: Ist

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} \bar{b}_{n\nu} \bar{a}'_{\nu\mu} \bar{\varepsilon}_\nu \qquad \left(a_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \bar{a}'_{\nu\mu} \sigma_\mu \right)$$

[6]) Das heißt, wenn die $\mathfrak{B}$-Transformation der Reihe beschränkt ist.

konvergent für $n \to \infty$ und jede Nullfolge σ_ν/η_ν, dann gibt es nach dem Satz von TOEPLITZ (vgl. die Formulierung dieses Satzes bei [13], Lemma 6) eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n \eta_n| < \infty$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu \sigma_\mu$$

ist. Setzt man hier $a_k = 1$, $a_{k+1} = -1$, $a_\nu = 0$ sonst — was wegen $Sp_0(A)$ erlaubt ist — und benutzt $Sp_1(\bar{B})$; so ergibt sich gerade die Darstellung $(\bar{F})$. Im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$ ist $(\bar{F})$ erst recht notwendig, da die Klasse der zugelassenen Reihen nicht kleiner geworden ist.

b) Die Notwendigkeit der Bedingungen $(\bar{G})$ bzw. $(\bar{g})$. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [11], Lemma 16. Wenn (4) für jede Nullfolge σ_ν/η_ν konvergieren soll, so muß wieder nach dem Satz von TOEPLITZ der Koeffizient von σ_n/η_n beschränkt bleiben, d. h.

$$\eta_n \bar{b}_{nn} \bar{a}'_{nn} \bar{\varepsilon}_n = O(1) \qquad \left(\bar{a}'_{nn} = \frac{1}{\bar{a}_{nn}} = \frac{1}{a_{nn}}, \qquad \bar{b}_{nn} = b_{nn}\right).$$

Dies ist aber gerade die Bedingung $(\bar{G})$. Entsprechend schließt man im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$.

Der notwendige Teil von Satz 2 wird durch das folgende Lemma auf den notwendigen Teil von Satz 1 zurückgeführt.

Lemma 2. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $M(A)$, $Sp_0(A)$, $Sp_1(\bar{B})$. (Zusatz wie bei Satz 1.)*

Wenn aus $\sigma_n = o(\eta_n)$ (oder sogar aus $\sigma_n = O(\eta_n)$) stets die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt, so hat $\sigma_n = o(\eta_n)$ sogar die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit dieser Reihe zur Folge.

Der Beweis von Lemma 2 ergibt sich aus einer leichten Verallgemeinerung von Satz 3 und Lemma 4 bei [13]:

Lemma 3. *Die Matrix A sei normal und erfülle $M(A)$ und $Sp_0(A)$. Für B gelte*

$$b_{n\nu} \to \beta_\nu \quad \text{für} \quad n \to \infty, \ \nu \text{ fest}.$$

Wenn aus $\sigma_n = o(1)$ stets $\tau_n = O(1)$ folgt, dann folgt aus $\sigma_n = o(1)$ sogar die Konvergenz von τ_n. (Wenn $\beta_\nu = 0$ ist, so ist $\tau_n = o(1)$.)

Lemma 2 ergibt sich, wenn wir für A die Matrix $(a_{n\nu}/\eta_n)$ und für B die Matrix $(\bar{b}_{n\nu}\bar{\varepsilon}_\nu)$ nehmen.

2.2. Die beiden folgenden Lemmata dienen zur Vorbereitung für den hinreichenden Teil des Beweises.

Lemma 4. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $M(A)$ und $Sp_0(A)$. (Zusatz wie bei Satz 1.) Die Transformation $\mathfrak{B}$ sei permanent.*

Dann ist die Bedingung $(\bar{F})$ notwendig und hinreichend dafür, daß aus (S) stets die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt.

Dies ist eine einfache Erweiterung von [16], Satz 5.3 bzw. [11], Lemma 15. (Wir werden nur den hinreichenden Teil benötigen.)

Lemma 5. *Voraussetzungen wie bei Lemma 4. Notwendig und hinreichend dafür, daß aus* $\sigma_n = o(\eta_n)$ *stets die* $\mathfrak{B}$*-Beschränktheit oder* $\mathfrak{B}$*-Summierbarkeit von* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *folgt, sind die Bedingungen* $(\overline{F})$ *und*

$(\overline{G}_1)$: $s_n \bar{\varepsilon}_n$ *ist stets* $\mathfrak{B}$*-beschränkt, wenn* $\sigma_n = o(\eta_n)$ *ist.*

Notwendig und hinreichend dafür, daß aus $\sigma_n = O(\eta_n)$ *stets die* $\mathfrak{B}$*-Beschränktheit bzw.* $\mathfrak{B}$*-Summierbarkeit von* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *folgt, sind die Bedingungen* $(\overline{F})$ *und*

$(\overline{G}_2)$: $s_n \bar{\varepsilon}_n$ *ist stets* $\mathfrak{B}$*-beschränkt bzw.* $\mathfrak{B}$*-limitierbar, wenn* $\sigma_n = O(\eta_n)$ *ist.*

(Wir werden nur den hinreichenden Teil von Lemma 5 brauchen.)

Beweis. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [12], Satz 9 (dort ohne Beweis). Die Bedingung $(\overline{F})$ ist in allen Fällen notwendig nach Lemma 1, Teil a) bzw. Lemma 2. Durch partielle Summation erhält man

$$(5) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = s_n \bar{\varepsilon}_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Wird $(\overline{F})$ vorausgesetzt, so ist nach Lemma 4 (mit $\mathfrak{B}$ = Konvergenz) der Ausdruck II sogar konvergent. Im Falle $\sigma_n = o(\eta_n)$ genügt nach Lemma 2 die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit von (5), so daß $(\overline{F})$ mit $(\overline{G}_1)$ zusammen notwendig und hinreichend ist. Im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$ erkennt man unmittelbar $(\overline{G}_2)$ als die noch fehlende Bedingung.

2.3. Wir erbringen nun den hinreichenden Teil des Beweises. Nach Lemma 5 genügt es, die $\mathfrak{B}$-Transformation von $s_n \bar{\varepsilon}_n$ zu betrachten:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \bar{\varepsilon}_n \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta \bar{\varepsilon}_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu \\ \qquad = \mathrm{I} + \mathrm{II}. \end{cases}$$

Zur Abschätzung von I benutzen wir die folgende einfache Bemerkung, die gleichzeitig die Bedeutung von $V(A, B)$ beleuchtet.

Lemma 6. *Die Matrix A sei normal, und es gelte* $M(A)$ *und* $V(A, B)$. *Dann folgt aus*

$$\sigma_n = O(\eta_n) \quad \text{stets} \quad \tau_n = O(\eta_n) \frac{b_{nn}}{a_{nn}}$$

(und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern).

Beweis. Es ist nach Voraussetzung

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = O(1) \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \sum_{\nu=0}^{n''} a_{n'\nu} s_\nu = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O(\eta_n).$$

(Eine derartige Abschätzung läßt sich nach [11], Lemma 11 bzw. § 2.2 nicht verbessern. Die Beweismethode ist die gleiche wie bei Lemma 1, Teil b).)

Nach Lemma 6 folgt aus (S) und $(\overline{G})$ bzw. $(\overline{g})$

$$\mathrm{I} = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} = O(1)$$

bzw.

$$= o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} = o(1).$$

Weiter gilt wegen $(\overline{F})$

$$\mathrm{II} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\varrho=\nu}^{\infty}\alpha_\varrho\, a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu = \sum_{\varrho=0}^{\infty}\alpha_\varrho\sum_{\nu=0}^{k} a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu \qquad \text{mit} \qquad k = \mathrm{Min}\,(\varrho, n-1).$$

Der Ausdruck II wird konvergent sein, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu = O(\eta_\varrho) \tag{7}$$

gleichmäßig in ϱ, n ist. Denn die linke Seite von (7) strebt wegen $Sp_0(B)$ bei festem ϱ gegen 0 für $n\to\infty$. Durch Anwendung von $M(A)$ läßt sich (7) reduzieren auf

$$\sum_{\nu=0}^{k'} a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu = O(\eta_{k'}) \quad \text{gleichmäßig für} \quad k' < n. \tag{8}$$

Die Abschätzung (8) folgt aber aus $V(A, B)$ und $M(A)$:

$$\sum_{\nu=0}^{k'} a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu = \mathfrak{O}(1)\sum_{\nu=0}^{k'}|b_{k'\nu}|\,\eta_{k'} = O(\eta_{k'}).$$

Damit sind die Bedingungen $(\overline{G}_1)$ bzw. $(\overline{G}_2)$ erfüllt und somit nach Lemma 5 die Sätze 1 und 2 bewiesen.

Wenn wir noch einmal den Beweis durchgehen, so stellen wir fest, daß die Voraussetzung $V(A, B)$ nur an zwei Stellen zur Geltung kam, einmal bei Lemma 6 und dann wesentlich beim Beweis der Abschätzung (8).

An diese Bemerkung läßt sich leicht ein Beweis von Satz 3 anschließen. Es genügt zu zeigen, daß die Abschätzung (8) aus $V'(A, B)$ und $M(A)$ folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{k'} a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}s_\mu = \sum_{\mu=0}^{k'}\bar{a}_{k'\mu}\,b_{n\mu}s_\mu \quad (k' < n)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k'}\frac{\bar{a}_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}a_{\varrho'\mu}s_\mu = \sum_{\mu=0}^{k'}{}'\,\Delta_\mu\left(\frac{\bar{a}_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}\right)\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\varrho'\nu}s_\nu$$

$$= O(1)\sum_{\mu=0}^{k'}\left|\Delta_\mu\left(\frac{\bar{a}_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}\right)\right|\cdot\eta_{k'} = O(\eta_{k'}).$$

3. Diskussion der Voraussetzungen.

Wir werden uns jetzt mit hinreichenden Bedingungen für die im Hauptsatz auftretenden Voraussetzungen, besonders für $V(A, B)$ beschäftigen. Dabei wird sich zeigen, daß die beiden schon behandelten Spezialfälle unseres Problems in Satz 1 enthalten sind. Darüber hinaus werden wir aber leicht nachzuprüfende Bedingungen erhalten, die weitere Anwendungen ermöglichen.

3.1. Ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$, so ist die entsprechende Bedingung $V(A, A)$ stets erfüllt ($n''=n$, $n'=m$). Die in Satz 1 geforderten Voraussetzungen lauten: permanent, normal, $M(A)$. Die Bedingung $(\overline{G})$ folgt aus $(\overline{F})$, wenn η_n beschränkt bleibt. Ist η_n nicht beschränkt, so bedeutet $(\overline{G})$, daß $(\overline{F})$ mit $\alpha=0$ gelten soll. Die Bedingung $(\bar{g})$ bedeutet immer, daß $(\overline{F})$ mit $\alpha=0$ gelten soll. Das Ergebnis der Sätze 1 und 2 stellt also in dem Fall $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$ eine leichte Verallgemeinerung von [*12*], Satz 11 dar.

Ist $\mathfrak{B}\geqq\mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{B}$ nicht schwächer als $\mathfrak{A}$ (Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ wie oben), so ist $(\overline{F})$ nach § 2.1 jedenfalls notwendig. Wenn $\alpha=0$ ist, so ist $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ nach den eben angestellten Überlegungen $\mathfrak{A}$-summierbar, also erst recht $\mathfrak{B}$-summierbar. An die Stelle der Bedingungen $(\overline{G})$ bzw. $(\bar{g})$ tritt dann die Forderung, daß $\bar{\varepsilon}_\nu=\alpha$ auch zulässige Faktoren sein müssen. Im Falle $\sigma_n=o(1)$ sind z.B. beliebige α zulässig. Die Behauptungen der Sätze 1 bis 3 bleiben in der alten Form richtig, wenn B normal ist und die obige Forderung in den sowieso notwendigen Bedingungen $(\overline{G})$ bzw. $(\bar{g})$ enthalten ist.

Bedeutet $\mathfrak{B}$ die Konvergenz, so ist die entsprechende Bedingung $V(A, E)$ wieder von selbst erfüllt:

$$|a_{n''n}s_n|=\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_{n\nu}s_\nu-\sum_{\nu=0}^{n-1}a_{n\nu}s_\nu\right|\leq K\left|\sum_{\nu=0}^{n''}a_{n\nu}s_\nu\right|.$$

Die in Satz 1 geforderten Voraussetzungen lauten: A normal, $M(A)$, $S\not\rightarrow_0(A)$. Das Ergebnis der Sätze 1 und 2 stellt in diesem Fall eine leichte Verallgemeinerung von [*12*], Satz 10 dar.

3.2. Wir werden jetzt hinreichende Bedingungen für $V(A, B)$, ausgedrückt durch die Matrixelemente, angeben:

Satz 4. *Hinreichend für $V(A, B)$ sind*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\Delta_\nu\frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}}\right|=O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right)\quad\textit{gleichmäßig für}\quad n\leq m \tag{9}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\Delta_\nu\frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}}\right|+\left|\frac{b_{mn}}{b_{nn}}\right|=O(1)\quad\textit{gleichmäßig für}\quad n\leq m. \tag{10}$$

Statt (10) *kann auch*

$$\frac{b_{mn}}{a_{mn}}=O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}}\right)\quad\textit{gleichmäßig in}\quad n\leq m'\leq m \tag{11}$$

gefordert werden. (Natürlich ist $a_{n\nu}\neq 0$, $b_{n\nu}\neq 0$ für $\nu\leq n$ anzunehmen.)

Zusatz. Die Bedingungen (9), (10) oder (11) sind z.B. erfüllt, wenn die folgenden entsprechend numerierten Bedingungen gelten:

$$(9') \qquad 0 \leq \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \nearrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leq \nu \leq m);$$

$$(10') \qquad \frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}} \quad \text{monoton in } \nu \text{ und beschränkt } (\nu \leq n \leq m);$$

$$(11') \qquad 0 \leq \frac{b_{mn}}{a_{mn}} \searrow \quad \text{für} \quad m \nearrow \qquad (n \leq m).$$

Beweis. Es ist bei vorgegebenen Zahlen $n \leq m' \leq m$ wegen (9)

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{m\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{m'\nu}}{a_{m'\nu}} \frac{b_{m\nu}}{b_{m'\nu}} a_{m'\nu} s_\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \left(\frac{b_{m'\nu}}{a_{m'\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu + \frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu$$

$$= O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \right) \sum_{\mu=0}^{n'} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu \qquad (n' \leq n)$$

und weiter wegen (10)

$$\sum_{\mu=0}^{n'} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu = \sum_{\mu=0}^{n'-1} \Delta_\mu \left(\frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} \right) \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{m'\nu} s_\nu + \frac{b_{mn'}}{b_{m'n'}} \sum_{\nu=0}^{n'} a_{m'\nu} s_\nu$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{n''} a_{m'\nu} s_\nu \qquad (n'' \leq n).$$

Wird (9) und (11) vorausgesetzt, so kann man folgendermaßen schließen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} a_{m\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \left(\frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{m\mu} s_\mu + \frac{b_{mn}}{a_{mn}} \sum_{\mu=0}^{n} a_{m\mu} s_\mu$$

$$= O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}} \right) \sum_{\mu=0}^{n''} a_{m\mu} s_\mu \qquad (n'' \leq n)$$

$$= O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \right) \sum_{\nu=0}^{n''} a_{m\nu} s_\nu .$$

Kombiniert man Satz 4 mit den hinreichenden Bedingungen für $M(A)$ bei [12], Satz 1, so entstehen einfache hinreichende Bedingungen für die Voraussetzungen von Satz 1. Auf diese Weise erhalten wir z.B. den folgenden Satz, dessen Voraussetzungen so formuliert sind, wie sie bei Anwendungen am handlichsten sind.

Satz 5. *Die Transformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien permanent. Es sei*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\Delta_\nu \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}}\right| = O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right) \quad \textit{gleichmäßig für} \quad n \leq m \tag{9}$$

oder spezieller

$$0 \leq \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \nearrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leq \nu \leq m). \tag{9'}$$

Weiter gelte

$$\frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}} \quad \textit{monoton in } \nu \textit{ und beschränkt} \quad (\nu \leq n \leq m) \tag{10'}$$

und

$$0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K, \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \textit{ für } \nu \nearrow \quad (\nu \leq n \leq m). \tag{12}$$

(Natürlich ist $a_{n\nu} \neq 0$, $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leq n$ anzunehmen.)

Genau dann geht jede $\mathfrak{A}$-summierbare bzw. $\mathfrak{A}$-beschränkte Reihe $\sum a_\nu$ in eine $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ über, wenn gilt

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu}, \qquad (\alpha \textit{ beliebig}, \quad \sum|\alpha_n| < \infty) \tag{13}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right). \tag{14}$$

Zusatz. Allgemeiner kann die $\mathfrak{A}$-Summierbarkeit bzw. $\mathfrak{A}$-Beschränktheit durch die Bedingung (S) mit einer beliebigen Größenordnung η_n ersetzt werden, und, statt der Permanenz von $\mathfrak{A}$ genügt die Bedingung $S\mathfrak{p}_0(A)$ oder

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \ \nu \text{ fest}. \tag{15}$$

Ein entsprechender Satz gilt auch für $\mathfrak{B}$-Beschränktheit.

Der Zusatz ist von Bedeutung für Matrizen der Form $a_{n\nu} = \frac{z_{n\nu}}{g_n}$. Es wird vorkommen, daß auch die „Zählermatrix" $(z_{n\nu})$ die Voraussetzungen des Satzes an Stelle von $(a_{n\nu})$ erfüllt, wenn man sich auf solche Größenordnungen η_n beschränkt, für die (15) gilt. Die Bedingung (S) für $(z_{n\nu})$ bedeutet aber nichts anderes, als

$$\sigma_n = o\left(\frac{\eta_n}{g_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad O\left(\frac{\eta_n}{g_n}\right),$$

so daß man auf diese Weise auch die Summierbarkeit mit bestimmten Geschwindigkeiten untersuchen kann.

3.3. Die Bedingungen des Satzes 5 sind bei Anwendungen verhältnismäßig leicht zu prüfen mit alleiniger Ausnahme von (13) oder allgemein von $(\overline{F})$. Die Untersuchung von $(\overline{F})$ kann oft durch folgenden Satz erleichtert werden:

Satz 6. *Die Matrix B sei normal, und es gelte $Sp_0(B)$. Weiter sei.*

$$O(B) \leqq O(A), \qquad d.h.\ aus\ \tau_n = O(1)\ folgt\ stets\ \sigma_n = O(1). \tag{16}$$

Dann folgt aus der Darstellung

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}, \quad mit \quad \sum |\alpha_n \eta_n| < \infty$$

auch eine Darstellung der Form

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \beta_k b_{k\nu}, \quad mit \quad \sum |\beta_k \eta_k| < \infty.$$

Zusatz. Statt $Sp_0(B)$ genügt: $b_{k\nu} = O(\eta_k)$ für $k \to \infty$, ν fest.

Beweis[7]). Da B normal ist, kann man $A = CB$ setzen mit $C = (c_{nk})$. Aus (16) folgt nach dem Satz von TOEPLITZ

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| = O(1),$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |\alpha_n|\,|c_{nk}|\,\eta_k = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |c_{nk}|\,\eta_k = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|\, O(\eta_n) < \infty. \tag{17}$$

Wegen (17) und $Sp_0(B)$ ist die folgende Summationsvertauschung erlaubt

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=\nu}^{n} c_{nk} b_{k\nu}$$

$$= \sum_{k=\nu}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n c_{nk} \right) b_{k\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \beta_k b_{k\nu}.$$

Dabei ist nach (17)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|\,\eta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n c_{nk} \right| \eta_k$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |\alpha_n|\,|c_{nk}|\,\eta_k < \infty,$$

womit die gewünschte Darstellung gefunden ist. Der Zusatz kann leicht bestätigt werden.

Es wird auch Fälle geben, in denen man unmittelbar sieht, daß die Bedingung $(\bar{F})$ erfüllt ist. Von Interesse ist z.B. der triviale Fall, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = 1$, $\alpha_n = 0$ ist. Wenn etwa $0 < \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \nearrow$ ist, so kann man $\eta_n = \frac{a_{nn}}{b_{nn}}$ setzen und erhält aus den Sätzen 1 und 2 gewisse Vergleichssätze zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (vgl. hierzu Lemma 6).

[7]) Vgl. hierzu [11], § 3.2.

4. Anwendungen auf bewichtete arithmetische Mittel und Nörlundverfahren.

In diesem und im folgenden Paragraphen wollen wir Satz 5 auf einige spezielle Verfahren anwenden. Wir haben bei den bisherigen Sätzen stets die Gesamtheit der Summierbarkeitsfaktoren aufgestellt. Im folgenden werfen wir auch die Frage nach speziellen (angebbaren) Faktoren auf. Hier interessieren naturgemäß die „größten" Faktoren, d.h. Faktoren welche die zulässige Größenbeschränkung erreichen.

Wir betrachten zunächst bewichtete arithmetische Mittel $M(p_n)$ und NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$:

$$M(p_n): \qquad \sigma_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ P_n \to \infty\right),$$

$$N(p_n): \qquad \sigma_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ \frac{p_n}{P_n} \to 0\right).$$

4.1. Satz 7. *Für die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ gelte*

(18) $\qquad \frac{p_n}{q_n}$ *monoton für $n \geq n_0$ und beschränkt.*

Genau dann geht jede $M(p_n)$-summierbare bzw. $M(p_n)$-beschränkte Reihe $\sum a_\nu$ in eine $M(q_n)$summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ über, wenn gilt

$$(19) \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{P_n - P_{\nu-1}}{P_n} \qquad (\alpha \text{ beliebig},\ \textstyle\sum |\alpha_n| < \infty,\ P_{-1} = 0)$$

und

$$(20) \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right) \quad bzw. \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right).$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$a_{n\nu} = p_\nu, \qquad b_{n\nu} = \frac{q_\nu}{Q_n}, \qquad 0 < \eta_n \nearrow + \infty.$$

Die (19) entsprechende Bedingung lautet dann

$$(21) \qquad \Delta\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n p_\nu \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum |\alpha_n \eta_n| < \infty.$$

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß die Bedingungen (9), (10') und (12) von Satz 5 erfüllt sind.

Es ist von Bedeutung, daß sich die Bedingung (19) bzw. (21) leicht nach α_n auflösen läßt:

Lemma 7. *Es sei* $p_\nu > 0$, $P_n \to \infty$, $0 < \eta_n \nearrow$. *Dann ist die Bedingung* (21) *völlig gleichbedeutend mit*

$$\sum \eta_\nu \left| \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \right) \right| < \infty, \qquad \bar{\varepsilon}_n = o(P_n). \tag{22}$$

Hinreichend für (21) *oder* (22) *sind*

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \text{ monoton für } \nu \geq \nu_0 \tag{23}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_\nu = O(1), \qquad \eta_\nu - \eta_{\nu-1} = O(p_\nu)\ ^{6}). \tag{24}$$

Zusatz. Die Bedingung (23) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \bar{\varepsilon}(\lambda_\nu)$, $P_\nu = P(\lambda_{\nu+1})$ ist, wobei $0 \leq \lambda_\nu \nearrow + \infty$ und $\bar{\varepsilon}(x)$, $P(x)$ beides L-Funktionen im Sinne von HARDY [6], S. 17 sein sollen. Die zweite Bedingung von (24) ist z.B. erfüllt für $\eta_n = P_n$.

Beweis. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß (21) mit

$$\sum \eta_\nu \left| \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \right) \right| < \infty, \qquad \Delta \bar{\varepsilon}_\nu = o(p_\nu) \tag{25}$$

äquivalent ist. Aus (25) folgt sofort (22), aber es gilt auch die Umkehrung. Denn aus dem ersten Teil von (22) folgt schon die Konvergenz von $\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}$; der Grenzwert kann aber nach dem zweiten Teil nur 0 sein.

Daß (23) und (24) hinreichend sind, erkennt man folgendermaßen: Wegen (23) genügt es zu zeigen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\eta_\nu} \right) = O(1).$$

Aus (23) und (24) folgt zunächst $\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \to 0$, so daß wir o.B.d.A. $0 \leq \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \searrow$ annehmen können. Daraus folgen die Abschätzungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} O(\Delta \bar{\varepsilon}_\nu) = O(1) \tag{26}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \geq \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_n}{p_n} \left(\sum_{1}^{n} \eta_\nu - \eta_{\nu-1} \right)$$

und aus beiden zusammen

$$\eta_n \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_n}{p_n} = O(1). \tag{27}$$

Damit gilt nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\eta_\nu} \right) = O(1) - \eta_n \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}}{p_{n+1}} + \sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}$$

$$= O(1), \quad \text{q. e. d.}$$

---

[6]) Vgl. [9], Satz 1 und 3.

Der Zusatz folgt durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf

$$-\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}=\frac{\bar{\varepsilon}(\lambda_{\nu+1})-\bar{\varepsilon}(\lambda_\nu)}{P(\lambda_{\nu+1})-P(\lambda_\nu)}.$$

Satz 8. *Voraussetzungen wie bei Satz 7. Außerdem sei*

$$\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}\ \textit{monoton für}\ \nu\geq\nu_0,\qquad \bar{\varepsilon}_n=O\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{28}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ $M(q_n)$-summierbar für jede $M(p_n)$-summierbare Reihe $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (28) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu=\frac{p_\nu}{q_\nu}\frac{Q_\nu}{P_\nu}$ und P_ν, Q_ν L-Funktionen von ν sind.

Allgemeiner kann man betrachten:

$$a_{n\nu}=p_\nu,\qquad b_{n\nu}=\frac{q_\nu}{Q_n},\qquad \bar{\varepsilon}_\nu=\frac{p_\nu}{q_\nu}\frac{Q_\nu}{\eta_\nu}.$$

Der Beweis folgt aus Satz 7 und Lemma 7 ($\eta_n=P_n$).

4.2. Satz 9. *Für die* NÖRLUND*-Verfahren $N(p_n)$ und $N(q_n)$ gelte*

$$0<p_n\searrow,\quad \frac{p_{n+1}}{p_n}\nearrow\quad \textit{für}\quad 0\leq n\nearrow, \tag{29}$$

$$0<q_n\searrow,\quad \frac{q_{n+1}}{q_n}\nearrow\quad \textit{für}\quad 0\leq n\nearrow, \tag{30}$$

$$\frac{q_n}{p_n}\ \textit{monoton für}\ n\geq n_0\ \textit{und beschränkt}. \tag{31}$$

Genau dann geht jede $N(p_n)$-summierbare bzw. $N(p_n)$-beschränkte Reihe $\sum a_\nu$ in eine $N(q_n)$-summierbare Reihe $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ über, wenn gilt

$$\bar{\varepsilon}_\nu=\alpha+\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\frac{P_{n-\nu}}{P_n}\qquad (\alpha\ \textit{beliebig},\ \textstyle\sum|\alpha_n|<\infty) \tag{32}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n=O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)\quad \textit{bzw.}\quad \bar{\varepsilon}_n=o\left(\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{33}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$a_{n\nu}=p_{n-\nu},\qquad b_n=\frac{q_{n-\nu}}{Q_n},\qquad 0<\eta_n\nearrow+\infty.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß die Bedingungen (9), (10′) und (12) von Satz 5 erfüllt sind.

In Satz 9 ist als Spezialfall ein von I. SCHUR [18] angegebener, von BOSANQUET [3] und KNOPP [14] bewiesener Satz über CESÀROsche Verfahren enthalten, allerdings nur für Ordnungen zwischen 0 und 1. Wir setzen etwa $N(p_n)=C_\alpha$, $N(q_n)=C_\beta$ mit $0\leq\beta\leq\alpha\leq 1$. Die Voraussetzungen von Satz 9 sind dann erfüllt. Die Bedingung (32) kann in diesem Fall durch die nach α_n

aufgelöste Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}|\Delta^{\alpha+1}\bar{\varepsilon}_n| < +\infty \tag{32'}$$

ersetzt werden (vgl. [16], S. 40ff.). Die (32) entsprechende Bedingung im Falle des Zusatzes würde lauten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^{\alpha+1}\bar{\varepsilon}_n| < +\infty.$$

Satz 10. *Voraussetzungen wie bei Satz 9. Außerdem sei*

$$\Delta\bar{\varepsilon}_\nu \quad \textit{monoton für} \quad \nu \geq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{34}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ $N(q_n)$*-summierbar für jede* $N(p_n)$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (34) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{Q_\nu}{P_\nu}$ und P_ν, Q_ν L-Funktionen von ν sind. Allgemeiner kann man betrachten:

$$a_{n\nu} = p_{n-\nu}, \qquad b_{n\nu} = \frac{q_{n-\nu}}{Q_n}, \qquad \bar{\varepsilon}_n = \frac{Q_n}{\eta_n}.$$

Zum Beweis brauchen wir nach Satz 9 nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingungen (32) erfüllt. Wegen $O(N(p_n)) \subseteqq O(C_1)$ (vgl. [13], S. 175) genügt es nach Satz 6, wenn

$$\Delta\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n} \quad \text{mit} \quad \sum|\alpha_n| < \infty$$

ist und dies ist nach Lemma 7 ($p_\nu = 1$, $\eta_n = P_n$) der Fall.

Für $N(p_n) = C_\alpha$, $N(q_n) = C_\beta$ mit $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ erhält man aus Satz 10 die bekannten Faktoren $\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha-\beta}}$ (Riesz [17], Chapman [5], Hardy-Riesz [8], th. 48, Hardy [7], th. 76, Zygmund [19], Bosanquet [4]).

Man könnte noch die Fälle $A = N(p_n)$, $B = M(q_n)$ und $A = M(p_n)$, $B = N(q_n)$ untersuchen, was wir jedoch dem Leser überlassen wollen.

5. Anwendungen auf Rieszsche Mittel.

5.1. Wir gehen zu Anwendungen auf (unstetige) Rieszsche Mittel $R_\lambda^\varkappa$ über, die durch

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa s_\nu = \frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa a_\nu \tag{35}$$

mit

$$0 \leq \lambda_n \to \infty, \qquad \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \qquad 0 \leq \varkappa \leq 1 \tag{36}$$

definiert sind[9]). Zur Abkürzung sei $\Lambda_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$.

[9]) Die stetigen Rieszschen Mittel, bei denen in (35) statt λ_{n+1} ein stetiger Parameter ω vorkommt, sind mit den unstetigen Mitteln nach [10], Satz 2 äquivalent. Daher sind in den folgenden Sätzen auch die entsprechenden Ergebnisse für die stetigen Rieszschen Mittel enthalten.

Satz 11. *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$.

Genau dann geht jede $R_\lambda^{\varkappa'}$*-summierbare bzw.* $R_\lambda^{\varkappa'}$*-beschränkte Reihe* $\sum a_\nu$ *in eine* $R_\lambda^{\varkappa}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *über, wenn gilt*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa'} \qquad (\alpha \text{ beliebig}, \ \sum |\alpha_n| < \infty) \tag{37}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right). \tag{38}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$\bar{a}_{n\nu} = (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty.$$

Der Beweis für $\varkappa = 0$ ergibt sich unmittelbar aus § 3.1 (vgl. [12], Satz 13). Ist $\varkappa > 0$, so sind die Bedingungen (9′), (10′) und (12) von Satz 5 erfüllt. Wegen (9′) vergleiche man [13], Satz 9. [Bei der dortigen Formel (81) muß es im Nenner richtig heißen $\lambda_{n+1}^{\varkappa'-\varkappa}$.] Wegen (10′) bzw. (12) vergleiche man [12], § 3.2.

Für $\lambda_n = n$ erhalten wir durch Satz 11 eine weitere Darstellung der Summierbarkeitsfaktoren für die CESÀROschen Mittel. Für $\varkappa = 1$ ist die Bedingung (37) nach α_n auflösbar, wie sich aus Lemma 7 ergibt.

Satz 12. *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ *und außerdem*

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \ \text{monoton für} \ \nu \geqq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right). \tag{39}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $R_\lambda^{\varkappa}$*-summierbar für jede* $R_\lambda^{\varkappa'}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (39) ist z. B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{1}{\Lambda_\nu^{\varkappa'-\varkappa}}$ und λ_ν eine L-Funktion von ν ist[10]). Allgemeiner kann man betrachten

$$\bar{a}_{n\nu} = (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \frac{\lambda_{\nu+1}^{\varkappa}}{\eta_\nu} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'-\varkappa}.$$

Zum Beweis brauchen wir nach Satz 11 nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingung (37) erfüllt. Wegen $O(R_\lambda^{\varkappa'}) \subseteq O(R_\lambda^1)$ genügt es nach Satz 6, wenn

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_{n+1}} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \quad \text{mit} \quad \sum |\alpha_n| < \infty$$

ist, und dies ist nach Lemma 7 ($p_\nu = \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu$, $\eta_n = P_n$) der Fall.

Für $\lambda_n = n$, d. h. für die CESÀROschen Mittel erhält man aus Satz 12 wieder die bekannten Faktoren $\frac{1}{(n+1)^{\varkappa'-\varkappa}}$.

5.2. Neben $R_\lambda^{\varkappa}$ betrachten wir jetzt noch ein anderes RIESZsches Mittel $R_\mu^{\varkappa} = R_{\Phi(\lambda)}^{\varkappa}$, das zu der Folge $\mu_n = \Phi(\lambda_n)$ gehört. Dabei soll die Funktion

[10]) Vgl. [9], Satz 3.

$\Phi(x)$ die folgenden Bedingungen für $x \geq x_0$ erfüllen:

$$\Phi(x) \to \infty, \qquad \Phi'(x) > 0; \tag{40}$$

(41) $\Phi''(x)$ festes Vorzeichen (d.h. gleichbleibend ≥ 0 oder ≤ 0);

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \quad \text{für} \quad x \nearrow; \tag{42}$$

$$x\,\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = O(1). \tag{43}$$

[Dabei ist (43) im Fall $\Phi''(x) \leq 0$ von selbst erfüllt.]

Diese Bedingungen sind z.B. erfüllt, wenn $\Phi(x)$ eine L-Funktion ist mit

$$\Phi(x) \to \infty, \quad \Phi(x) = O(x^{\Delta}) \quad \text{für genügend großes } \Delta. \tag{44}$$

(Vgl. [13], Satz 12.)

Satz 13. *Es gelte* $0 \leq \varkappa \leq 1$ *und* (40) *bis* (43).

Genau dann geht jede $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-summierbare bzw.* $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-beschränkte Reihe* $\sum a_\nu$ *in eine* $R^{\varkappa}_{\lambda}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *über, wenn gilt*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa} \qquad (\alpha \text{ beliebig}, \ \textstyle\sum |\alpha_n| < \infty) \tag{45}$$

und

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_n = O\left(\left(\dfrac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\dfrac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right) & \textit{bzw.} \\ \bar{\varepsilon}_n = o\left(\left(\dfrac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\dfrac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right). \end{cases} \tag{46}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf

$$\bar{a}_{n\nu} = (\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \quad 0 < \eta_n \nearrow +\infty.$$

Der Beweis ist für $\varkappa = 0$ trivial (bekanntes Konvergenzkriterium). Ist $\varkappa > 0$, so sind im Fall $\Phi''(x) \leq 0$ die Bedingungen (9), (10') und (12) von Satz 5 erfüllt. Wegen (9) vergleiche man [13], Lemma 8 und Satz 10, wegen (10') bzw. (12) vergleiche man [12], § 3.2. Im Falle $\Phi''(x) \geq 0$ sind $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$ und $R^{\varkappa}_{\lambda}$ äquivalent nach [13], Satz 11. Nach § 3.1 ist dann nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha$ zulässige Faktoren sind, wenn für $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingung (46) erfüllt ist. Dies ist aber der Fall, denn aus (46) folgt wegen (43) $\bar{\varepsilon}_\nu = O(1)$ bzw. $\bar{\varepsilon}_\nu = o(1)$.

Von Interesse ist der Spezialfall $\Phi(x) = \log x$ (logarithmische Mittel). Für $\varkappa = 1$ ist die Bedingung (45) nach α_n auflösbar, wie sich aus Lemma 7 ergibt.

Satz 14. *Voraussetzungen wie bei Satz 13. Außerdem sei*

$$\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{\Delta\Phi(\lambda_\nu)} \quad \textit{monoton für} \quad \nu \geq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right). \tag{47}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $R^{\varkappa}_{\lambda}$*-summierbar für jede* $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (47) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \left(\lambda_\nu \frac{\Phi'(\lambda_\nu)}{\Phi(\lambda_\nu)}\right)^\varkappa$ und $\Phi(x)$ eine L-Funktion ist. Allgemeiner kann man betrachten:

$$\bar{a}_{n\nu} = \left(\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)\right)^\varkappa, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa, \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \frac{(\lambda_\nu \Phi'(\lambda_\nu))^\varkappa}{\eta(\lambda_\nu)}.$$

Dem Beweis schicken wir ein Lemma voraus:

Lemma 8. *Voraussetzungen wie bei Satz 13. Dann gilt*

$$\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})} = O(1). \tag{48}$$

Ist außerdem

$$x^2 \frac{\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} \quad \textit{monoton für} \quad x \geq x_0, \tag{49}$$

so gilt auch

$$\lambda_n \frac{\Phi'(\lambda_n)}{\Phi(\lambda_n)} = O\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right). \tag{50}$$

Beweis. Wegen (41) ist $\Phi'(x)$ monoton ($x \geq x_0$) und folglich[11]) auch die Funktion $\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)}{\lambda_{n+1} - x}$, die daher zwischen den Grenzwerten für $x \to \lambda_{n+1}$ und $x \to x_0$ liegt. Setzt man $x = \lambda_n$ und berücksichtigt (43), so folgt (48). Auf die gleiche Weise beweist man (50) durch Betrachtung der Funktion

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(\lambda_n)}{x - \lambda_n} \frac{x}{\Phi(x)} = \frac{1 - \frac{\Phi(\lambda_n)}{\Phi(x)}}{1 - \frac{\lambda_n}{x}} \qquad (x > \lambda_n,\ n \geq n_0).$$

Der Beweis von Satz 14 verläuft jetzt völlig parallel zum Beweis von Satz 12, da wegen (48) $\bar{\varepsilon}_n = O(1)$ ist. Der Zusatz ergibt sich auch sofort, da wegen (50) die zweite Bedingung von (47) erfüllt ist.

Von Interesse ist der Spezialfall $\Phi(x) = \log x$, $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda_\nu)}$, in dem alle Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt sind (vgl. HARDY-RIESZ [8], th. 20).

Literatur.

[1] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [2] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors II. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 295—304 (1948). — [3] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors III. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). — [4] BOSANQUET, L. S.: Note on a theorem of M. RIESZ. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **1**, 453—461 (1951). — [5] CHAPMAN, S.: On non integral orders of summability of series and integrals. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **9**, 369—409 (1911). — [6] HARDY, G.H.: Orders of infinity, 2. Aufl. Cambridge 1924. — [7] HARDY, G. H.: Divergent series.

[11]) Wir benutzen folgende Tatsache: Sind die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ für $a \leq x \leq b$ differenzierbar, $f(b) = g(b) = 0$ [oder $f(a) = g(a) = 0$], $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $a < x < b$, so folgt aus $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ monoton für $a < x < b$, daß auch $\frac{f(x)}{g(x)}$ dort monoton ist. (Beweis: $\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}$ hat nach dem Mittelwertsatz festes Vorzeichen.)

Oxford 1949. — [8] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. — [9] JURKAT, W.: Über Konvergenzfaktoren bei RIESZschen Mitteln. Math. Z. **54**, 262—271 (1951). — [10] JURKAT, W.: Über RIESZsche Mittel mit unstetigem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1952). — [11] JURKAT, W.: Über RIESZsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Math. Z. **57**, 353—394 (1953). — [12] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [13] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [14] KNOPP, K.: Beweis eines von I. SCHUR in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. f. Math. **187**, 70—74 (1950). — [15] MOORE, C. N.: Summable series and convergence factors. New York 1938. — [16] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1951). — [17] RIESZ, M.: Sur les séries de Dirichlet. Compt. Rend. **148**, 1558—1560 (1909). — [18] SCHUR, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. f. Math. **151**, 79—111 (1921). — [19] ZYGMUND, A.: Über einige Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen. Bull. Acad. Polonaise (A) **1927**, 309—331.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 13. Dezember 1952.)

RICHERT, H.-E.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 204—218 (1953)

Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem.

Von
HANS-EGON RICHERT.

1. Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n, und wir setzen

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)\, x + \Delta(x). \tag{1}$$

Die VAN DER CORPUTSche Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen lieferte[1])

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{13}{40}}), \tag{2}$$

was das beste bisher bekannte Resultat in dieser Richtung zu sein scheint.

Die Ausdehnung dieser Methode auf Exponentialsummen mit Funktionen zweier Veränderlicher durch TITCHMARSH[2]) führte beim Kreisproblem[3]) und bei der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$[4]) zu Verbesserungen der früheren Ergebnisse.

Hier soll dieses zweidimensionale Analogon der VAN DER CORPUTSchen Methode auf das DIRICHLETsche Teilerproblem [Abschätzung von $\Delta(x)$] angewandt werden. Dabei sieht man sich im wesentlichen zwei Schwierigkeiten gegenüber. Einmal hat man bei dieser Methode zunächst diejenige Exponentialsumme, auf deren Abschätzung man das vorliegende Problem zurückgeführt hat, mit Hilfe der WEYLschen Idee (Hilfssätze 1 und 2) in eine solche, die sich besser als die ursprüngliche behandeln läßt, zu verwandeln. Dies geschieht beim Kreisproblem und auch beim Teilerproblem durch drei WEYLsche Schritte. Dabei werden die Abschätzungen um so besser, je öfter man bei dieser Überführung den Hilfssatz 2 an Stelle des Hilfssatzes 1 verwendet. Will man hierbei den Hilfssatz 2 wenigstens einmal benutzen, so kommt es darauf an, die HESSEsche Determinante einer gewissen Funktion möglichst gut nach unten abzuschätzen. Mit einmaliger Anwendung von Hilfssatz 2 konnte TITCHMARSH diese beim Kreisproblem als definit erkennen, und die Verbesserung seines Resultates durch HUA kam dadurch zustande, daß dieser

[1]) NIELAND, L. W.: Over eenige roosterpuntproblemen, Proefschrift Groningen, IV + 70 + III, 1 fig., Groningen, P. Noordhoff.

[2]) TITCHMARSH, E. C.: Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 485—500 (1934).

[3]) TITCHMARSH, E. C.: Proc. London Math. Soc. (2) **38**, 96—115 (1935). — HUA, L.-K.: Quart. J. Oxford **13**, 18—29 (1942).

[4]) TITCHMARSH, E. C.: Quart. J. Oxford **13**, 11—17 (1942). — MIN, S.-H.: Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 448—472 (1949).

die beim Kreisproblem nach zweimaliger Anwendung von Hilfssatz 2 entstehende HESSEsche Determinante noch als definit nachwies. Beim Teilerproblem ist jedoch die auftretende HESSEsche Determinante bereits im einfachsten Falle indefinit. Dadurch werden wir veranlaßt, ihre Nullstellen mit einer Streifenfolge zu umgeben, außerhalb deren wir positive untere Schranken angeben können, während wir im innersten Streifen nichts besseres als trivial abzuschätzen wissen. Dieser Weg wurde zuerst in der Arbeit von MIN, der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ mittels dieser Methode, eingeschlagen. Die zweite Schwierigkeit rührt von solchen Teilrechtecken des Hyperbelsektors, in welchen die Abschätzungen erfolgen, her, die von dem Hyperbelbogen getroffen werden. Beim Kreisproblem konnte TITCHMARSH in den entsprechenden Teilen trivial abschätzen. Dieses Vorgehen würde jedoch beim Teilerproblem nicht zu einer Verbesserung von (2) führen. Eine nichttriviale Abschätzung in diesen Gebieten gelingt mit Hilfssatz 5, der eine Verschärfung bzw. Verallgemeinerung zweier Hilfssätze von TITCHMARSH[5]) und MIN[6]) darstellt.

Auf diesem Wege werden wir

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{15}{31}} \log^{\frac{16}{31}} x) \tag{3}$$

beweisen können. Die Exponenten von x in (2) und (3) haben beide die Gestalt $\frac{t}{3t+1}$, und da diese Funktion im Bereich positiver t stark monoton wächst, liefert (3) wegen $15 < 27$ tatsächlich eine Verschärfung von (2).

2. $c_1, \ldots, c_{11}$ bezeichnen positive absolute Konstanten. Die auftretenden O-Konstanten sind ebenfalls absolut.

Wir schicken einige Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1[7]). *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine reelle Funktion von x_1 und x_2,*

$$S = \sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wobei die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) eines Gebietes G, das ganz in dem Rechteck $a_j \leq x_j \leq b_j$, $j = 1, 2$, gelegen ist, erstreckt wird. Ferner sei für natürliches ν

$$S_\nu = \sum \sum e^{2\pi i \{f(n_1, n_2+\nu) - f(n_1, n_2)\}},$$

worin über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) summiert wird, für die (n_1, n_2) und $(n_1, n_2+\nu)$ in G gelegen sind. Ist dann ϱ eine natürliche Zahl mit

$$1 \leq \varrho \leq b_2 - a_2, \tag{4}$$

so gilt

$$S = O\left(\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho} \sum_{1 \leq \nu \leq \varrho-1} |S_\nu|\right\}^{\frac{1}{2}}\right).$$

---

[5]) l. c. [3]) Lemma ζ.
[6]) l. c. [4]) Lemma 8.
[7]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma β'.

Hilfssatz 2[8]). *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine reelle Funktion von x_1 und x_2,*

$$S = \sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wobei die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) eines Gebietes G, das ganz in dem Rechteck $a_j \leq x_j \leq b_j$, $j = 1, 2$, gelegen ist, erstreckt wird. Ferner seien für ganze Zahlen v_1, v_2

$$S' = \sum \sum e^{2\pi i \{f(n_1+v_1, n_2+v_2) - f(n_1, n_2)\}}, \qquad S'' = \sum \sum e^{2\pi i \{f(n_1+v_1, n_2-v_2) - f(n_1, n_2)\}},$$

wo in der ersten Doppelsumme über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) summiert wird, für die (n_1, n_2) und (n_1+v_1, n_2+v_2) in G gelegen sind, in der zweiten über alle diejenigen (n_1, n_2) mit (n_1, n_2) und (n_1+v_1, n_2-v_2) aus G. Es seien ϱ_1 und ϱ_2 natürliche Zahlen mit

$$1 \leq \varrho_j \leq b_j - a_j, \qquad j = 1, 2. \tag{5}$$

Dann gilt

$$S = O\left(\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1^{\frac{1}{2}} \varrho_2^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1 \varrho_2} \sum_{1 \leq v_1 \leq \varrho_1 - 1} \sum_{0 \leq v_2 \leq \varrho_2 - 1} |S'|\right\}^{\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1 \varrho_2} \sum_{0 \leq v_1 \leq \varrho_1 - 1} \sum_{1 \leq v_2 \leq \varrho_2 - 1} |S''|\right\}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Wie man bei Beachtung der unteren Schranken für ϱ und ϱ_j, $j = 1, 2$, in (4) und (5) erkennt, bleiben diese beiden Hilfssätze richtig, wenn man für jene Parameter reelle Werte zuläßt.

Hilfssatz 3[9]). *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine reelle, differenzierbare Funktion von x_1 und x_2, $f_{x_1}(x_1, x_2)$ sei für jeden der zu betrachtenden x_2-Werte eine monotone Funktion von x_1 und $f_{x_2}(x_1, x_2)$ für jeden der zu betrachtenden x_1-Werte eine monotone Funktion von x_2. Ferner seien*

$$|f_{x_1}(x_1, x_2)| \leq \tfrac{3}{4}, \quad |f_{x_2}(x_1, x_2)| \leq \tfrac{3}{4} \text{ für } a_j \leq x_j \leq b_j, \; b_j - a_j \leq l, \; j = 1, 2, l \geq 1.$$

G sei das Rechteck $a_j \leq x_j \leq b_j$, $j = 1, 2$, oder ein durch eine stetige, monotone Kurve ausgeschnittener Teil desselben. Dann gilt

$$\sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)} = \iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)} \, dx_1 \, dx_2 + O(l).$$

Hilfssatz 4[10]). *Es sei G das Rechteck $a_j \leq x_j \leq b_j$, $j = 1, 2$, oder ein Teil desselben, der durch eine Kurve (oder mehrere) der Gleichung $x_1 = g(x_2)$, $g(x_2)$ algebraisch, aus demselben ausgeschnitten ist, und $M = \max_{j=1,2} (b_j - a_j)$. $f(x_1, x_2)$ sei eine reelle algebraische Funktion, die in G den folgenden Bedingungen genügt:*

$$|M f_{x_1} g''(x_2)| \leq \varkappa r_0, \text{[11]} \tag{6}$$

[8]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma β.
[9]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma γ.
[10]) l. c. [4]) S.-H. MIN, Lemma 8.
[11]) Übrigens erkennt man im Beweis, daß es genügt, $\varkappa = \frac{1}{2}$ zu setzen.

$\varkappa$ eine hinreichend kleine positive Konstante,

$$(7)\qquad r_1 \leq |f_{x_1^2}| \leq c_1 r_1, \qquad |f_{x_1 x_2}| \leq c_2 r_1, \qquad |f_{x_2^2}| \leq c_3 r_1, \qquad f_{x_1^2} f_{x_1 x_2} > 0,$$

$$(8)\qquad |f_{x_1^2} f_{x_2^2} - f_{x_1 x_2}^2| > r_0^2, \qquad 0 < r_0 \leq r_1,$$

$$(9)\qquad |f_{x_2^2}| \leq c_4 r_2, \qquad r_2 \leq c_5 r_1^{\frac{1}{2}}, \qquad M r_0 r_2 \leq c_6 r_1^2,$$

$$(10)\qquad |f_{x_1^2}^2 f_{x_1 x_2^2} - 2 f_{x_1^2} f_{x_1 x_2} f_{x_1^2 x_2} + f_{x_1 x_2}^2 f_{x_1^2}| \leq r_1^2 r_3, \qquad r_1^{\frac{1}{2}} r_3 \leq \tfrac{1}{2} r_0^2,$$

und für eine natürliche Zahl k sei

$$(11)\qquad r_1^{k-1} r_3^{2k-1} M = O(r_0^{4k-3}).$$

Dann gilt

$$(12)\qquad \iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 = O\left(\frac{1 + |\log r_1| + |\log M|}{r_0}\right).$$

Hilfssatz 5. *Ersetzt man in den Voraussetzungen von Hilfssatz 4 (6) durch*

$$(13)\qquad |g''(x_2)| \leq c_7 r_4 \quad \text{in } G,$$

so gilt

$$(14)\qquad \iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 = O\left(\frac{1 + |\log r_1| + |\log M|}{r_0}\right) + O\left(\frac{M r_1 r_4}{r_0^2}\right).$$

Beweis. Wie MIN in seinem Beweis des Hilfssatzes 4 können wir uns auf die Abschätzung des Integrales

$$I = \int \frac{e^{2\pi i f(g(x_2), x_2)}}{f_{x_1}(g(x_2), x_2)}\, dx_2$$

mit

$$(15)\qquad |f_{x_1}| > r_1^{\frac{1}{2}}$$

beschränken, und da (6) in den dortigen drei Fällen nur für den Fall, daß

$$(16)\qquad |f_{x_1} g'(x_2) + f_{x_2}| < r_0 r_1^{-\frac{1}{2}}$$

und auch

$$(17)\qquad |f_{x_1^2} g'(x_2) + f_{x_1 x_2}| < \tfrac{1}{2} r_0$$

gelten, benötigt wird, können wir sowohl (16) als auch (17) als erfüllt ansehen. Wir setzen

$$(18)\qquad y = f_{x_1} g'(x_2) + f_{x_2}.$$

Dann wird

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx_2} = f_{x_1^2} g'^2 + 2 f_{x_1 x_2} g' + f_{x_2^2} + f_{x_1} g'' \\ \qquad = f_{x_1^2}^{-1} [(f_{x_1^2} g' + f_{x_1 x_2})^2 + (f_{x_1^2} f_{x_2^2} - f_{x_1 x_2}^2) + f_{x_1^2} f_{x_1} g'']. \end{cases}$$

Ist nun $|f_{x_1^2} f_{x_1} g''| \leq \frac{1}{2} r_0^2$, so folgt aus (19), (7), (8) und (17)

$$\left|\frac{dy}{dx_2}\right| \geq |f_{x_1^2}^{-1}| \{|f_{x_1^2} f_{x_2^2} - f_{x_1 x_2}^2| - |f_{x_1^2} g' + f_{x_1 x_2}|^2 - |f_{x_1^2} f_{x_1} g''|\}$$

$$\geq \frac{1}{c_1 r_1}\left\{r_0^2 - \frac{1}{4} r_0^2 - \frac{1}{2} r_0^2\right\} = \frac{r_0^2}{4 c_1 r_1},$$

also mit (15), (18) und (16)

$$|I| \leq 2r_1^{-\frac{1}{2}} \int_0^{r_0 r_1^{-\frac{1}{2}}} \left|\frac{dx_2}{dy}\right| dy = O(r_1^{-\frac{1}{2}} r_1 r_0^{-2} r_0 r_1^{-\frac{1}{2}}) = O\left(\frac{1}{r_0}\right).$$

Ist dagegen $|f_{x_1^2} f_{x_1} g''| > \frac{1}{2} r_0^3$, so folgt mit (7) und (13) $|f_{x_1}| > \frac{r_0^2}{2c_1 r_1 c_7 r_4}$, und hieraus erhalten wir

$$I = O\left(\frac{M r_1 r_4}{r_0^2}\right).$$

Hilfssatz 6[12]). *Es sei in der Ebene ein Gitter von Rechtecken R_0 der Seitenlängen l_1 und l_2 gegeben. R sei ein Rechteck mit gitterparallelen Seiten der Längen a_1 und a_2. g_1 und g_2 seien zwei Parallelen, die mit den Seiten von R einen Bereich der Fläche V begrenzen. Bezeichnet dann A_0 die Anzahl der Rechtecke R_0, die teilweise oder ganz zwischen g_1 und g_2 und teilweise oder ganz in R liegen, so ist*

$$A_0 = \frac{V}{l_1 l_2} + O\left(\frac{a_1}{l_1} + \frac{a_2}{l_2} + 1\right).$$

3. Es sei

(20) u eine hinreichend große reelle Veränderliche,

und es werde zur Abkürzung

(21) $$U = u^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{11}{10}} u, \qquad U_1 = u^{\frac{11}{20}}$$

gesetzt.

(22) G^* sei das Gebiet $U_1 \leq x_1 \leq x_2, \qquad x_1 x_2 \leq U;$

(23) G_0 sei ein Rechteck $N_j \leq x_j \leq N_j' \leq 2N_j$, $j = 1, 2$, oder ein durch den Hyperbelbogen $x_1 x_2 = U$ oder eine Gerade (oder beides) ausgeschnittener Teil desselben mit $G_0 \subseteq G^*$.

Weiter seien

(24) $$f(x_1, x_2) = u^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$

und

(25) $$S = \sum_{G_0} \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wo die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) von G_0 erstreckt wird.

Mit den Bezeichnungen

(26) $$\varrho_1 = u^{-\frac{1}{10}} N_1^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} u,$$

(27) $$\varrho_2 = u^{-\frac{1}{2}} N_1^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} u = \varrho_1^2,$$

(28) $$\varrho_3 = u^{-\frac{1}{2}} N_1^{-\frac{1}{10}} N_2^{\frac{11}{10}} \log^{-\frac{1}{2}} u = N_1^{-\frac{1}{5}} N_2^{\frac{1}{5}} \varrho_1^2,$$

(29) $$\varrho_4 = u^{-\frac{1}{2}} N_1^{\frac{11}{10}} N_2^{-\frac{1}{10}} \log^{-\frac{1}{2}} u = N_1^{\frac{1}{5}} N_2^{-\frac{1}{5}} \varrho_1^2,$$

[12]) l. c. [4]) S.-H. MIN, Lemma 10.

wenden wir Hilfssatz 1 nacheinander auf S bzw. S_{ν_1}:

$$S = O\left(\frac{N_1 N_2}{\varrho_1^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_1} \sum_{1 \le \nu_1 \le \varrho_1 - 1} |S_{\nu_1}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{30}$$

$$S_{\nu_1} = O\left(\frac{N_1 N_2}{\varrho_2^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_2} \sum_{1 \le \nu_2 \le \varrho_2 - 1} |S_{\nu_2}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{31}$$

und anschließend Hilfssatz 2 auf S_{ν_2} an:

$$\begin{cases} S_{\nu_2} = O\left(\dfrac{N_1 N_2}{\varrho_3^{\frac{1}{2}} \varrho_4^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\dfrac{N_1 N_2}{\varrho_3 \varrho_4} \displaystyle\sum_{0 \le \nu_3 \le \varrho_3 - 1} \sum_{1 \le \nu_4 \le \varrho_4 - 1} |S'_{\nu_3, \nu_4}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right) + \\ \qquad + O\left(\left\{\dfrac{N_1 N_2}{\varrho_3 \varrho_4} \displaystyle\sum_{1 \le \nu_3 \le \varrho_3 - 1} \sum_{0 \le \nu_4 \le \varrho_4 - 1} |S''_{\nu_3, \nu_4}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right). \end{cases} \tag{32}$$

Dabei ist

$$S'_{\nu_3, \nu_4} = \sum_G \sum e^{2\pi i F(n_1, n_2)} \tag{33}$$

mit

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} f(x_1 + \nu_4 t_3, x_2 + \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3, \tag{34}$$

und G ist nach (23) ein Rechteck oder ein durch den Hyperbelbogen $(x_1 + \nu_4)(x_2 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = U$ oder eine Gerade (oder beides) ausgeschnittener Teil desselben mit $G \subseteqq G_0 \subseteqq G^*$ und

$$N_1 \le x_1 \le N_1' - \nu_4 \le 2N_1, \quad N_2 \le x_2 \le N_2' - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 \le 2N_2, \quad (x_1, x_2) \in G. \tag{35}$$

Ganz entsprechend ist S''_{ν_3, ν_4} definiert.

Von den Voraussetzungen der Hilfssätze 1 und 2 bleiben nach Beachtung von (23) bis (25) lediglich (4) und (5) nachzuprüfen. Aus (22) und (23) folgt

$$U_1 \le N_1 \le N_2, \qquad N_1 N_2 \le U, \tag{36}$$

und daher haben wir nach (26) bis (29) und (20)

$$\varrho_3 \ge \varrho_2 = \varrho_1^2 \ge u^{-\frac{1}{3}} U_1^{\frac{2}{3}} \log^{-\frac{1}{3}} u \ge 1 \tag{37}$$

und

$$\varrho_4 \ge u^{-\frac{1}{3}} U_1 U^{-\frac{1}{3}} \log^{-\frac{1}{3}} u \ge 1.$$

Die Bedingungen für die oberen Schranken der ϱ_j werden wegen (37) durch

$$\varrho_3 \le N_2' - N_2 - \varrho_1 - \varrho_2 \tag{38}$$

und

$$\varrho_4 \le N_1' - N_1 \tag{39}$$

befriedigt. (38) und (39) setzen wir vorläufig als erfüllt voraus.

4. Zunächst soll die Summe S'_{ν_3, ν_4} abgeschätzt werden. Setzen wir für $(x_1, x_2) \in G$

$$\bar{x}_1 = x_1 + \nu_4 t_3, \qquad \bar{x}_2 = x_2 + \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3, \tag{40}$$

so erhalten wir aus (34) und (24)

$$(41)\qquad F(x_1, x_2) = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8}\nu_1\nu_2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{x}_1^{-\frac{1}{2}}\bar{x}_2^{-\frac{1}{2}}(\nu_4\bar{x}_2 - 3\nu_3\bar{x}_1)\,dt_1\,dt_2\,dt_3.$$

Für

$$h(x_1, x_2) = x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}(\nu_4 x_2 - 3\nu_3 x_1)$$

gelten

$$(42)\qquad \begin{cases} h_{x_1^2} = \frac{3}{4}x_1^{-\frac{5}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}(\nu_4 x_2 + \nu_3 x_1), \qquad h_{x_1x_2} = \frac{3}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}x_2^{-\frac{3}{2}}(\nu_4 x_2 + 5\nu_3 x_1), \\ h_{x_2^2} = \frac{15}{4}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{5}{2}}(\nu_4 x_2 - 7\nu_3 x_1); \end{cases}$$

und mit der Abkürzung

$$(43)\qquad Q = \nu_3 N_1 + \nu_4 N_2 \le \varrho_3 N_1 + \varrho_4 N_2 = 2N_1^{\frac{1}{2}}N_2^{\frac{1}{2}}\varrho_1^2$$

haben wir wegen (23) in G_0

$$(44)\quad h_{x_1^2} = O(N_1^{-\frac{5}{2}}N_2^{-\frac{1}{2}}Q), \qquad h_{x_1x_2} = O(N_1^{-\frac{3}{2}}N_2^{-\frac{3}{2}}Q), \qquad h_{x_2^2} = O(N_1^{-\frac{1}{2}}N_2^{-\frac{5}{2}}Q).$$

Nach dem TAYLORschen Satze ist nun wegen (40)

$$\begin{aligned} h(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= h(x_1, x_2) + \nu_4 t_3 h_{x_1}(x_1, x_2) + (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3) h_{x_2}(x_1, x_2) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\{\nu_4^2 t_3^2 h_{x_1^2}(x_1^*, x_2^*) + 2\nu_4 t_3(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3) h_{x_1x_2}(x_1^*, x_2^*) + \\ &+ (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3)^2 h_{x_2^2}(x_1^*, x_2^*)\}, \\ x_1^* &= x_1 + \vartheta\nu_4 t_3, \qquad x_2^* = x_2 + \vartheta(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3), \qquad 0 \le \vartheta \le 1. \end{aligned}$$

Wegen (41), (26) bis (29) und (44) gilt daher, wenn wir zur Abkürzung

$$x_1' = x_1 + \frac{\nu_4}{2}, \qquad x_2' = x_2 + \frac{\nu_1 + \nu_3 + \nu_3}{2}$$

einführen,

$$(45)\qquad \begin{cases} F(x_1, x_2) = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8}\nu_1\nu_2[h(x_1', x_2') + O(N_1^{-\frac{1}{2}}N_2^{-\frac{1}{2}}Q\varrho_1^4)] \\ \qquad\quad = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8}\nu_1\nu_2[h(x_1', x_2') + O(N_1^{-\frac{1}{2}}N_2^{-\frac{1}{2}}Q u^{-\frac{1}{2}})]. \end{cases}$$

Beachten wir, daß nach diesem Vorgang im Hinblick auf (35) die ersten partiellen Ableitungen von $F(x_1, x_2)$ nach x_j in G im Fehlerglied einfach durch Division mit N_j, $j = 1, 2$, zu berücksichtigen sind, so erhalten wir mit (42) aus (45)

$$-F_{x_1^2}(x_1, x_2) = \tfrac{3}{32}u^{\frac{1}{2}}\nu_1\nu_2 x_1'^{-\frac{5}{2}}x_2'^{-\frac{1}{2}}(\nu_4 x_2' + \nu_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{1}{2}}))$$

und

$$-F_{x_1x_2}(x_1, x_2) = \tfrac{3}{32}u^{\frac{1}{2}}\nu_1\nu_2 x_1'^{-\frac{3}{2}}x_2'^{-\frac{3}{2}}(\nu_4 x_2' + 5\nu_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{1}{2}})).$$

Daher haben wir wegen (20) und (36) mit der Abkürzung

$$(46)\qquad r_1 = \frac{1}{c_8}u^{\frac{1}{2}}\nu_1\nu_2 N_1^{-\frac{1}{2}}N_2^{-\frac{1}{2}}Q,$$

falls nur c_8 genügend groß gewählt wird, mit passenden positiven Konstanten c_1 und c_2

$$(47)\qquad 0 < r_1 \le -F_{x_1^2} \le c_1 r_1, \qquad 0 < -F_{x_1x_2} \le c_2 r_1 N_1 N_2^{-1} \le c_2 r_1.$$

Setzen wir mit genügend großem c_9

$$r_2 = r_1 N_1^{-1}, \qquad r_3 = c_9 r_1 N_1 N_2^{-2}, \tag{48}$$

so erkennen wir unter Heranziehung von (44) ebenso, daß mit passenden positiven Konstanten c_3 und c_4 in G

$$|F_{x_1^2}| \leq c_3 r_1 N_1^2 N_2^{-2} \leq c_3 r_1, \tag{49}$$

$$|F_{x_1^3}| \leq c_4 r_2 \tag{50}$$

und

$$|F_{x_1^2}^2 F_{x_1 x_1^2} - 2F_{x_1^2} F_{x_1 x_2} F_{x_1^2 x_2} + F_{x_1 x_2}^2 F_{x_1^2}| \leq r_1^2 r_3 \tag{51}$$

gelten. Schließlich ist dort

$$\begin{cases} F_{x_1^2}(x_1, x_2) F_{x_1^3}(x_1, x_2) - F_{x_1 x_2}^2(x_1, x_2) \\ \quad = \frac{9}{256} u (v_1 v_2)^2 x_1'^{-3} x_2'^{-7} \left(v_4 x_2' + (2\sqrt{10} - 5) v_3 x_1'\right) \times \\ \quad \times \left(v_4 x_2' - (2\sqrt{10} + 5) v_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{1}{3}})\right). \end{cases} \tag{52}$$

Jetzt setzen wir mit positivem c_{10}

$$l_1 = \frac{1}{c_{10} r_1}, \qquad l_2 = \frac{N_2}{c_{10} r_1 N_1} \tag{53}$$

und überdecken die (x_1, x_2)-Ebene mit einem Gitter von Rechtecken mit achsenparallelen Seiten der Längen l_1 und l_2. Diejenigen Teilgebiete G_μ, in die G hierbei zerfällt, denken wir uns in irgendeiner Weise numeriert. Wegen (47) und (49) können wir c_{10} so groß wählen, daß F_{x_1} und F_{x_2} in jedem G_μ um höchstens $\frac{1}{2}$ variieren. Dann existieren aber zwei ganze Zahlen $m_j = m_j(\mu)$, $j = 1, 2$, so daß für die Funktion

$$\overline{F}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - m_1 x_1 - m_2 x_2 \tag{54}$$

dort

$$|\overline{F}_{x_j}| \leq \tfrac{3}{4}, \qquad j = 1, 2,$$

gilt.

Nach (20), (36), (26) und (27) haben wir

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{c_8}{2c_{10}} \left(\frac{U_1^8}{u}\right)^{\frac{1}{8}} \leq \frac{c_8}{2c_{10}} u^{-\frac{1}{8}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{8}} \log^{\frac{10}{9}} u \\ \quad = \frac{c_8}{2c_{10}} u^{-\frac{1}{2}} (N_1 N_2)^2 \varrho_1^{-5} \leq \frac{1}{c_{10} r_1} = l_1 \leq l_2, \end{cases} \tag{55}$$

und daher liefert uns Hilfssatz 3 mit $l = l_2$

$$\sum_{G_\mu}\sum e^{2\pi i F(n_1, n_2)} = \sum_{G_\mu}\sum e^{2\pi i \overline{F}(n_1, n_2)} = \iint_{G_\mu} e^{2\pi i \overline{F}(x_1, x_2)} d x_1 d x_2 + O\left(\frac{N_2}{N_1 r_1}\right). \tag{56}$$

Bezeichnet A die Anzahl der G_μ, in die wir G eingeteilt haben, so ist mit (53) gewiß

$$A = O\left((N_1 l_1^{-1} + 1)(N_2 l_2^{-1} + 1)\right) = O(N_1 N_2 l_1^{-1} l_2^{-1} + 1) = O(N_1^2 r_1^2 + 1), \tag{57}$$

so daß wir aus (33) und (56)

$$S'_{\nu_3,\nu_4} = \sum_{1\le\mu\le A} \iint_{G_\mu} e^{2\pi i F(x_1,x_2)}\, dx_1\, dx_2 + O(N_1 N_2 r_1) + O\left(\frac{N_2}{N_1 r_1}\right) \tag{58}$$

bekommen.

Es seien nun

$$y = \nu_4 x'_2 - \left(2\sqrt{10}+5\right)\nu_3 x'_1, \tag{59}$$

$$\bar{\nu}_3 = \begin{cases} \nu_3 & \text{für } \nu_3 \ge 1 \\ 1 & \text{für } \nu_3 = 0, \end{cases} \tag{60}$$

$$\eta = Q(\nu_1 \nu_2 \bar{\nu}_3)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{12}} N_1^{-\frac{1}{12}} N_2^{-\frac{1}{12}} \log^{-\frac{1}{2}} u \tag{61}$$

und

$$L = \left[\frac{\log \frac{Q}{\eta}}{\log 2}\right]. \tag{62}$$

Dabei gilt wegen (20), (36) und (26) bis (28) offenbar

$$2 \le u^{-\frac{1}{12}} U_1^{\frac{1}{2}} \le \frac{Q}{\eta} \le \varrho_1^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} u = u^{-\frac{1}{2}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} u, \tag{63}$$

so daß insbesondere

$$L \ge 1$$

ist.

Wir betrachten die $2L$-Parallelen

$$|y| = 2^\lambda \eta, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, L-1,$$

und es sei $G_{\lambda,\mu}$ derjenige Teil von G_μ, für den

$$2^\lambda \eta < |y| \le 2^{\lambda+1}\eta, \qquad 0 \le \lambda \le L-1,$$

bzw.

$$|y| > 2^L \eta, \qquad \lambda = L,$$

ist und G'_μ der Teil von G_μ, für den

$$|y| \le \eta$$

gilt.

Trivial schätzen wir die Integrale über die G'_μ ab:

$$\sum_{1\le\mu\le A} \iint_{G'_\mu} e^{2\pi i F(x_1,x_2)}\, dx_1\, dx_2 = O\left(\int_{\substack{N_1 \\ |y|\le\eta}}^{2N_1} \int_{N_2}^{2N_2} dx_1\, dx_2\right) = O\left(\frac{N_1 \eta}{\nu_4}\right). \tag{64}$$

In den Teilgebieten $G_{\lambda,\mu}$ von G studieren wir für unsere Funktion $\overline{F}(x_1, x_2)$ die Voraussetzungen der Hilfssätze 4 und 5. Da in (6) bis (10) nur partielle Ableitungen von höherer als erster Ordnung auftreten, können wir uns wegen (54) dort auf die Betrachtung von $F(x_1, x_2)$ beschränken.

Zunächst ist nach unserer Einteilungsvorschrift mit (55) und (36) gewiß

$$M \le 2\,\mathrm{Min}\,(N_2, l_2). \tag{65}$$

Definieren wir dann

$$r_0^2 = \frac{1}{c_8^2}\, u\,(r_1 r_2)^2\, N_1^{-3}\, N_2^{-7}\, Q\, 2^\lambda \eta = r_1^2\, N_1^2\, N_2^{-2}\, Q^{-1}\, 2^\lambda \eta, \tag{66}$$

so folgt aus (52) und (63), falls wir nur c_8 in (46) bereits genügend groß gewählt haben, in jedem unserer Gebiete mit einer gewissen Konstanten c_{11}

$$|F_{x_1^1} F_{x_1^2} - F_{x_1 x_2}^2| > r_0^2 \left(2 - c_{11} \frac{Q}{\eta\, u^{\frac{1}{3}}}\right) > r_0^2. \tag{67}$$

Weiter ist wegen (36)

$$0 < r_0 \leq r_1\, N_1\, N_2^{-1} \leq r_1, \tag{68}$$

und daher auch

$$M\, r_0\, r_2 \leq 2 N_2\, r_1\, N_1\, N_2^{-1}\, r_1\, N_1^{-1} = 2 r_1^2. \tag{69}$$

Nach (61), (36) und (20) gilt

$$\frac{r_1^{\frac{3}{2}}}{r_2} = r_1^{\frac{1}{2}} N_1 \geq \frac{r_1^{\frac{1}{2}}\, N_1\, 2^\lambda \eta}{2 c_9\, Q} \left(= \frac{r_0^2}{2 r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right) \geq \frac{1}{2 c_8^{\frac{1}{2}} c_9}\, u^{\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} u\, (N_1 N_2)^{-\frac{1}{2}} N_1 \geq 1, \tag{70}$$

und hiermit folgt unter Verwendung von (69) und (61) in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} \frac{r_0^{25}}{r_1^6 r_3^{13} M} &= \left(\frac{r_0^2}{r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right)^{12} \frac{r_0^2 r_2}{r_3 M r_0 r_2} \\ &\geq \left(\frac{r_0^2}{r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right)^{12} \frac{r_0^2 N_2^2}{2 c_9 r_1^2 N_1^2} \geq \frac{1}{2 c_8^6 c_9^{13}}\, u^{\frac{3}{9}} \log^{-\frac{7}{9}} u\, (N_1 N_2)^{-\frac{1}{9}} N_1^{12} \geq 1. \end{aligned} \tag{71}$$

Zufolge (47), (49) bis (51) und (67) bis (71) sind die Voraussetzungen (7) bis (11), letztere mit $k = 7$, des Hilfssatzes 4 erfüllt. Wird nun unser vorliegendes Gebiet $G_{\lambda,\mu}$ ausschließlich von Geraden begrenzt, so ist (6) von selbst erfüllt, und (12) gilt. Ist aber eine Begrenzungskurve keine Gerade, so kann es sich nur um den Hyperbelbogen $(x_1 + r_4)(x_2 + r_1 + r_2 + r_3) = U$ handeln, und in Hilfssatz 5 wird dann (13) durch

$$r_4 = \frac{N_1 N_2}{N_2^3} = N_1\, N_2^{-2} \tag{72}$$

mit genügend großem c_7 befriedigt, so daß in den $G_{\lambda,\mu}$ jedenfalls stets (14) gilt. Daher haben wir bei Beachtung von (65), (55) und (36)

$$\iint\limits_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i F(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 = O\left(\frac{N_2\, Q^{\frac{1}{2}} \log u}{N_1 r_1\, 2^{\lambda/2}\, \eta^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\frac{N_2\, Q}{N_1^2 r_1^2\, 2^\lambda\, \eta}\right). \tag{73}$$

Mit (57) und (62) folgt aus (73)

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq \mu \leq A} \iint_{G_{L,\mu}} e^{2\pi i F(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 \\ &\qquad = O(N_1 N_2 r_1 \log u) + O(N_2) + O\left(\frac{N_2 \log u}{N_1 r_1}\right) + O\left(\frac{N_2}{N_1^2 r_1^2}\right). \end{aligned} \tag{74}$$

Für festes $\lambda \leq L-1$ ist die Anzahl A_λ der $G_{\lambda,\mu}$ in G nach Hilfssatz 6 mit

$$V = O\left(\int\limits_{N_1}^{2N_1}\int\limits_{N_2}^{2N_2} d\,x_1\,d\,x_2\right) = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1}{\nu_4}\right)$$

$$A_\lambda = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1}{\nu_4 l_1 l_2}\right) + O\left(\frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} + 1\right) = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1^2 r_1^2}{N_2 \nu_4}\right) + O(N_1 r_1) + O(1),$$

und hiernach haben wir mit (73), wenn wir nach (62) und (63) $L = O(\log u)$ beachten,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\leq\lambda\leq L-1}\ \sum_{1\leq\mu\leq A}\ \iint_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i \bar{F}(x_1,x_2)}\,d\,x_1\,d\,x_2 \\
&\quad = O(1)\sum_{0\leq\lambda\leq L-1}\left(\frac{N_1 r_1 Q^{\frac12} 2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}\log u}{\nu_4} + \frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{N_1 r_1 2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}} + \frac{Q}{\nu_4} + \frac{N_2 Q}{N_1 r_1 2^\lambda \eta} + \frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 2^\lambda \eta}\right) \\
&\quad = O\left(\frac{N_1 r_1 Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{\eta^{\frac12}}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{N_1 r_1 \eta^{\frac12}}\right) + \\
&\qquad + O\left(\frac{Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1 r_1 \eta}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 \eta}\right).
\end{aligned} \tag{75}$$

Nun fassen wir unsere Ergebnisse aus (58), (64), (74) und (75) zusammen. Wir erhalten bei Beachtung von (43) und (63)

$$\begin{aligned}
S'_{\nu_3,\nu_4} &= O\left(\frac{N_1\eta}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_1 r_1 Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{\eta^{\frac12}}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 \eta}\right) + \\
&\quad + O\left(\frac{Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q\log u}{N_1 r_1 \eta}\right).
\end{aligned}$$

Man rechnet unter Verwendung von (63) und (36) leicht nach, daß hierin das fünfte und sechste durch das erste O-Glied majorisiert werden. In den übrigen Termen setzen wir die Werte von η und r_1 gemäß (61) und (46) ein und benutzen für Q die aus (43) mit (26), (36) und (60) resultierende Abschätzung

$$(\bar{\nu}_3\nu_4)^{\frac12}(N_1 N_2)^{\frac12} \leq Q \leq 2u^{-\frac12}(N_1 N_2)^{\frac12}\log^{-\frac12} u.$$

Hiermit bekommen wir

$$\begin{aligned}
S'_{\nu_3,\nu_4} &= O\left(\frac{N_1^{\frac{13}{16}} N_2^{\frac{13}{16}}}{u^{\frac{1}{16}}(\nu_1\nu_2\bar{\nu}_3)^{\frac12}\nu_4\log^{\frac{10}{9}} u}\right) + O\left(\frac{u^{\frac{15}{16}}\nu_1\nu_2\log^{\frac12} u\, N_1^{\frac{7}{16}}}{N_2^{\frac{13}{16}}\nu_4}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{(\nu_1\nu_2\bar{\nu}_3)^{\frac12}\log^{\frac12} u\, N_1^{\frac{7}{16}} N_2^{\frac{13}{16}}}{u^{\frac{1}{16}}}\right) + O\left(\frac{N_1^{\frac13} N_2^{\frac13}\log^{\frac13} u}{u^{\frac13}(\nu_1\nu_2)^{\frac13}\bar{\nu}_3^{\frac13}\nu_4}\right),
\end{aligned}$$

und da nach (36) hierin der erste Term die übrigen majorisiert, endlich

$$S'_{\nu_3,\nu_4} = O\left(u^{-\frac{1}{16}} N_1^{\frac{13}{16}} N_2^{\frac{13}{16}}\log^{-\frac{10}{9}} u\,(\nu_1\nu_2)^{-\frac12}\bar{\nu}_3^{-\frac12}\nu_4^{-1}\right). \tag{76}$$

Die Abschätzung der Summe S''_{ν_3,ν_4} kann in ganz analoger Weise erfolgen. Daher werde im folgenden unser Vorgehen nur skizziert.

Ist $\nu_4 \geq 1$, so haben wir ab (34) mit Ausnahme von (43) und (60) und (52) und (59), wo wir dagegen $(2\sqrt{10}-5)$ und $(2\sqrt{10}+5)$ miteinander vertauschen, ν_3 durch $-\nu_3$ und S'_{ν_3,ν_4} durch S''_{ν_3,ν_4} zu ersetzen. Wie aus dem Hilfssatz 2 hervorgeht, kann G nun überdies noch von dem Hyperbelbogen $x_1(x_2+\nu_1+\nu_2)=U$ begrenzt werden. Mit diesen Modifikationen bleibt bis (71) mit Ausnahme der unteren Abschätzungen in (47), die nicht notwendig zu gelten brauchen, alles richtig. Zur Behandlung der Integrale über die $G_{\lambda,\mu}$ setzen wir $\overline{F}(x_1, x_2) = \Phi(\xi_1, \xi_2)$,

$$x_1 = \xi_1, \qquad x_2 = N_1^{-1} N_2 \xi_1 + \xi_2, \tag{77}$$

also wegen $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 1$

$$\iint\limits_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i \overline{F}(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{G'_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i \Phi(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1\, d\xi_2,$$

wobei $G'_{\lambda,\mu}$ das Bild von $G_{\lambda,\mu}$ in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene bezeichnet. Unter Benutzung der bereits erkannten Abschätzungen von $F(x_1, x_2)$ und bei Beachtung der Invarianz der HESSEschen Determinante von $F(x_1, x_2)$ in (67) gegenüber (77) findet man alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 mit den in (46), (48), (65), (66) und (72) definierten Größen $M, r_j, j = 0, 1, 2, 3, 4$, erfüllt. Daher verläuft die weitere Rechnung wie bei S'_{ν_3,ν_4} und liefert

$$S''_{\nu_3,\nu_4} = O\left(u^{-\frac{3}{10}} N_1^{\frac{11}{20}} N_2^{\frac{11}{20}} \log^{-\frac{10}{9}} u\, (\nu_1 \nu_2 \nu_3)^{-\frac{1}{9}} \nu_4^{-1}\right), \qquad \nu_4 \geq 1. \tag{78}$$

Ist jedoch $\nu_4 = 0$, so haben wir außer in (43) durchweg ν_3 durch $-\nu_3$ zu ersetzen. Nach Hilfssatz 2 ist der fragliche Hyperbelbogen hier $x_1(x_2+\nu_1+\nu_2)=U$. Vertauschen wir noch in (47) die Vorzeichen von $F_{x_1^2}$ bzw. $F_{x_1 x_2}$, so bleibt bis (57) alles richtig. Wenn wir dann M und r_4 wie in (65) und (72) erklären und $r_0 = r_1 N_1 N_2^{-1}$ setzen, so können wir wegen $\nu_4 = 0$ leicht alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 in jedem G_μ verifizieren. Dann folgt aber mit (56) und (57)

$$\left\{\begin{aligned} S''_{\nu_3,0} &= O\left((N_1^2 r_1^2 + 1)\left(\frac{N_2 \log u}{N_1 r_1} + \frac{N_2}{N_1^2 r_1^2}\right)\right) = O\left(u^{\frac{1}{3}} \nu_1 \nu_2 \nu_3 N_1^{-\frac{1}{3}} N_2^{-\frac{1}{3}} \log u\right) + \\ &\quad + O(N_2) + O\left(u^{-\frac{1}{3}} (\nu_1 \nu_2 \nu_3)^{-1} N_1^{\frac{1}{3}} N_2^{\frac{1}{3}} \log u\right) + O\left(u^{-1} (\nu_1 \nu_2 \nu_3)^{-2} N_1 N_2^2\right). \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Jetzt folgt aus (32), (76), (78) und (79) bei Beachtung von (36)

$$S_{\nu_3} = O\left(u^{\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{11}{20}} \log^{\frac{1}{12}} u\, (\nu_1 \nu_2)^{-\frac{1}{2}}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{12}} N_1^{\frac{1}{5}} N_2^{\frac{11}{20}} \log^{\frac{1}{2}} u\, (\nu_1 \nu_2)^{-1}\right).$$

Dies verwenden wir weiter in (31) und erhalten wegen (36)

$$S_{\nu_1} = O\left(u^{\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{11}{20}} \log^{\frac{1}{12}} u\, \nu_1^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Setzen wir diese Abschätzung in (30) ein, so folgt schließlich

$$S = O\left(u^{\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{11}{20}} \log^{\frac{1}{2}} u\right). \tag{80}$$

Zum Beweise von (80) haben wir (38) und (39) als erfüllt vorausgesetzt. Gilt (38) nicht, so erhalten wir wegen (25), (23) und (28) in trivialer Abschätzung

$$S = O\left(N_1 (N_2' - N_2)\right) = O(N_1 \varrho_3) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{12}}\right) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} U^{\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{5}{12}}\right)$$
$$= O\left((N_1 N_2)^{\frac{5}{12}}\right),$$

so daß dann (80) ebenfalls gilt.

Ist schließlich (39) nicht erfüllt, so folgt mit (29) wie soeben

$$S = O\left(N_2 (N_1' - N_1)\right) = O(N_2 \varrho_4) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{12}}\right) = O\left((N_1 N_2)^{\frac{5}{12}}\right),$$

und daher gilt (80) in jedem $G_0 \subseteq G^*$.

5. Um von der Abschätzung (80) zum Teilerproblem zu gelangen, benötigen wir zunächst einen Hilfssatz über die partielle Summation in zwei Veränderlichen:

Hilfssatz 7[13]). *Es seien a_{μ_1, μ_2} komplexe Zahlen, derart daß mit*

$$s_{m_1, m_2} = \sum_{1 \le \mu_1 \le m_1} \sum_{1 \le \mu_2 \le m_2} a_{\mu_1, \mu_2}$$

für $1 \le m_j \le M_j$, $j = 1, 2$,

$$|s_{m_1, m_2}| \le G$$

gilt. $b(x_1, x_2)$ sei eine reelle, differenzierbare Funktion von x_1 und x_2 mit

$$0 \le b(m_1, m_2) \le H \quad \text{für} \quad 1 \le m_j \le M_j, \qquad j = 1, 2,$$

und jeder der Ausdrücke

$$b_{x_1}(x_1, x_2), \qquad b_{x_2}(x_1, x_2), \qquad b_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$$

sei dort von festem Vorzeichen. Dann ist

$$\left| \sum_{1 \le m_1 \le M_1} \sum_{1 \le m_2 \le M_2} a_{m_1, m_2} b(m_1, m_2) \right| \le 5 G H.$$

Wenden wir diesen Hilfssatz mit $b(x_1, x_2) = (x_1 + N_1 - 1)^{-\frac{1}{2}} (x_2 + N_2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ auf S an, so erhalten wir mit (80) und (25), wenn wir $a_{n_1, n_2} = e^{2\pi i f(n_1 + N_1 - 1, n_2 + N_2 - 1)}$ für $(n_1 + N_1 - 1, n_2 + N_2 - 1) \in G_0$ und sonst $a_{n_1, n_2} = 0$ setzen,

$$S_1 = \sum_{G_0} \sum \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{1}{2}}} = O\left(u^{\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{12}} \log^{\frac{1}{2}} u\right). \tag{81}$$

Jetzt ist nach (22)

$$S_2 = \sum_{G^*} \sum \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{q_1} \sum_{q_2} \left(\sum_{\substack{2^{q_1} \le n_1 \le 2^{q_1+1} - 1 \\ U_1 \le n_1, n_1 n_2 \le U}} \sum_{2^{q_2} \le n_2 \le 2^{q_2+1} - 1} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{1}{2}}} \right) \tag{82}$$

wobei die q_j, $j = 1, 2$, je $O(\log u)$ Werte durchlaufen. Jede der inneren Doppelsummen ist nach (81), (22) und (23) vom Typus S_1, und daher folgt aus (81)

[13]) l. c. [8]) Lemma α.

und (82)

$$(83)\qquad S_2 = \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ U_1 \le n_1 \le n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = O\left(\sum_{\substack{q_j \\ j=1,2}} u^{\frac{1}{16}} (2^{q_1+q_2})^{\frac{5}{16}} \log^{\frac{1}{2}} u \right) = O\left(u^{\frac{1}{16}} U^{\frac{5}{16}} \log^{\frac{10}{9}} u\right).$$

Wir setzen noch

$$(84)\qquad S_0 = \sum_{n_1 n_2 \le U} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}}$$

und

$$(85)\qquad S_3 = \sum_{n_1 < U_1} \sum_{n_1 \le n_2 \le \frac{U}{n_1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Dann gilt aus Symmetriegründen

$$(86)\qquad S_0 = 2 \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ n_1 \le n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} - \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ n_1 = n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = 2 S_2 + 2 S_3 + O(1).$$

Die Abschätzung von S_3 nehmen wir mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes vor:

Hilfssatz 8[14]). *Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, viermal stetig differenzierbar, $\lambda \le |f^{(4)}(x)| \le h\lambda$ in $a \le x \le b$, $b - a \ge 1$. Dann ist*

$$\sum_{a < n \le b} e^{2\pi i f(n)} = O\left(h^{\frac{1}{5}} (b-a) \lambda^{\frac{1}{5}}\right) + O\left((b-a)^{\frac{4}{5}} \lambda^{-\frac{1}{5}}\right).$$

Mit $f(n_2) = f(n_1, n_2) = u^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}} n_2^{\frac{1}{2}}$, $1 \le a < b \le 2a$, $h = 16$ und $\lambda = 2^{-4} u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}}$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}\sum_{a < n_2 \le b} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} &= O\left(a \left(u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right) + O\left(a^{\frac{4}{5}} \left(u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{5}}\right) \\ &= O\left(u^{\frac{1}{10}} a^{\frac{3}{5}} n_1^{\frac{1}{10}}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{10}} a\, n_1^{-\frac{1}{10}}\right),\end{aligned}$$

und partielle Summation liefert

$$\sum_{a < n_2 \le b} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} = O\left(u^{\frac{1}{20}} n_1^{\frac{1}{20}}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{20}} a^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{1}{20}}\right),$$

so daß wir, ähnlich wie in (82),

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned}\sum_{n_1 \le n_2 \le \frac{U}{n_1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} &= \sum_q \left(\sum_{2^q < n_2 \le 2^{q+1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} \right) \\ &= O\left(u^{\frac{1}{20}} n_1^{\frac{1}{20}} \log u\right) + O\left(u^{-\frac{1}{20}} U^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{3}{7}}\right)\end{aligned}\right.$$

bekommen.

Nach (85) und (87) erhalten wir

$$S_3 = O\left(\sum_{n_1 < U_1} \left(u^{\frac{1}{20}} n_1^{\frac{1}{20} - \frac{3}{7}} \log u + u^{-\frac{1}{20}} U^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{3}{7} - \frac{3}{4}}\right)\right) = O\left(u^{\frac{1}{20}} U_1^{\frac{3}{4}} \log u\right) + O\left(u^{-\frac{1}{20}} U^{\frac{1}{4}}\right),$$

[14]) TITCHMARSH, E. C.: The Theory of the Riemann Zeta-Function, Theorem 5.13, $k = 4$, Oxford 1951.

so daß sich wegen (21) aus (84), (24), (86) und (83)

$$S_0 = \sum_{n_1 n_2 \le U} \frac{e^{2\pi i \sqrt{u n_1 n_2}}}{(n_1 n_2)^{\frac{1}{4}}} = O(u^{\frac{1}{16}} U^{\frac{5}{16}} \log^{\frac{10}{9}} u) \tag{88}$$

ergibt.

In der Bezeichnungsweise von (1) gilt nun der

Hilfssatz 9[15]). *Es sei N eine natürliche Zahl, x halbzahlig, $1 \le N \le \sqrt{x}$. Dann gilt*

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n_1 n_2 \le N} \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{x n_1 n_2} - \frac{\pi}{4}\right)}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} + O(x^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \log^2 x).$$

Wir wählen hierin $N = [U]$. Dann folgt mit (88), wenn wir $u = 4x$ setzen,

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} U^{\frac{5}{16}} \log^{\frac{10}{9}} x) + O(x^{\frac{1}{2}} U^{-\frac{1}{2}} \log^2 x),$$

oder wegen (21)

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{13}{32}} \log^{\frac{30}{9}} x).$$

Nach (1) sieht man, daß die Beschränkung auf halbzahlige x-Werte aufgehoben werden darf, und daher haben wir jetzt (3) vollständig bewiesen.

[15]) l. c. [14]) 267—269. Dort erscheint zwar im Fehlerglied x^ε statt $\log^2 x$, doch stellt man dem Beweis folgend leicht fest, daß man die obige Form erhalten kann, wenn man $a = \varepsilon$ und $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ setzt.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. Dezember 1952.)

BRAUER, A.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 219—225 (1953)

On a new class of Hadamard determinants.

To my teacher KONRAD KNOPP belatedly on his seventieth birthday.

By
ALFRED BRAUER.

O. PERRON[1]) just published a number of theorems on the distribution of quadratic residues. Some of these results are corollaries of the following theorem of E. JACOBSTHAL[2]):

If p is an odd prime and c an integer not divisible by p, then

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2+c}{p}\right)=-1. \tag{1}$$

Moreover, Perron proved the following theorem:

Let p be a prime of form $4n-1$ and $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ the quadratic residues (mod p), including the number 0. Let R be the matrix which is obtained from the matrix

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_{2n} \\ r_1+1 & r_2+1 & \ldots & r_{2n}+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1+p-1 & r_2+p-1 & \ldots & r_{2n}+p-1 \end{pmatrix}$$

by reducing the elements (mod p). Then each row of R has exactly n elements in common with each other row.

As early as 1920, H. HOPF showed me his proof of this theorem using (1), and its application to the construction of Hadamard determinants of order $p+1=4n$. He never published it since I. SCHUR already knew this result at that time. Independently this theorem and its application to Hadamard determinants were published by R. E. A. PALEY[3]) in 1933.

Perron studies more general matrices of $4n-1$ rows and $2n$ columns whose elements are the numbers of a complete system of residues (mod $4n-1$) and which have the following two properties.

I. Each row has exactly n elements in common with each other row.

II. The corresponding elements of each pair of two rows have the same difference (mod $4n-1$).

[1]) Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **56**, 122—130 (1952).

[2]) Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Diss. Berlin 1906.

[3]) On orthogonal matrices. J. Math. Phys. **12**, 311—320 (1933).

Obviously the matrix R satisfies these conditions. For small values of n Perron determines the number of such matrices which are essentially different. He raises the question whether such matrices exist if $4n-1=m$ is composite. He gives a very interesting example for $m=15$.

It will be proved in this paper that this example is a special case of the following theorem:

If p and $p+2$ are twin primes, then there exist such matrices for $m=p(p+2)$.

Let us now consider matrices which have the property I, but not necessarily the property II. To each such matrix S_1 corresponds a matrix S_2 whose elements are those $2n-1$ elements of a complete system of residues (mod $4n-1$) which are not elements of the corresponding row of S_1. It follows that S_2 is a matrix of $4n-1$ rows and $2n-1$ columns which has the property that any two rows have exactly $n-1$ elements in common. If for a given $4n-1$ a matrix S_1 exists, then S_2 exists, and conversely. It was proved by J. A. TODD[4]) that such a matrix S_2 with $4n-1$ rows exists if and only if an Hadamard determinant of order $4n$ exists.

An Hadamard determinant of order N is a determinant whose elements are equal to ± 1 and which has the maximal value $N^{N/2}$ according to Hadamard's determinant theorem. It follows from the proof of this theorem that an Hadamard determinant must be orthogonal and its order must be 2 or a multiple of 4. J. J. SYLVESTER[5]) considered such determinants, and later they were studied by U. SCARPIS[6]), R. E. GILMAN[7]), PALEY[3]), TODD[4]), H. S. M. COXETER[8]), and J. W. WILLIAMSON[9]).

The existence of such determinants of order $N>1$ has been proved only for the following cases where p denotes an odd prime.

I. $N=2^k$,

II. $N=p^k+1\equiv 0 \pmod 4$,

III. $N=h(p^k+1)$ where $h\geq 2$ is the order of an Hadamard determinant,

IV. $N=h^*(h^*-1)$ where h^* is a product of numbers of forms I and II,

V. $N=172$,

VI. $N=h^*(h^*+3)$ where h^* and h^*+4 both are products of numbers of forms I and II,

---

[4]) A combinatorial problem. J. Math. Phys. **12**, 321—333 (1933).

[5]) Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tesselated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. Phil. Mag. (4) **34**, 461—475 (1867) or Coll. Math. Papers **2**, 615—628 (1908).

[6]) Sui determinanti di valore massimo. Rend. R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (2) **31**, 1441—1446 (1898).

[7]) On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 30—31 (1931).

[8]) Regular compound polytopes. J. Math. Phys. **12**, 334—345 (1933).

[9]) Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. Duke Math. J. **11**, 65—81 (1944). — Note on Hadamard's determinant theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 608—613 (1947).

VII. $N = h_1 h_2 (p^k + 1)\, p^k$ where $h_1 > 1$ and $h_2 > 1$ are orders of Hadamard determinants,

VIII. $N = h_1 h_2 s (s+3)$ where $h_1 > 1$ and $h_2 > 1$ are both orders of Hadamard determinants and where s and $s+4$ are both of the form $p^k + 1$,

IX. N is the product of numbers of the forms I—VIII.

In this paper it will be shown that Hadamard determinants of order $p(p+2)+1$ and of order $P\{p(p+2)+1\}$ exist where p and $p+2$ are twin primes and P is the product of numbers of the forms I—VIII.

Theorem 1. *Let p and $p+2$ be a pair of twin primes and $m = p(p+2)$. Let $a_1, a_2, \ldots, a_t$ be those numbers in the interval $\{0 \ldots m\}$ for which the Jacobian symbol $(a_\tau/m) = 1$. Let M be the matrix which is obtained from the matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_t & p & 2p & \ldots & (p+1)p \\ a_1+1 & a_2+1 & \ldots & a_t+1 & p+1 & 2p+1 & \ldots & (p+1)p+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1+m-1 & a_2+m-1 & \ldots & a_t+m-1 & p+m-1 & 2p+m-1 & \ldots & (p+1)p+m-1 \end{pmatrix}$$

by reducing the elements (mod m) and permuting the columns so that the elements of the first row are in natural order. Then M is a matrix with $m = 4n-1$ rows and $2n$ columns. Each row has exactly n elements in common with each other row, and the corresponding elements of each pair of two rows have the same difference (mod m).

Proof. Since $m = p^2 + 2p \equiv 3 \pmod 4$, we can set $m = 4n-1$. The number of columns is

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\varphi(m) + p + 1 = \tfrac{1}{2}(p-1)(p+1) + p + 1 = \tfrac{1}{2}(p+1)^2 = \tfrac{1}{2}(m+1) = 2n.$$

It is obvious that the corresponding elements of two rows have the same difference (mod m). Hence, as Perron[1]) pointed out, it is sufficient to show that each row has exactly n elements in common with the first row in order to prove that the same holds for each pair of two rows. For, if the $\varkappa - \lambda + 1$st row has exactly n elements in common with the first row, and if to each pair of equal elements the number $\lambda - 1$ is added, then n pairs of equal elements of the $\varkappa$th and λth rows are obtained.

The elements of the $d+1$st row are obtained by adding d to the elements of the first row. We call the common element $a+d$ of these two rows an element of the first kind if $(a, m) = (a+d, m) = 1$, an element of the second kind if $a \equiv 0 \pmod p$, and an element of the third kind if $a + d \equiv 0 \pmod p$, but $a \not\equiv 0 \pmod p$. We denote the number of these elements by C_1, C_2, and C_3, respectively.

We have to consider three cases.

1. $\left(\frac{d}{m}\right) = \pm 1$.

In the paper which follows this one it will be proved that there exist exactly $\frac{1}{4}(p-1)^2$ numbers c for which

$$\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c+d}{m}\right) = 1 \tag{3}$$

if $(d, m) = 1$. If, however, (3) holds, then c and $c+d$ are elements of the first row. Hence $c+d$ is an element of the $d+1$st row and therefore a common element of the first kind. Conversely, if $c+d$ is a common element of the first kind, then c and $c+d$ must satisfy (3). It follows that

$$C_1 = \tfrac{1}{4}(p-1)^2. \tag{4}$$

The numbers

$$p+d, 2p+d, \ldots, (p+2)p+d, \tag{5}$$

except the last, are elements of the $d+1$st row if reduced (mod m). On the other hand, they form a complete system of residues (mod $p+2$). Hence $\frac{1}{2}(p+1)$ of them are quadratic residues (mod $p+2$), $\frac{1}{2}(p+1)$ are quadratic non-residues, and one is divisible by $p+2$. Since the numbers (5) are congruent (mod p), exactly $\frac{1}{2}(p+1)$ of them have the property that their Jacobian symbols have the value 1, hence they are elements of the first row if reduced (mod m). It follows that

$$\begin{cases} C_2 = \frac{1}{2}(p-1) & \text{if} \quad \left(\frac{d}{m}\right) = 1, \\ C_2 = \frac{1}{2}(p+1) & \text{if} \quad \left(\frac{d}{m}\right) = -1, \end{cases} \tag{6}$$

because the last element of (5) is congruent to d (mod m).

Finally we have to determine C_3. For this purpose we consider the numbers

$$p-d, 2p-d, \ldots, (p+2)p-d. \tag{7}$$

They form a complete system of residues (mod $p+2$). It follows as above that for $\frac{1}{2}(p+1)$ of these numbers the Jacobian symbols (mod m) equal 1. Hence $\frac{1}{2}(p+1)$ of the numbers (7) are congruent (mod m) to elements of the first row. If d is added to them, elements of the $d+1$st row are obtained which, except for $(p+2)p$, are common elements of the third kind. Hence

$$\begin{cases} C_3 = \frac{1}{2}(p-1) & \text{if} \quad \left(\frac{-d}{m}\right) = 1, \\ C_3 = \frac{1}{2}(p+1) & \text{if} \quad \left(\frac{-d}{m}\right) = -1. \end{cases} \tag{8}$$

Now $\left(\frac{-d}{m}\right) = -\left(\frac{d}{m}\right)$ since $m \equiv -1 \pmod 4$. Hence it follows from (6) and (8) that

$$C_2 + C_3 = \tfrac{1}{2}(p-1) + \tfrac{1}{2}(p+1) = p,$$

and from (4) and (2) that

$$C_1 + C_2 + C_3 = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 + p = \tfrac{1}{4}(p+1)^2 = n. \tag{9}$$

2. $(d/p)=0$. The first row contains $p+1$ multiples of p. If d is added to them, then elements of the $d+1$st row are obtained, which, except for $(p+2)p$, are common elements of the second kind, hence $C_2=p$.

Now let b be an arbitrary number such that $1\leq b<p$. The numbers

$$b, b+d, \ldots, b+(p+1)d \tag{10}$$

form a complete system of residues (mod $p+2$). If we divide them by d (mod $p+2$), then we obtain $p+2$ consecutive numbers. This sequence contains[10])

$$L_1=\frac{1}{4}\left\{p-2-\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\} \tag{11}$$

pairs of consecutive quadratic residues (mod $p+2$) and

$$L_2=\frac{1}{4}\left\{p+\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\} \tag{12}$$

pairs of consecutive quadratic non-residues (mod $p+2$). Hence the progression (10) contains L_1 sequences of two quadratic residues and L_2 sequences of two quadratic non-residues if $\left(\frac{d}{p+2}\right)=1$, and L_2 such sequences of residues and L_1 sequences of non-residues if $\left(\frac{d}{p+2}\right)=-1$.

All the elements of (10) are quadratic residues (mod p) if $(b/p)=1$, and quadratic non-residues if $(b/p)=-1$. For those $\frac{1}{2}(p-1)$ numbers b which are quadratic residues (mod p) we have to count the number of pairs of consecutive residues (mod $p+2$) in (10) and for the $\frac{1}{2}(p-1)$ non-residues b (mod p) we have to count the number of pairs of consecutive non-residues (mod $p+2$) in order to obtain the number of pairs of consecutive elements in (10) whose Jacobian symbols (mod m) equal 1. If follows that for a given value of d the total number T of such pairs in all the progressions (10) for $b=1, 2, \ldots, p-1$ is

$$T=\tfrac{1}{2}(p-1)(L_1+L_2). \tag{13}$$

The elements of each of these pairs satisfy (3). Conversely, if c and $c+d$ are numbers satisfying (3), then they are consecutive numbers of one of the progressions (10). It follows as in 1. that $C_1=T$, hence by (13), (11), and (12),

$$C_1=\frac{p-1}{8}\left\{p-2-\left(\frac{-1}{p+2}\right)+p+\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\}=\frac{(p-1)^2}{4}. \tag{14}$$

Since in this case $C_3=0$, it follows that

$$C_1+C_2+C_3=\tfrac{1}{4}(p+1)^2. \tag{15}$$

3. $\left(\frac{d}{p+2}\right)=0$. The computation of C_1 is similar to that in 2. Only the roles of p and $p+2$ are interchanged. Instead of (10) we consider the progressions

$$b, b+d, \ldots, b+(p-1)d \qquad (b=1, 2, \ldots, p+1).$$

[10]) See, for instance, l. c. [1]) or l. c. [2]).

We replace $p+2$ by p in (11) and (12) and p by $p+2$ in (13). We obtain instead of (14)

$$(16)\quad C_1 = \frac{p+1}{8}\left\{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)+p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)\right\} = \frac{(p+1)(p-3)}{4}.$$

Finally we have to determine C_2 and C_3 for this case. The last elements of (5) and (7) are here divisible by $p+2$, hence their Jacobian symbols (mod m) equal 0. It follows that the common elements of the second kind are the $\frac{1}{2}(p+1)$ elements of (5) whose Jacobian symbols equal 1; those of the third kind are obtained if d is added to the $\frac{1}{2}(p+1)$ elements of (7) whose Jacobian symbols (mod m) equal 1. Hence

$$(17)\quad C_2 = C_3 = \tfrac{1}{2}(p+1),$$

and by (16) and (17)

$$(18)\quad C_1 + C_2 + C_3 = \tfrac{1}{4}(p+1)(p-3) + p + 1 = \tfrac{1}{4}(p+1)^2 = n.$$

The theorem follows now from (9), (15), and (18).

In a similar way we can prove

Theorem 1a. *If in Theorem 1 the elements $a_1, a_2, \ldots, a_t$ of the first row of the matrix M are replaced by those numbers whose Jacobian symbols (mod m) equal -1 and the elements of the other rows are changed correspondingly, then a matrix with the same properties is obtained.*

Another proof of this theorem follows from the remark of Perron[1]) that if in a matrix with the properties I and II the elements b of the first row are replaced by $m-b$, a matrix with the same properties is obtained. Theorems 1 and 1a always give essentially different matrices since the first row of the second matrix has no element whose Jacobian symbol equals 1 while the first matrix does not have such a row.

For $m=15$ the matrices obtained from Theorems 1 and 1a are essentially those of Perron. To show this, it is only necessary to permute the rows.

Theorem 2. *If p and $p+2$ are primes, then there exist Hadamard determinants of order $m+1 = p(p+2)+1 = (p+1)^2$.*

Proof. We construct the determinant in the following way. If in the matrix M of Theorem 1 the $\varkappa$th row contains the number λ, then we choose

$$a_{\varkappa\lambda} = 1 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

and otherwise

$$a_{\varkappa\lambda} = -1 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Moreover, we set

$$a_{m+1,\nu} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m+1),$$

$$a_{\nu,m+1} = -1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Each of the first m rows contains $\frac{1}{2}(m+1)$ elements 1, hence $\frac{1}{2}(m+1)$ elements -1, and is therefore orthogonal to the last row. Let us now consider the $\varkappa$th

and the λth rows for $\varkappa \neq \lambda$, $\varkappa \neq m+1$, $\lambda \neq m+1$. It follows from Theorem 1 that there exist $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th and λth rows are both equal to 1. There are $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th row equal 1 while those of the λth row equal -1 and $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th row equal -1 while those of the λth row equal 1. Hence all the elements of the remaining $\frac{1}{4}(m+1)$ columns and the $\varkappa$th and λth rows equal -1. It follows that the $\varkappa$th and λth rows are orthogonal. Hence all the rows are orthogonal and the determinant is an Hadamard determinant.

It follows, for instance, from Theorem 2 that Hadamard determinants of order $N = 324$ exist. The number 324 is not of one of the forms I–IX.

Since the direct product of two Hadamard matrices is again an Hadamard matrix, we obtain.

Theorem 3. *Let P be a product of numbers of the forms I–VIII. If p and $p+2$ are twin primes, then there exist Hadamard determinants of order $P\{p(p+2)+1\}$.*

University of North Carolina, Chapel Hill, N.C. (U.S.A.).

(Eingegangen am 17. November 1952.)

BRAUER, A.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 226—231 (1953)

On the Distribution of the Jacobian Symbols.

To ERNST JACOBSTHAL on his 70th birthday.

By
ALFRED BRAUER.

Let p be an odd prime. We denote the number of pairs of consecutive quadratic residues in a complete system of residues (mod p) by P^{++}, the number of pairs of consecutive non-residues by P^{--}, the number of sequences of one residue and one non-residue by P^{+-}. Similarly we define P^{-+}. In 1896, N. S. ALADOV[1]) determined these four numbers.

E. JACOBSTHAL[2]), in his dissertation, proved that

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2+d}{p}\right)=-1 \quad \text{for} \quad (d,p)=1$$

and used this formula for the computation of the numbers P^{++}, P^{--}, P^{+-}, P^{-+}. Moreover, he determined the number of sequences of three quadratic residues, of three quadratic non-residues, and the number of the other sequences of length 3 in a complete system of residues (mod p). Finally he obtained some results for sequences of length 4.

Sequences of more than three terms were studied by the author[3]), K. DOERGE[4]), H. HOPF[5]), H. DAVENPORT[6]), H. SALIÉ[7]), R. RADO[8]), L. J. MORDELL[9]), and H. HASSE[10]).

---

[1]) ALADOV, N. S.: Sur la distribution des résidus et non-résidus quadratiques d'un nombre premier dans la suite 1, 2, ..., $p-1$. Mat. Sbornik **18**, 61—75 (1896).

[2]) JACOBSTHAL, E.: Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Diss. Univ. Berlin 1906. — Über die Darstellung der Zahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate. J. reine angew. Math. **132**, 238—250 (1907).

[3]) BRAUER, ALFRED: (a) Über Sequenzen von Potenzresten. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1928**, 9—16; **1931**, 329—341. — (b) Über die Verteilung der Potenzreste. Math. Z. **35**, 39—50 (1932).

[4]) DOERGE, K.: Zur Verteilung der quadratischen Reste. Jber. dtsch. Math.-Verein. **38**, 41—49 (1929).

[5]) HOPF, H.: Über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **32**, 222—231 (1930).

[6]) DAVENPORT, H.: On the distribution of quadratic residues (mod p). J. London Math. Soc. **6**, 49—54 (1931); **8**, 46—52 (1933).

[7]) SALIÉ, H.: Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$. Math. Z. **34**, 91—109 (1931). — Über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **37**, 594—602 (1933).

[8]) RADO, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendung auf ein Problem der Zahlentheorie. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1933**, 589—596.

[9]) MORDELL, L. J.: The number of solutions of some congruences in two variables. Math. Z. **37**, 193—209 (1933).

[10]) HASSE, H.: Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. **10**, 325—348 (1934). — Vorlesungen über Zahlentheorie, § 10. Berlin: Springer 1950.

In this paper the corresponding problem for sequences of Jacobian symbols (mod m) of length 2 is solved. A special case of the obtained results is used in the preceeding paper for the construction of Hadamard determinants of order $p(p+2)+1$ where p and $p+2$ are twin primes.

One of the 9 numbers which will be determined is of independent interest. It is the number M^{00} of pairs c and $c+1$ whose Jacobian symbols (mod m) both equal 0 since M^{++} can be defined without using Jacobian symbols as the number of integers c in a complete system of residues (mod m) for which $(c, m) > 1$ and $(c+1, m) > 1$.

In a similar way, some of the results of the mentioned papers on sequences of more than two quadratic residues or non-residues could be generalized for Jacobian symbols. For instance, the author[11]) proved that for each integer s and all sufficiently large primes p there always exist sequences of s quadratic residues and sequences of s non-residues (mod p). Using this result and our method the following theorem of RADO[12]) can be obtained easily. For each s and all integers m whose prime divisors are all sufficiently large, there exist sequences of s integers whose Jacobian symbols (mod m) equal 1 and sequences of s integers whose Jacobian symbols equal -1.

For any modulus t we denote the number of pairs c and $c+1$ in a complete system of residues (mod t) for which the Jacobian symbols are both positive by T^{++} and the number of pairs for which $\left(\frac{c}{t}\right)$ is positive and $\left(\frac{c+1}{t}\right)$ is negative by T^{+-}. Correspondingly we define $T^{+0}, T^{-+}, \ldots, T^{00}$. If the modulus is m, then we use the notations M^{++}, M^{+-}, and so on.

Theorem 1. *Let m be an odd squarefree number, p a prime divisor of m, and $m = kp$. Then we have*

$$M^{++} = K^{++}P^{++} + K^{--}P^{--} + K^{+-}P^{+-} + K^{-+}P^{-+}, \tag{1}$$

$$M^{--} = K^{++}P^{--} + K^{--}P^{++} + K^{+-}P^{-+} + K^{-+}P^{+-}, \tag{2}$$

$$M^{+-} = K^{++}P^{+-} + K^{--}P^{-+} + K^{+-}P^{++} + K^{-+}P^{--}, \tag{3}$$

$$M^{-+} = K^{++}P^{-+} + K^{--}P^{+-} + K^{+-}P^{--} + K^{-+}P^{++}. \tag{4}$$

Proof. Let a be an integer such that a and $a+1$ are relatively prime to m. We set $\left(\frac{a}{k}\right) = \varepsilon_1$ and $\left(\frac{a+1}{k}\right) = \varepsilon_2$. We determine b such that $\left(\frac{b}{p}\right) = \varepsilon_1$ and $\left(\frac{b+1}{p}\right) = \varepsilon_2$. The simultaneous congruences

$$x \equiv a \pmod{k}, \qquad x \equiv b \pmod{p}$$

have one and only one solution c (mod m). We have

$$\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c}{k}\right)\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \varepsilon_1^2 = 1,$$

$$\left(\frac{c+1}{m}\right) = \left(\frac{c+1}{k}\right)\left(\frac{c+1}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{k}\right)\left(\frac{b+1}{p}\right) = \varepsilon_2^2 = 1.$$

[11]) BRAUER, ALFRED: l. c. 3 (a).

[12]) l. c. [8]).

Hence c and $c+1$ are two consecutive numbers for which the Jacobian symbols (mod m) equal 1. It follows that M^{++} is not smaller than the right-hand side of (1).

Conversely, if $\left(\frac{c}{m}\right)=\left(\frac{c+1}{m}\right)=1$, then it is necessary that $\left(\frac{c}{k}\right)=\left(\frac{c}{p}\right)\neq 0$ and $\left(\frac{c+1}{k}\right)=\left(\frac{c+1}{p}\right)\neq 0$. Hence M^{++} is not greater than the right-hand side of (1). This proves (1); the proofs of (2), (3), and (4) are similar.

Theorem 2. *If* $\left(\frac{d}{m}\right)=1$, *then there exist* M^{++} *numbers* c *in a complete system of residues (mod* m*) for which*

$$\left(\frac{c}{m}\right)=\left(\frac{c+d}{m}\right)=1, \tag{5}$$

and if $\left(\frac{d}{m}\right)=-1$, *then there are* M^{--} *numbers* c *for which* (5) *holds.*

Proof. Assume that $\left(\frac{d}{m}\right)=1$. If a is any number such that $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a+1}{m}\right)=1$, then $\left(\frac{a\,d}{m}\right)=\left(\frac{a\,d+d}{m}\right)=1$. If we reduce $a\,d$ and $a\,d+d$ (mod m), then we obtain a pair of numbers c and $c+d$ satisfying (5). Conversely, if c and $c+d$ are two numbers whose Jacobian symbols equal 1, then the numbers $\frac{c}{d}$ and $\frac{c+d}{d}$ (mod m) are two consecutive numbers whose Jacobian symbols equal 1. Hence to each of the M^{++} pairs of consecutive numbers a and $a+1$ with Jacobian symbols 1 there corresponds a pair c and $c+d$ with difference d and Jacobian symbols 1.

The proof for the case $\left(\frac{d}{m}\right)=-1$ is similar. We have to consider the M^{--} numbers a for which $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a+1}{m}\right)=-1$.

We now determine M^{++}, M^{--}, M^{+-}, and M^{-+} as functions of the prime factors of m. For this purpose we use V. SCHEMMEL's generalization of Euler's function $\varphi(m)$. SCHEMMEL[13]) defined $\varphi_n(m)$ as the number of sets of n consecutive positive integers each less than m and relatively prime to m, and he obtained

$$\varphi_n(m)=m\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{n}{p}\right) \tag{6}$$

since $\varphi_n(m)$ is multiplicative and $\varphi_n(p^s)=p^s-n\,p^{s-1}$.

We use the special case $n=2$. If m is odd and squarefree, then it follows from the definition of $\varphi_2(m)$ that

$$\varphi_2(m)=M^{++}+M^{--}+M^{+-}+M^{-+}, \tag{7}$$

Theorem 3. *Assume that* $m=p_1p_2\dots p_r q_1 q_2\dots q_s$ *where the* p_ϱ *are different primes of form* $4n+1$ *and the* q_σ *different primes of form* $4n-1$. *We set*

$$\varphi_2(m)=\prod_{\varrho=1}^{r}(p_\varrho-2)\prod_{\sigma=1}^{s}(q_\sigma-2)=A. \tag{8}$$

[13]) SCHEMMEL: Über relative Primzahlen. J. reine angew. Math. **70**, 191—192 (1869).

Then we have

(9) $M^{++} = M^{--} = M^{-+} = M^{+-} + 1 = \frac{1}{4}(A+1)$ if $r \equiv s \equiv 1 \pmod 2$,

(10) $M^{--} = M^{+-} = M^{-+} = M^{++} + 1 = \frac{1}{4}(A+1)$ if $r \equiv 1$ and $s \equiv 0 \pmod 2$,

(11) $M^{++} = M^{--} = M^{-+} = M^{+-} - 1 = \frac{1}{4}(A-1)$ if $r \equiv 0$ and $s \equiv 1 \pmod 2$,

(12) $M^{--} = M^{+-} = M^{-+} = M^{++} - 1 = \frac{1}{4}(A-1)$ if $r \equiv s \equiv 0 \pmod 2$.

Proof. It follows from (7) and (8) that

(13) $$M^{++} + M^{--} + M^{+-} + M^{-+} = A.$$

It is therefore sufficient to prove that three of the numbers on the left-hand side of (13) are equal while the fourth is greater by 1 or smaller by 1 corresponding to the four different cases.

We prove the theorem by induction. For $r = 1, s = 0$ and for $r = 0, s = 1$ the equations (10) and (11) were proved by Aladov[1]) and by Jacobsthal[2]).

We assume that the theorem is proved for all values of m containing less than $r+s$ different primes. We set

$$p_1 p_2 \cdots p_{r-1} q_1 q_2 \cdots q_s = k_1, \qquad p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_{s-1} = k_2.$$

Then the theorem is proved for k_1 and k_2. We denote K_1^{--} by g_1. It follows from (9) and (11) that

(14) $K_1^{++} = K_1^{--} = K_1^{-+} = g_1, \qquad K_1^{+-} = g_1 + (-1)^{r-1}$ for $s \equiv 1 \pmod 2$

and from (10) and (12) that

(15) $K_1^{--} = K_1^{+-} = K_1^{-+} = g_1, \qquad K_1^{++} = g_1 + (-1)^{r-1}$ for $s \equiv 0 \pmod 2$.

We have to prove the corresponding results for $m_1 = k_1 p$ and $m_2 = k_2 q$ where p is a prime of form $4n+1$ and q is a prime of form $4n-1$. We set

(16) $P^{--} = P^{+-} = P^{-+} = P^{++} + 1 = h_1, \quad Q^{++} = Q^{--} = Q^{-+} = Q^{+-} - 1 = h_2.$

If s is odd, then it follows from (14), (16), and Theorem 1 that

$$M_1^{+-} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 + (-1)^r,$$

$$M_1^{++} = M_1^{--} = M_1^{-+} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 = M_1^{+-} - (-1)^r.$$

Hence (9) and (11) hold for m_1.

If s is even, then we obtain from (15) and (16)

$$M_1^{--} = M_1^{+-} = M_1^{-+} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 = M_1^{++} - (-1)^r$$

in correspondence with (10) and (12). This proves the theorem for m_1.

The proof for m_2 is similar. If we denote K_2^{--} by g_2, then we obtain, corresponding to (14) and (15),

(17) $K_2^{++} = K_2^{--} = K_2^{-+} = g_2, \quad K_2^{+-} = g_2 + (-1)^r$ for $s - 1 \equiv 1 \pmod 2$,

(18) $K_2^{--} = K_2^{+-} = K_2^{-+} = g_2, \quad K_2^{++} = g_2 + (-1)^r$ for $s - 1 \equiv 0 \pmod 2$.

If s is even, then we obtain from (16) and (17)

$$M_2^{--} = M_2^{+-} = M_2^{-+} = 4g_2h_2 + g_2 + (-1)^r h_2 = M_2^{++} - (-1)^r$$

in correspondence with (10) and (12). If s is odd, then it follows from (16) and (18) that

$$M_2^{++} = M_2^{--} = M_2^{-+} = 4g_2h_2 + g_2 + (-1)^r h_2 = M_2^{+-} - (-1)^r.$$

This proves (9) and (11) for m_2.

In the preceeding paper the following special case of Theorems 3 and 2 was used.

If p and $p+2$ are twin primes and $m = p(p+2)$, then by (9) and (8)

$$M^{++} = M^{--} = \tfrac{1}{4}\{(p-2)p+1\} = \tfrac{1}{4}(p-1)^2. \tag{19}$$

Hence, for every d which is relatively prime to m, there exist $\frac{1}{4}(p-1)^2$ integers c in a complete system of residues (mod m) for which $\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c+d}{m}\right) = 1$.

Theorem 4. *Assume that $m = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$ where the p_ϱ are different primes of form $4n+1$ and the q_σ different primes of form $4n-1$. We set*

$$B = \varphi(m) - \varphi_2(m). \tag{20}$$

Then we have

$$\begin{cases} M^{0+} = \frac{1}{2}(B+1) = M^{0-} + 1 & \text{if } r \not\equiv s \pmod 2, \\ M^{0+} = \frac{1}{2}(B-1) = M^{0-} - 1 & \text{if } r \equiv s \pmod 2, \\ M^{+0} = \frac{1}{2}(B+1) = M^{-0} + 1 & \text{if } r \equiv 1 \pmod 2, \\ M^{+0} = \frac{1}{2}(B-1) = M^{-0} - 1 & \text{if } r \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{21}$$

Proof. There exist $\frac{1}{2}\varphi(m)$ numbers c_ν in a complete system of residues (mod m) for which $\left(\frac{c_\nu}{m}\right) = 1$. For M^{++} of these numbers the Jacobian symbol $\left(\frac{c_\nu - 1}{m}\right)$ equals 1, for M^{-+} of them this symbol is -1, and for the remaining numbers it is 0. Hence we have

$$M^{0+} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{++} - M^{-+}.$$

Similarly we obtain

$$M^{0-} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{+-} - M^{--},$$

$$M^{+0} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{++} - M^{+-},$$

$$M^{-0} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{-+} - M^{--}.$$

In these equations we substitute the values of M^{++}, M^{--}, M^{+-} and M^{-+}. Then the equations (21) are obtained.

Theorem 5. *If m is an odd squarefree number, then*

$$M^{00} = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Proof. We have m pairs in the closed interval $\{0 \dots m\}$, hence

$$M^{00} = m - M^{++} - M^{--} - M^{+-} - M^{-+} - M^{0+} - M^{0-} - M^{+0} - M^{-0}.$$

It follows from (21) and (20) that

$$M^{0+} + M^{0-} = M^{+0} + M^{-0} = \varphi(m) - \varphi_2(m),$$

hence by (7)

$$M^{00} = m - \varphi_2(m) - 2\{\varphi(m) - \varphi_2(m)\} = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Theorem 6. *The statement of Theorem 5 holds for arbitrary integers m.*

Proof. If m is even, then the $\varphi(m)$ numbers c_ν satisfying $0 \leq c_\nu \leq m$ and $(c_\nu, m) = 1$ are odd. Hence no two consecutive numbers are relatively prime to m, and the pairs $c_\nu - 1, c_\nu$ and $c_\nu, c_\nu + 1$ are the only ones whose one number is relatively prime to m. Hence

$$M^{00} = m - 2\varphi(m) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Now let $m = p_1 p_2 \dots p_t$ be odd. We set $p_1 p_2 \dots p_t = h$. It follows from Theorem 5 that

$$H^{00} = h - 2\varphi(h) - \varphi_2(h) = h - 2h \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + h \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{2}{p}\right). \tag{22}$$

Each closed interval of length h contains H^{00} pairs whose numbers are both not relatively prime to h and to m. Hence by (22)

$$M^{00} = \frac{m}{h} H^{00} = m - 2m \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + m \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Let us give a second proof for Theorem 6 using a method of SYLVESTER[14]). We say a pair of consecutive integers has property I if its first number is relatively prime to m and property II if its second number is relatively prime to m. Then the number of pairs in the interval $\{0 \dots m\}$ which have property I is $\varphi(m)$, the number of those with property II equals $\varphi(m)$, too, and the number of pairs having properties I and II is $\varphi_2(m)$. Hence the number of pairs having neither property I nor II is

$$M^{00} = m - \varphi(m) - \varphi(m) + \varphi_2(m) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

[14]) SYLVESTER, J. J.: Notes sur le théorème de Legendre cité dans une note insérée dans les Comptes Rendus. C. R. Acad. Sci. Paris **96**, 463—465 (1883). = Collected Mathematical Papers **4**, 88—90 (1912). See also PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2. Berlin: Springer 1925. Part VIII, problems 21—27, pp. 119—120, 326—329.

Dept. of Math., University of North Carolina, Chapel Hill, N.C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. Januar 1953.)

GAIER, D., und A. PEYERIMHOFF
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 232—242 (1953)

Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen.

Von

DIETER GAIER und ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Gegeben sei eine Matrix A mit den Elementen $a_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$. Mit ihrer Hilfe läßt sich ein Summierungsverfahren erklären: Die Reihe $\sum a_n$[1]) mit den Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ heißt A-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = s$$

ist. Beim Problem der Summierbarkeitsfaktoren beschäftigt man sich mit der Frage, wie eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ komplexer Zahlen beschaffen sein muß, damit sie nach Vorgabe zweier Verfahren A und B jede A-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine B-summierbare Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ überführt. Solche Faktoren nennen wir (A, B)-Summierbarkeitsfaktoren; definiert B speziell ein konvergenzgleiches Verfahren, so heißen die ε_ν Konvergenzfaktoren für das Verfahren A.

Für eine gewisse Klasse von Matrixverfahren A und B ist dieses Problem vollständig gelöst [8][2]). Bei diesen Verfahren wird in der Hauptsache vorausgesetzt, daß sie durch eine Dreiecksmatrix definiert werden und einen „Mittelwertsatz" erfüllen; letzteres bedeutet, daß z. B. für die Matrix A gelten soll

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leq K \max_{0\leq\mu\leq n} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leq n \leq m)$$

für jede Folge $\{s_\nu\}$ (A sei Dreiecksmatrix).

Das EULER-KNOPPsche Verfahren E_p, erklärt für festes $p > 0$ durch die Dreiecksmatrix E_p mit den Elementen[3])

$$a_{n\nu} = \frac{1}{(p+1)^n} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} \quad (0 \leq \nu \leq n),$$

erfüllt keinen derartigen Mittelwertsatz, und die Frage nach Konvergenzfaktoren für dieses Verfahren wurde auch erst kürzlich angegriffen [13]. Es wurde gezeigt:

Für alle E_p-summierbaren Reihen $\sum a_n$ konvergiert die Reihe $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n}$.

[1]) Für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schreiben wir stets $\sum a_n$.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[3]) Vgl. [7], S. 180.

Der Beweis wurde rein arithmetisch geführt, doch kommt man mit funktionentheoretischen Methoden schneller zum Ziel: Die E_p-Summierbarkeit von $\sum a_n$ hat nämlich einerseits die Größenbeschränkung $a_n = o\left((2p+1)^n\right)$ zur Folge, andererseits ist die durch $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n} y^n$ in $|y|<1$ erklärte Funktion noch in $y=1$ regulär, so daß insgesamt nach einem bekannten Satz von FATOU[4]) die Reihe $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n}$ konvergiert.

Diese funktionentheoretische Methode soll nun zum Beweis allgemeinerer Sätze verwandt werden. In § 1 wollen wir uns mit $(C_k E_q, C_k E_p)$-Summierbarkeitsfaktoren beschäftigen, wobei C_k das CESÀROsche Verfahren der Ordnung $k \geq 0$ bedeutet. Es wird genau die Punktmenge der z-Ebene angegeben werden, für die $\varepsilon_\nu = z^\nu$ Summierbarkeitsfaktoren der angegebenen Art sind. In § 2 soll versucht werden, den oben angegebenen Satz für allgemeine $\mathfrak{E}$-Transformationen im Sinne von KNOPP ([9], [12]) zu übertragen. Eine vollständige Lösung ist jedoch hier nicht gelungen.

§ 1. Das Euler-Knoppsche Verfahren.

1.1. Für das folgende ist es zweckmäßig, von der funktionentheoretischen Deutung des E_p-Verfahrens auszugehen. Mit den Bezeichnungen

$$g_p(\omega) = \frac{\omega}{(p+1) - p\omega}, \qquad h_p(\omega) = \frac{(p+1)\omega}{1+p\omega} \quad (p \geq 0)$$

— so daß also $g_p[h_p(\omega)] = \omega$ ist — werde für die Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n zunächst $\sum a_n [g_p(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(p)} \omega^n$ gebildet. Dann ist

$$\sigma_n^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(p)} = \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} s_\nu,$$

so daß also $\sum a_n$ genau dann E_p-summierbar (bzw. $C_k E_p$-summierbar) ist, wenn die Folge $\{\sigma_n^{(p)}\}$ für $n \to \infty$ konvergiert (bzw. C_k-limitierbar ist). Mit $\mathfrak{K}_q$ bezeichnen wir den durch $\left|z - \frac{q}{2q+1}\right| = \frac{q+1}{2q+1}$ gegebenen Kreis. Schließlich sei der durch

$$|z| + \frac{q}{q+1}\left|z - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{p+1}{q+1} \qquad (0 \leq p < q) \tag{1.1}$$

definierte Bereich der z-Ebene mit B_{pq} bezeichnet (Fig. 1), und daraus entstehe durch Wegnahme des Punktes $z = -\frac{1}{2q+1}$ die Punktmenge B'_{pq}[5]). Dann gilt

[4]) Vgl. [3], S. 389; [15], S. 90.

[5]) Der Bereich B_{pq} kann aufgefaßt werden als das E_p-Summationsgebiet einschließlich Rand einer Funktion, die in $\mathfrak{K}_q$ regulär ist und diesen Kreis zur natürlichen Grenze hat.

Satz 1. *Es sei* $0 \leq p < q$, $k \geq 0$. *Ist* $\sum a_n$ *eine beliebige Reihe mit*

$$\alpha_n^{(q)} = o(n^k) \quad (n \to \infty), \tag{1.2}$$

so ist die Reihe $\sum s_n z^n$ *für alle* $z \in B'_{pq}$ $C_k E_p$*-summierbar*[6]).

Beweis. Wird $\sum s_n z^n [g_p(\omega)]^n = \sum \beta_n(z)\,\omega^n$ und $\sum a_n z^n [g_p(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n$ gesetzt, so ist die C_k-Summierbarkeit von $\sum \beta_n(z)$ festzustellen. Nun gilt aber für kleine $|\omega|$

$$\sum \beta_n(z)\,\omega^n = \frac{1}{1 - z\,g_p(\omega)} \sum a_n z^n [g_p(\omega)]^n = \frac{1}{1 - z\,g_p(\omega)} \sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n \tag{1.3}$$

und

$$\sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n = \sum a_n [z\,g_p(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} [h_q(z\,g_p(\omega))]^n. \tag{1.4}$$

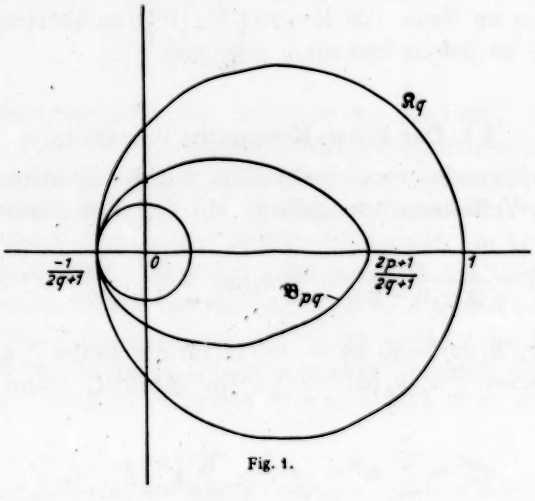

Fig. 1.

Daraus folgt nach einfacher Rechnung durch Koeffizientenvergleich der Entwicklungen nach ω

$$\beta_n(z) = \frac{z}{p+z} \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu^{(p)}(z) \left(\frac{p+z}{p+1}\right)^{n-\nu} + \alpha_n^{(p)}(z) \quad (n \geq 1) \tag{1.5}$$

und

$$\begin{cases} \alpha_0^{(p)}(z) = \alpha_0^{(q)}, \\ \alpha_n^{(p)}(z) = \dfrac{1}{n(p+1)^n} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(q)} \binom{n}{\nu} \nu\,[z(q+1)]^\nu (p - q\,z)^{n-\nu} \quad (n \geq 1). \end{cases} \tag{1.6}$$

Für sämtliche Punkte z aus B_{pq} gilt nun wegen (1.1)

$$|p - q\,z| \leq (p+1) - (q+1)\,|z|\,.$$

---

[6]) Wesentlich ist hier nur die Aussage für Randpunkte von B'_{pq}, da sie für innere Punkte aus bekannten Sätzen folgt [z liegt dann im Innern des E_p-Sterns von $g(z) = \sum s_n z^n$].

Daher folgt aus (1.6) für $n \geq 1$

$$(1.7)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\alpha_n^{(p)}(z)}{n^k}\right| \\ \leq \dfrac{1}{n^{k+1}(p+1)^n} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} o(1) \binom{n}{\nu} \nu^{k+1} [|z|(q+1)]^\nu [(p+1)-(q+1)|z|]^{n-\nu} \end{cases}$$

wegen (1.2). Die in (1.7) vermittelnde Matrix mit den Elementen $c_{n\nu}$ hat aber, wie man leicht feststellt, einerseits beschränkte Zeilennormen, und andererseits ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$, weshalb

$$(1.8)\qquad \alpha_n^{(p)}(z) = o(n^k)$$

ist für $n \to \infty$ und jedes feste $z \in B_{pq}$. Benützt man dies zur Abschätzung von $\beta_n(z)$ in (1.5), so folgt auf ähnliche Weise

$$(1.9)\qquad \beta_n(z) = o(n^k)$$

für $n \to \infty$ und jedes feste $z \in B_{pq}$, denn für diese z ist nach (1.1)

$$|z| \leq \frac{p+1}{q+1} < 1 \quad \text{und daher} \quad \left|\frac{p+z}{p+1}\right| < 1.$$

Schließlich folgt aus der Relation

$$\sum a_n [g_q(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$$

und aus (1.2), daß $f(z) = \sum a_n z^n$ für $|h_q(z)| < 1$, d.h. im Innern des in Fig. 1 gezeichneten Kreises $\mathfrak{K}_q$ regulär ist. Das hat zur Folge, daß die wegen (1.9) für $|\omega| < 1$ reguläre Funktion

$$f_1(\omega) = \sum \beta_n(z)\, \omega^n = \frac{1}{1 - z\, g_p(\omega)} \sum a_n [z\, g_p(\omega)]^n = \frac{f(z\, g_p(\omega))}{1 - z\, g_p(\omega)}$$

für jedes feste $z \in B'_{pq}$ auch im Punkte $\omega = 1$ regulär ist. Es ist nämlich $g_p(1) = 1$ und $g_p(\omega)$ ist für $\omega = 1$ regulär. Ferner liegt jedes $z \in B'_{pq}$ im Innern von $\mathfrak{K}_q$, denn nach (1.1) gilt für diese z

$$\begin{aligned} \frac{p+1}{q+1} &\geq |z| + \frac{q}{q+1} \left| -\frac{q+1}{q} z + \left(\frac{2q+1}{q} z - \frac{p}{q}\right)\right| \\ &\geq |z| + \left|\frac{2q+1}{q} z - \frac{p}{q}\right| \frac{q}{q+1} - |z|, \end{aligned}$$

also

$$(1.10)\qquad \left|z - \frac{p}{2q+1}\right| \leq \frac{p+1}{2q+1}.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß alle Punkte der Kreisscheibe (1.10) abgesehen vom Punkt $z = -\dfrac{1}{2q+1}$, im Innern von $\mathfrak{K}_q$ liegen.

Damit ist aber der Satz von FATOU in seiner Verallgemeinerung von M. RIESZ ([15], S. 93) auf die Reihe $\sum \beta_n(z)\, \omega^n$ anwendbar. Nach ihm genügt

die Regularität von $\sum \beta_n(z)\,\omega^n$ in $\omega=1$ und (1.9) für die C_k-Summierbarkeit dieser Reihe im Punkt $\omega=1$. Dies war aber zu zeigen[7]).

1.2. Der Satz 1 wird es uns gestatten, einen Satz über (C_kE_q, C_kE_p)-Summierbarkeitsfaktoren der Form $\varepsilon_\nu=z^\nu$ anzugeben. Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Für jede C_kE_p-summierbare Reihe $\sum a_n$ ist $C_kE_p-\lim a_n=0$ $(k\geq 0, p\geq 0)$.*

Beweis. Offenbar genügt es, wenn wir zeigen, daß aus der C_kE_p-Summierbarkeit von $\sum a_n$ die von $0+a_0+a_1+\cdots$ zu derselben Summe folgt.

Die C_kE_p-transformierte Folge $\{\tau_n\}$ einer Reihe $\sum a_n$ wird gegeben durch

$$\sum a_n[g_p(\omega)]^n=(1-\omega)^{k+1}\sum \tau_n\binom{n+k}{n}\omega^n.$$

Daraus folgt, daß die C_kE_p-transformierte Folge $\{\tilde{\tau}_n\}$ der Reihe $0+a_0+a_1+\cdots$ gegeben wird durch

$$\tilde{\tau}_n=\frac{1}{\binom{n+k}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\tau_\nu\binom{\nu+k}{\nu}b_{n-\nu}\qquad\left(g_p(\omega)=\sum b_n\omega^n\right),$$

und dies ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, eine permanente Transformation.

Hilfssatz 2. *Ist die Reihe $\sum s_nz^n$ C_kE_p-summierbar $(k\geq 0, p\geq 0)$, so auch die Reihe $\sum a_nz^n$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $C_kE_p-\lim s_nz^n=0$, woraus wegen

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu=z(s_nz^n)+(1-z)\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu z^\nu$$

die Behauptung folgt.

Wir kommen nun zu dem angekündigten

Satz 2. *Es sei $0\leq p<q$, $k\geq 0$. Dann ist B'_{pq} genau die Punktmenge der z-Werte, für die $\varepsilon_\nu=z^\nu$ (C_kE_q, C_kE_p)-Summierbarkeitsfaktoren sind.*

Das heißt also, daß $\sum a_nz^n$ (und, wie sich ergeben wird, auch $\sum s_nz^n$) stets C_kE_p-summierbar ist für jede C_kE_q-summierbare Reihe $\sum a_n$, falls z in B'_{pq} liegt; ist $z\overline{\in}B'_{pq}$, so ist dies nicht mehr richtig.

Beweis. Auf Grund der C_kE_q-Summierbarkeit von $\sum a_n$ zu einem Wert a ist

$$\sigma_n^{(q)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-k-1}{n-\nu}\binom{\nu+k}{\nu}(a+o(1))=a+o(n^k),$$

also $\alpha_n^{(q)}=o(n^k)$, so daß nach Satz 1 die Reihe $\sum s_nz^n$ für alle $z\in B'_{pq}$ C_kE_p-summierbar ist. Nach Hilfssatz 2 ist auch $\sum a_nz^n$ C_kE_p-summierbar.

[7]) Mit der hier verwendeten Methode läßt sich folgende Erweiterung des FATOUschen Satzes beweisen: *Die Potenzreihe $\sum a_nz^n$ ist in jedem regulären Randpunkt z ihres E_p-Summationssternes C_kE_p-summierbar, für den $A_n^{(p)}(z)=o(n^k)$ ist $(k\geq 0,\ p\geq 0)$.* [Dabei bedeutet $\{A_n^{(p)}(z)\}$ die E_p-transformierte Folge der Folge $\{a_nz^n\}$.] Für $k=0$ vgl. [4]; $k=p=0$ liefert den FATOUschen Satz.

Andererseits sind $\varepsilon_\nu = z^\nu$ für $z \overline{\in} B_{pq}$ sicher keine $(C_k E_q, C_k E_p)$-Faktoren. Denn ist z.B. $\sum a_n z^n$ für $z = 1$ $C_k E_q$-summierbar und hat die durch $\sum a_n z^n$ erklärte Funktion den Kreis $\mathfrak{K}_q$ als natürliche Grenze[8]), so ist diese Reihe $\sum a_n z^n$ außerhalb ihres E_p-Summationssternes, d.h. in diesem Falle außerhalb B_{pq}, sicher nicht $C_k E_p$-summierbar.

Schließlich sind auch die Zahlen $\varepsilon_\nu = z^\nu$ für $z = -\frac{1}{2q+1}$ keine $(C_k E_q, C_k E_p)$-Faktoren. Dazu betrachten wir die Reihe $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n (2q+1)^n}{n+1}$. Sie ist E_q-summierbar; denn einerseits ist $E_q - \lim a_n = 0$ ([*13*], S. 291), und andererseits ist die in der Umgebung von $z = 0$ durch $\varphi(z) = \sum \frac{(-1)^n (2q+1)^n}{n+1} z^n$ erklärte Funktion in $\mathfrak{K}_q$ und im Punkte $z = 1$ regulär, da deren einzige endliche Singularität bei $z = -\frac{1}{2q+1}$ liegt. Nach dem in [7]) zitierten Satz $(k = 0)$ ist $\sum a_n$ daher E_q-summierbar. Wird aber $\sum a_n$ mit den Faktoren $\varepsilon_n = \left(\frac{-1}{2q+1}\right)^n$ versehen, so divergiert $\sum a_n \varepsilon_n$ gegen $+\infty$, kann also nicht $C_k E_p$-summierbar sein. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken noch, daß im Spezialfall $p = k = 0$ aus der E_q-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n$ die Konvergenz von $\sum \frac{s_n}{(2q+1)^n} \zeta^n$ und $\sum \frac{a_n}{(2q+1)^n} \zeta^n$ für $\zeta = e^{i\varphi}, \varphi \neq \pi$ folgt. Für $\varphi = 0$ ist dieser Sachverhalt bekannt (vgl. [*13*], S. 289 und 291).

Satz 3. *Es sei $0 \leq p < q$, $k \geq 0$. Ist $\sum a_n$ eine beliebige Reihe und gilt für ihre E_q-Transformation*

$$\sigma_n^{(q)} \cong A \cdot n^k \qquad (n \to \infty), \tag{1.11}$$

so sind die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum s_n z^n$ für alle $z \in B'_{pq}$ $C_k E_p$-summierbar.

Beweis. Die Bedingung (1.11) hat $\alpha_n^{(q)} = o(n^k)$ zur Folge, und Satz 1, zusammen mit Hilfssatz 2, liefert das Gewünschte.

§ 2. Allgemeine Eulersche Reihentransformationen.

2.1. In diesem Paragraphen wollen wir uns damit beschäftigen, den in der Einleitung genannten Satz auf allgemeine $\mathfrak{E}$-Transformationen zu übertragen. Die Definition des $\mathfrak{E}$-Verfahrens wollen wir, etwas allgemeiner als bei KNOPP [*9*] angegeben, folgendermaßen fassen: Eine in $|\omega| < 1$ reguläre Funktion $z = g(\omega)$ bilde $|\omega| < 1$ umkehrbar eindeutig auf ein von einer JORDAN-Kurve $\mathfrak{C}$ berandetes, die Strecke $0 \leq z < 1$ enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$ in $|z| < 1$ ab, wobei $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ sei[9]); die in $\mathfrak{G}$ erklärte Umkehrfunktion zu $z = g(\omega)$ sei mit $\omega = h(z)$ bezeichnet.

[8]) Man beachte, daß $\sum a_n [g_q(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$ gilt und daher diese Forderungen die C_k-Summierbarkeit von $\sum \alpha_n^{(q)}$ und die Nichtfortsetzbarkeit von $\sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$ über $|\omega| = 1$ hinaus bedeuten. Dies kann z.B. erreicht werden, indem man für $\sum \alpha_n^{(q)}$ eine konvergente Reihe mit großen Lücken nimmt.

[9]) Die Funktion $g(\omega)$ ist in $|\omega| \leq 1$ stetig (vgl. z.B. [*2*], S. 31), daher kann von $g(\omega)$ mit $|\omega| = 1$ gesprochen werden.

Mit Hilfe der Funktion $g(\omega)$ bilde man

$$\sum a_n z^n = \sum a_n [g(\omega)]^n = \sum \alpha_n \omega^n;$$

die Reihe $\sum a_n$ heißt dann $\mathfrak{E}$-summierbar (bzw. $|\mathfrak{E}|$-summierbar), wenn $\sum \alpha_n$ konvergiert (bzw. absolut konvergiert). Ist dies der Fall, so ist $\sum \alpha_n \omega^n$ in $|\omega|<1$ regulär, und durch $\sum a_n z^n$ wird eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $f(z)$ erklärt. Setzt man daher

$$d = \operatorname*{Min}_{|\omega|=1} |g(\omega)| < 1^{10}),$$

so ist $\sum a_n z^n$ sicher in $|z|<d$ und im Punkt $z=d$ regulär, und nach dem FATOUschen Satz konvergiert also $\sum a_n d^n$, wenn die a_n der Bedingung

$$a_n = o\left(\frac{1}{d^n}\right) \tag{2.1}$$

genügen. Es ergibt sich hiermit

Satz 4. *Für alle $\mathfrak{E}$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ konvergiert die Reihe $\sum a_n d^n$, sofern (2.1) gilt.*

Ob (2.1) für alle $\mathfrak{E}$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ allgemein richtig ist, konnte nicht entschieden werden. Im folgenden wird es sich darum handeln, einige hinreichende Bedingungen für die Richtigkeit von (2.1) abzuleiten.

2.2. Die erste Bedingung, die (2.1) zur Folge hat, ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $g(\omega)$.

Satz 5. *Für alle $|\mathfrak{E}|$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ gilt (2.1).*

Beweis. Konvergiert $\sum \alpha_n$ absolut, so ist $\sum \alpha_n \omega^n$ in $|\omega|<1$ beschränkt, d.h. $f(z) = \sum a_n z^n$ ist in $\mathfrak{G}$ und daher insbesondere in $|z|<d$ beschränkt. Daraus folgt aber $a_n d^n \to 0$ für $n \to \infty$, da $\sum |a_n|^2 d^{2n}$ konvergiert.

In den Sätzen 6 und 7 werden Klassen von $\mathfrak{E}$-Verfahren angegeben, für die aus der $\mathfrak{E}$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ die Gültigkeit von (2.1) folgt.

Satz 6. *Es gilt (2.1) für jede $\mathfrak{E}$-summierbare Reihe $\sum a_n$, falls die zu $\mathfrak{E}$ gehörige Kurve $\mathfrak{C}$ nur einen Punkt z_0 mit $|z|=d$ gemein hat und dort diesen Kreis von erster Ordnung berührt.*

Beweis. Für $|z|<d$ gilt die Identität

$$\sum a_n z^n = \sum \alpha_n [h(z)]^n, \tag{2.2}$$

und daher berechnet sich $a_n d^n$ aus den α_n gemäß

$$a_n d^n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n,\nu} \alpha_\nu \tag{2.3}$$

mit

$$\alpha_{n,\nu} = \frac{d^n}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{[h(z)]^\nu}{z^{n+1}} dz \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

---

[10]) Von der identischen Transformation mit $g(\omega)=\omega$, die den Fall der Konvergenz liefert, wollen wir hier absehen. Dann ist stets $d<1$; denn ist $d=1$, d.h. fällt $\mathfrak{C}$ mit $|z|=1$ zusammen, so ist $g(\omega)=\omega$, wie man mit Hilfe des SCHWARZschen Lemmas leicht einsieht.

Für die Matrix $(\alpha_{n,\nu})$ ist nun die Spaltenbedingung $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,\nu} = 0$ für jedes feste ν erfüllt, da $[h(dz)]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_{n,\nu} z^n$ eine in $|z|<1$ beschränkte Funktion ist. Um die Zeilennormen $Z_n = \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_{n,\nu}|$ zu untersuchen, betrachten wir

$$|\alpha_{n,\nu}| \leq \frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Auf Grund der Annahme über das Verhalten von $\mathfrak{C}$ in der Umgebung von z_0 gibt es ein $\vartheta > 0$, so daß für sämtliche z auf $\mathfrak{C}$, die einer gewissen Umgebung von z_0 angehören,

$$|z| \geq d + |z - z_0|\,\vartheta$$

gilt. Für diesen Teil $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ folgt daher nach einfacher Rechnung (vgl. z. B. [10], S. 65)

$$\frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Auf dem restlichen Teil von $\mathfrak{C}$ gilt $|z| \geq d' > d$, also sicher

$$\frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty),$$

insgesamt also mit einer festen Konstanten K

$$|\alpha_{n,\nu}| \leq \frac{K}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots).$$

Daher ist für $n \geq 1$ stets $Z_n = \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_{n,\nu}| \leq 2K$; die Matrix $(\alpha_{n,\nu})$ transformiert demnach jede Nullfolge $\{\alpha_\nu\}$ wieder in eine Nullfolge, so daß (2.1) erfüllt ist.

Mit Hilfe der zum Beweis von Satz 6 angestellten Überlegungen sieht man leicht, daß die $\mathfrak{E}$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ in allen Fällen

$$a_n = o\left(\frac{n}{d^n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{2.6}$$

zur Folge hat. Das in (2.5) auftretende Integral ist nämlich sicher $O(1/d^n)$, so daß man für die Zeilennormen Z_n der in (2.3) vermittelnden Matrix $(\alpha_{n,\nu})$ stets $Z_n = O(n)$ erhält. Außerdem ist wieder die Spaltenbedingung für $(\alpha_{n,\nu})$ erfüllt, so daß die Nullfolge $\{\alpha_n\}$ in die Folge $\{a_n d^n\}$ transformiert wird, von der jedenfalls $a_n d^n = o(n)$ für $n \to \infty$ gilt.

Schließlich bemerken wir, daß statt (2.6) schärfer

$$a_n = o\left(\frac{\sqrt{n}}{d^n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{2.7}$$

gilt, wenn $\mathfrak{C}$ nur einen Punkt z_0 mit $|z| = d$ gemeinsam hat und diesen Kreis dort von 2. Ordnung berührt. Zum Beweis dieser Tatsache gehe man wie

im Anschluß an Satz 6 vor, wobei lediglich die Abschätzung des Integrals in (2.5) etwas zu modifizieren ist (vgl. [5], S. 328).

Aus der Beziehung (2.6) folgt, daß $\sum a_n d^n$ für jede $\mathfrak{E}$-summierbare Reihe $\sum a_n$ sicher C_1-summierbar ist, und aus (2.7) folgt die C_1-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n d^n$. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.

Satz 7. *Es gilt* (2.1) *für jede* $\mathfrak{E}$*-summierbare Reihe* $\sum a_n$, *falls die zu* $\mathfrak{E}$ *gehörige Umkehrfunktion* $\omega = h(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$ *reelle Entwicklungskoeffizienten* γ_ν *mit alternierenden Vorzeichen*[11]) *besitzt.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß im Falle reeller γ_ν die Kurve $\mathfrak{C}$ die x-Achse ($z = x + i\,y$) in genau zwei Punkten trifft, nämlich in den Punkten $z = 1$ und $z = z_0 < 0$. Denn reellen Punkten der Kurve müssen bei der Abbildung $\omega = h(z)$ reelle Punkte von $|\omega| = 1$ entsprechen, d. h. die Punkte $\omega = \pm 1$. Die Strecke $0 \leq z < 1$ geht wegen $h(1) = 1$ und $h(0) = 0$ in die Strecke $0 \leq \omega < 1$ über, so daß $g(-1) = z_0 < 0$ ist.

Weiter ist $\gamma_1 > 0$. Der Fall $\gamma_1 = 0$ kann nämlich wegen der Schlichtheit von $h(z)$ in $\mathfrak{G}$ nicht eintreten. Außerdem hätte $\gamma_1 < 0$ zur Folge, daß das Bild von $0 \leq z < 1$ bei der Abbildung durch $\omega = h(z)$ auch Punkte mit $\omega < 0$ enthielte, was wiederum falsch ist, da $0 \leq z < 1$ in die Strecke $0 \leq \omega < 1$ übergeführt wird.

Es ist somit $\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1}|\gamma_\nu|$ für $\nu = 1, 2, \ldots$. Wir zeigen nun, daß $|z_0| = -z_0 = d$ ist. Wäre nämlich z_0' ein Punkt von $\mathfrak{C}$ mit $d = |z_0'| < |z_0|$, so wäre

$$1 > |h(z_0')| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu z_0'^\nu \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu| d^\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu (-d)^\nu = -h(-d) > -h(z_0) = 1.$$

Dies ist unmöglich, weil z_0' ein Punkt von $\mathfrak{C}$ sein sollte, für den also $|h(z_0')| = 1$ sein müßte.

Um nun (2.1) zu beweisen, gehen wir von (2.3) und (2.4) aus. Setzt man

$$(-h(-dz))^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \delta_n^{(\nu)} z^n, \qquad \text{also} \qquad (h(z))^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \delta_n^{(\nu)} (-1)^{n-\nu} \left(\frac{z}{d}\right)^n,$$

so ist

$$\delta_n^{(\nu)} \geq 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} = -h(-d) = 1$$

und

$$\alpha_{n\nu} = d^n \delta_n^{(\nu)} (-1)^{n-\nu} \frac{1}{d^n} = (-1)^{n-\nu} \delta_n^{(\nu)}.$$

Zunächst ist $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-\nu} \delta_n^{(\nu)} = 0$ für jedes feste ν, da $(-h(-dz))^\nu$ in $|z| < 1$ beschränkt ist. Setzt man weiter

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{n\nu}| = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_n^{(\nu)}, \tag{2.8}$$

[11]) Das heißt es ist $\gamma_\nu = (-1)^\nu |\gamma_\nu|$ oder $\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1} |\gamma_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

so ist nur noch die Beschränktheit der Folge $\{\sigma_n\}$ darzutun. Dazu benützen wir die gleich zu beweisende Rekursionsformel

$$(2.9) \qquad \sigma_n = \delta_1^{(1)}\sigma_{n-1} + \delta_2^{(1)}\sigma_{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}^{(1)}\sigma_1 + \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und beachten, daß $\sigma_1 = \delta_1^{(1)} \leq 1$ ist. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} = 1$ folgt aus (2.9) durch Induktion $\sigma_n \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Es bleibt also noch (2.9) zu beweisen. Wegen (2.8) ist

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-h(-dz)\right)^{\nu} = \frac{1}{1 + h(-dz)}$$

und somit

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n\right)\left(-h(-dz)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n,$$

woraus (2.9) unmittelbar abgelesen werden kann[12]).

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die in Satz 7 auftretende Bedingung für $h(z)$ für viele bekannte $\mathfrak{E}$-Verfahren erfüllt ist. So ist z. B. bei dem in § 1 untersuchten E_p-Verfahren $(p > 0)$

$$h(z) = \frac{(p+1)z}{1 + pz} = (p+1)z \sum_{\nu=0}^{\infty} (-pz)^{\nu},$$

und ein von MERSMAN [*11*] eingeführtes Verfahren gehört zu

$$h(z) = \frac{4z}{(1+z)^2} = 4z \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(-z)^{\nu},$$

wie SCOTT und WALL gezeigt haben ([*16*], S. 270). Ein von REY PASTOR [*14*] eingeführtes Verfahren gehört (vgl. AMERIO [*1*]) zu

$$h(z) = z\, e^{1-z} = e \cdot z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{\nu}}{\nu!}.$$

---

[12]) Den Sätzen 6 und 7 liegt folgendes allgemeine Prinzip zugrunde, auf das uns Herr JURKAT freundlicherweise aufmerksam machte: Bei den Beweisen kommt es in beiden Fällen darauf an, daß gewisse Zeilennormen beschränkt sind, ganz entsprechend wie bei Permanenzsätzen. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß unter zusätzlichen Voraussetzungen genau dann aus $\alpha_n \to 0$ stets $a_n d^n \to 0$ folgt, wenn die durch

$$g_1(\omega) = \frac{h(\delta\omega)}{h(\delta)} \quad \text{mit} \quad \delta = g(\xi), \qquad |g(\xi)| = \operatorname*{Min}_{|\omega|=1} |g(\omega)| = d$$

gegebene Reihentransformation $\mathfrak{E}_1$ permanent ist. Der Beweis beruht auf der Annahme, daß die Funktionen

$$\frac{1-\omega}{1-g_1(\omega)} \quad \text{und} \quad \frac{1-g_1(\omega)}{1-\omega}$$

für $\omega = 1$ absolut konvergente Potenzreihen in ω besitzen. Mit Hilfe der bekannten Permanenzbedingungen von GRONWALL [*6*] und PERRON [*12*] für allgemeine EULER-Verfahren kann man wieder zu den Sätzen 6 und 7 (in etwas abgeschwächter Form) gelangen.

Literatur.

[1] AMERIO, L.: Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla transformazione di Laplace. Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **8**, 167—180 (1939). — [2] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [3] FATOU, P.: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math. **30**, 335—400 (1906). — [4] GAIER, D.: Complex Tauberian theorems for power series. Erscheint demnächst in den Trans. Amer. Math. Soc. — [5] GAIER, D.: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **56**, 326—334 (1952). — [6] GRONWALL, T. H.: Summation of series and conformal mapping. Ann. of Math. (2) **33**, 101—117 (1932). — [7] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [8] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **58**, 186—203 (1953). — [9] KNOPP, K.: Über Polynomentwicklungen im MITTAG-LEFFLERschen Stern durch Anwendung der EULERschen Reihentransformation. Acta math. **47**, 313—335 (1926). — [10] LANDAU, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1929. — [11] MERSMAN, W. A.: A new summation method for divergent series. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 667—673 (1938). — [12] PERRON, O.: Über eine Verallgemeinerung der EULERschen Reihentransformation. Math. Z. **18**, 157—172 (1923). — [13] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenzfaktoren beim EULER-KNOPPschen Limitierungsverfahren. Math. Z. **55**, 288—291 (1952). — [14] REY PASTOR, J.: Un método de sumación de series. Rend. Circ. Mat. Palermo **55**, 450—455 (1931). — [15] RIESZ, M.: Über einen Satz des Herrn FATOU. J. reine angew. Math. **140**, 89—99 (1911). — [16] SCOTT, W. T., and H. S. WALL: The transformation of series and sequences. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 255—279 (1942).

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 10. Januar 1953.)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 243—264 (1953)

Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen.

Von
BERTRAM HUPPERT.

Einleitung.

Einige in den letzten Jahren erschienene Arbeiten beschäftigen sich mit endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$, welche sich als Produkt von paarweise vertauschbaren Untergruppen darstellen lassen. (Unter dem Produkt von zwei Untergruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ hat man dabei die Menge aller Elemente HK mit $H \in \mathfrak{H}$ und $K \in \mathfrak{K}$ zu verstehen. Entsprechendes gilt für mehr als zwei Faktoren.) Eine solche Zerlegung bezeichnet man als eine Faktorisierung der Gruppe. Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn $\mathfrak{G}$ sich als Produkt von m paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen endlicher Ordnung schreiben läßt. Zur einfachen Verständigung sei eine solche Gruppe als Z_m-zerlegbar bezeichnet. Die Z_1-zerlegbaren Gruppen sind also genau die zyklischen Gruppen endlicher Ordnung. Den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bilden die Z_2-zerlegbaren Gruppen. (Übrigens ist die Zahl m zu einer vorgelegten Z_m-zerlegbaren Gruppe keineswegs eindeutig bestimmt; die zyklische Gruppe der Ordnung 6 ist Z_1-zerlegbar und Z_2-zerlegbar. Jede Z_1-zerlegbare Gruppe $\{A\}$ ist auch Z_2-zerlegbar vermöge $\{A\} = \{A\}\{E\}$.)

Zunächst die bisherigen Ergebnisse über Z_m-zerlegbare Gruppen: Rédei (s. Literaturverzeichnis [11]) betrachtete Produkte einer zyklischen Gruppe endlicher Ordnung mit einer zyklischen Gruppe unendlicher Ordnung. Sein Ziel war die Bestimmung der Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$, welche in der Vertauschungsrelation

$$A^x B^y = B^{f(x,y)} A^{g(x,y)}$$

auftreten. Die Rédeische Arbeit hat mit der vorliegenden Untersuchung keine Berührungspunkte. Itô [6] bewies als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes die Auflösbarkeit Z_2-zerlegbarer Gruppen. Wielandt [18] dehnte dieses Resultat auf Z_m-zerlegbare Gruppen aus. Weiter zeigte er, daß die Sylowgruppe zum größten Primteiler der Gruppenordnung in einer Z_m-zerlegbaren Gruppe stets invariant ist und bewies ganz allgemeine Sätze über die Faktorisierung der Sylowgruppen und Sylowkomplemente (s. P. Hall [2]) von faktorisierbaren Gruppen. An diese Ergebnisse knüpft die vorliegende Arbeit an.

In Kap. I werden die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen studiert, welche nach Wielandt [18] als Sylowgruppen der allgemeinen Z_2-zerlegbaren Gruppen auftreten. Diese p-Gruppen lassen sich für ungerade Primzahlen p sehr einfach

beschreiben: Sie besitzen einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe. Im Falle $p=2$ liegen die Verhältnisse schwieriger. Hier konnten wir nicht zu abschließenden Ergebnissen gelangen. Bemerkenswert ist die Charakterisierung der Z_2-zerlegbaren p-Gruppen für $p>3$ durch die Anzahl ihrer Elemente der Ordnung p.

§ 4 in Kap. II enthält neue Herleitungen der Sätze von Itô und Wielandt. Insbesondere ergibt sich als Verschärfung Wielandtscher Ergebnisse folgendes Resultat: Jede Hauptreihe einer Z_2-zerlegbaren Gruppe ist primzahlstufig, d.h. jede Z_2-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar (s. unter „Bezeichnungen"). Daraus folgen interessante Eigenschaften der Z_2-zerlegbaren Gruppen: Die Kommutatorgruppe ist nilpotent; jede maximale Untergruppe hat Primzahlindex; jede irreduzible Darstellung läßt sich auf monomiale Gestalt transformieren. § 4 ist von Kap. I fast unabhängig. Deshalb lassen sich die Ergebnisse von § 4 auf Z_m-zerlegbare Gruppen ausdehnen, was in § 6 durchgeführt wird. In § 5 wird die Kenntnis der Sylowgruppen Z_2-zerlegbarer Gruppen zu ungeraden Primzahlen ausgenutzt. So kommt man zu der Aussage $(\mathfrak{G}'')=2^n$. Eine weitergehende Theorie der Z_2-zerlegbaren 2-Gruppen würde noch schärfere Sätze liefern.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{K})$ = Anzahl der Elemente des Komplexes $\mathfrak{K}$; ist speziell $\mathfrak{K}$ eine Gruppe, so ist $(\mathfrak{K})$ die Ordnung von $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$. $\Phi(\mathfrak{G})$ = Frattinigruppe von $\mathfrak{G}$ = Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; z.B. $\mathfrak{G}<\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}\lhd\mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{E}$ = Einheitsgruppe, welche nur aus dem einzigen Element E besteht. $\mathfrak{G}$ heißt überauflösbar, wenn es eine Hauptreihe

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\rhd\mathfrak{N}_1\rhd\cdots\qquad\rhd\mathfrak{N}_j=\mathfrak{E}\qquad(\mathfrak{N}_i\lhd\mathfrak{G})$$

gibt, deren Faktorgruppen $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ Primzahlordnung haben; vgl. Zappa [19]. Wir setzen $S^{-1}AS=A^S$ und $(A,B)=ABA^{-1}B^{-1}$. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Teilkomplexe einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ die von allen Kommutatoren (U,V) mit $U\in\mathfrak{U}$ und $V\in\mathfrak{V}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Speziell für die Theorie der Z_2-zerlegbaren p-Gruppen in Kap. I führen wir noch ein (Bezeichnungen gemäß P. Hall [3]):

$\mathfrak{G}^{[i]}=i$-tes Glied der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^{[i+1]}=(\mathfrak{G}^{[i]},\mathfrak{G})$. $\mathfrak{Z}_i=i$-tes Glied der aufsteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Z}_{i-1}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1})$. $\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G})$ = Erzeugnis aller X^{p^i} mit $X\in\mathfrak{G}$; $\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})\cdot\mathfrak{G}'$. $\Omega_i(\mathfrak{G})$ = Erzeugnis aller $X\in\mathfrak{G}$ mit $X^{p^i}=E$. $d(\mathfrak{G})$ = minimale Erzeugendenzahl von $\mathfrak{G}$; $(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))=p^{d(\mathfrak{G})}$. $c(\mathfrak{G})$ = Klasse von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^{[c+1]}=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}_c=\mathfrak{G}$. $\omega(\mathfrak{G})$ = Hallsche Basiszahl; $(\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}))=p^{\omega(\mathfrak{G})}$. $p^{\mu(\mathfrak{G})}$ = kleinstes gemeinsames Vielfaches der Ordnungen der Elemente von $\mathfrak{G}$.

Kap. I. Z_2-zerlegbare p-Gruppen.

Generelle Voraussetzung dieses Kapitels:

$$\mathfrak{G}=\{A\}\{B\},\qquad(\mathfrak{G})=p^n,\qquad(\{A\})=p^a,\qquad(\{B\})=p^b.$$

§1. Allgemeine Sätze über Z_2-zerlegbare p-Gruppen.

Satz 1. *Jede Faktorgruppe einer Z_2-zerlegbaren Gruppe ist Z_2-zerlegbar.*

Dieser Satz ist evident. Er gilt offenbar sogar für Z_m-zerlegbare Gruppen beliebiger Ordnung, wovon vielfach Gebrauch gemacht werden wird.

Satz 2. $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) = \{A^p\}\{B^p\}$.

Beweis. Der Komplex $\mathfrak{R} = \{A^p\}\{B^p\}$ enthält

$$(\mathfrak{R}) = \frac{(\{A^p\})(\{B^p\})}{(\{A^p\} \cap \{B^p\})} = \frac{p^{a-1}p^{b-1}}{(\mathfrak{D})}$$

Elemente, wenn $\mathfrak{D} = \{A^p\} \cap \{B^p\}$ gesetzt wird. Dies ergibt sich so: $A^{x_1 p} B^{y_1 p} = A^{x_2 p} B^{y_2 p}$ gilt genau dann, wenn $A^{(x_1 - x_2)p} = B^{(y_2 - y_1)p}$ in $\mathfrak{D}$ liegt. $\mathfrak{R}$ enthält somit p^{a+b-2}: $(\mathfrak{D})^2$ elementefremde Nebenklassen von $\mathfrak{D}$, in denen insgesamt $p^{a+b-2}:(\mathfrak{D})$ verschiedene Elemente liegen. Ebenso erhält man

$$(\mathfrak{G}) = \frac{p^a p^b}{(\{A\} \cap \{B\})}.$$

Damit wird

$$\frac{(\mathfrak{G})}{(\mathfrak{R})} = \frac{(\{A^p\} \cap \{B^p\})\, p^2}{(\{A\} \cap \{B\})} \leq p^2.$$

Da der Satz für zyklische Gruppen selbstverständlich ist, kann $d(\mathfrak{G}) = 2$ angenommen werden. Dann ist $(\Phi(\mathfrak{G})) = (\mathfrak{G})\, p^{-2}$. Wegen $\mathfrak{R} < \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) < \Phi(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{R}) \geq (\Phi(\mathfrak{G}))$ folgt nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G})$.

Satz 3. *Die Untergruppen $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}$ mit $0 \leq s \leq a$ und $0 \leq t \leq b$ bilden einen distributiven Verband*[1]).

Beweis. a) Um zu zeigen, daß $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}$ eine Gruppe ist, braucht man nur nachzuweisen, daß $\{A^p\}\{B\}$ eine Gruppe ist. (Die volle Behauptung folgt dann leicht durch einen Induktionsschluß.) Das geschieht so: $\mathrm{mod}\,\Phi(\mathfrak{G})$ gilt $\{A^p\}\{B\} \equiv \{B\}\{A^p\}$. Zusammen mit $\Phi(\mathfrak{G}) < \{A^p\}\{B\} \cap \{B\}\{A^p\}$ ergibt das die Behauptung. Speziell folgt noch die Vertauschbarkeit der Untergruppen $\{A^{p^s}\}$ und $\{B^{p^t}\}$.

b) Jetzt betrachte man die Vereinigungsgruppe $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cup \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$ von zwei Gruppen obiger Art. (Das Zeichen $\cup$ bezeichnet hier also nicht die mengentheoretische Vereinigung!)

$$\begin{aligned}\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cup \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\} &= \{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}\{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\} \\ &= \{A^{p^s}\}\{A^{p^i}\}\{B^{p^t}\}\{B^{p^k}\} = \{A^{p^m}\}\{B^{p^r}\}\end{aligned}$$

mit $m = \mathrm{Min.}\,(s, i)$ und $r = \mathrm{Min.}\,(t, k)$.

c) Bei der Betrachtung des Durchschnitts $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cap \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$ kann man $s \geq i$ annehmen. Von Interesse ist dann nur noch der Fall $t < k$. Sei nun $\mathfrak{D} = \{A\} \cap \{B\} = \{A^{p^\alpha}\} = \{B^{p^\beta}\}$ mit geeigneten α und β, $\mathfrak{R} = \{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cap \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$, $K \in \mathfrak{R}$. Dann ist $K = A^{\lambda p^s} B^{\mu p^t} = A^{\nu p^i} B^{\varrho p^k}$ mit geeigneten $\lambda, \mu, \nu, \varrho$;

[1]) Herrn Dr. Pickert verdanke ich den Hinweis auf die Distributivität dieses Verbandes.

daraus folgt $A^{\lambda p^s - \nu p^j} \in \mathfrak{D} = \{A^{p^\alpha}\}$, $p^\alpha | \lambda p^s - \nu p^j$. Ist $s \geq \alpha$, so hat man $\mathfrak{R} < \{A^{p^\alpha}\}\{B^{p^\beta}\} < \{B^{p^\beta}\}\{B^{p^\beta}\}$ und $\mathfrak{R}$ hat die gewünschte Gestalt. Sei also $s < \alpha$. Aus $p^\alpha | \lambda p^s - \nu p^j$ folgt wegen $s < \alpha$ nun $p^s | \nu p^j$. Ein entsprechender Schluß für die B-Komponente liefert $p^k | \mu p^l$. Damit ergibt sich $\mathfrak{R} = \{A^{p^s}\}\{B^{p^k}\}$, also allgemein

$$\{A^{p^s}\}\{B^{p^l}\} \cap \{A^{p^j}\}\{B^{p^k}\} = \{A^{p^g}\}\{B^{p^h}\}$$

mit $g = \text{Max.}(s, j)$ und $h = \text{Max.}(t, k)$.

d) Aus b) und c) ersieht man, daß die betrachteten Gruppen wirklich einen Verband bilden. Dieser ist homomorphes Bild des Verbandes aller Zahlenpaare (s, t) mit der Teilordnung $(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2)$ für $s_1 \geq s_2$ und $t_1 \geq t_2$. Da der letzte Verband distributiv ist, ist auch der Verband der betrachteten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ distributiv.

Satz 4. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{A^i\}\{B^j\}$ *für passende* i *und* j.

Beweis. Sei $Z = A^l B^m \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Dann ist $AZA^{-1} = A^l A B^m A^{-1} = A^l B^m$, also $B^m \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ebenso gilt auch $A^l \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Sind nun i und j die kleinsten natürlichen Zahlen mit $A^i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ und $B^j \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, so wird $i | l$ und $j | m$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 5. *Es gibt einen Normalteiler* $\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{N} < \{A\}$ *und* $(\mathfrak{N}) \geq p^{2a-n+1}$.

Beweis. Man stelle $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe $\bar{\mathfrak{G}}$ in p^{n-a} Symbolen, den Nebenklassen nach $\{A\}$. $\{\bar{A}\}$ ist dann die Untergruppe derjenigen Permutationen, welche ein festes Symbol in Ruhe lassen. $\{\bar{A}\}$ ist daher eine zyklische Gruppe in höchstens $p^{n-a} - 1$ Symbolen. $\bar{A}$ besteht somit aus Zyklen, deren Länge p^{n-a-1} nicht übersteigt. Es existiert also ein Normalteiler $\mathfrak{N} < \{A\}$ mit p^a: $(\mathfrak{N}) \leq p^{n-a-1}$, d.h. $(\mathfrak{N}) \geq p^{2a-n+1}$ [2]).

Zusatz. *Sei* $(\{A\}) = (\{B\}) = p^a$ *und* $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$. *Dann ist* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ *nicht zyklisch.*

Beweis. Gemäß Satz 5 existieren folgende Normalteiler von $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{M} < \{A\}, \quad (\mathfrak{M}) = p.$$

$$\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{N} < \{B\}, \quad (\mathfrak{N}) = p.$$

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ liegen beide in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$; s. [13] S. 70. Da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ keine Elemente gemeinsam haben, ist $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ eine nichtzyklische Untergruppe von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$.

Satz 6. $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \cap \{A\}) \geq p^{2a-n}$.

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{U} = \{A\}\{B^p\} < \mathfrak{G}$ (Satz 3). Gemäß der Induktionsvoraussetzung ist $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}) \cap \{A\}) \geq p^{2a-n+1}$, d.h. $A^{p^{n-a-1}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{U})$, $B^p A^{p^{n-a-1}} B^{-p} = A^{p^{n-a-1}}$. Nach Satz 5 existiert ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \{A\}$ und $(\mathfrak{N}) \geq p^{2a-n+1}$. Es folgt $\{A^{p^{n-a-1}}\} \lhd \mathfrak{G}$, $BA^{p^{n-a-1}}B^{-1} = A^{\lambda p^{n-a-1}}$. Aus $B^p A^{p^{n-a-1}} B^{-p} = A^{p^{n-a-1}}$ entnimmt man nach einer kurzen Rechnung $\lambda \equiv 1 \ (p^{2a-n})$. Die Untergruppe $\mathfrak{B} = \{A^{p^{n-a-1}}\}\{B\}$ hat höchstens die Klasse 2; dies ergibt sich aus

[2]) Ähnliche Überlegungen findet man bei J. Szép [14].

$(B, A^{p^{n-a-1}}) = A^{(\lambda-1)p^{n-a-1}} \in \{A^{p^{a-1}}\} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. (Siehe wieder [13].) Nun schließt man so: $(B, A^{p^{n-a}}) = (B, A^{p^{n-a-1}})^p = (B^p, A^{p^{n-a-1}}) = E$, d.h.

$$A^{p^{n-a}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}), \quad (\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \cap \{A\}) \geq p^{2a-n}.$$

(Bei dem letzten Schluß nehme man [20] S. 57, Formel (9) zur Hilfe.)

§ 2. Z_2-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung.

In diesem ganzen Paragraphen gelten die generellen Voraussetzungen dieses Kapitels mit dem Zusatz $p \neq 2$.

Satz 7. *$\mathfrak{G}$ ist regulär im Sinne von P. Hall [3].*

Beweis. Nach Satz 2 gilt $\omega(\mathfrak{G}) \leq 2$ für die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen. Für $p > 2$ hat man daher $\omega(\mathfrak{G}) \leq p-1$, woraus die Regularität folgt. (Siehe P. Hall [4] S. 477, Theorem 2.3.)

Satz 8. *$d(\mathfrak{G}) \leq 2$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})$ sind zusammen charakteristisch für Z_2-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung.*

Beweis. Sei $d(\mathfrak{G}) = 2$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})$. [Ist $d(\mathfrak{G}) = 1$, so ist $\mathfrak{G}$ zyklisch, und man ist schon fertig.] Wegen

$$p^2 = (\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = (\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})) = p^{\omega(\mathfrak{G})}$$

ist $\mathfrak{G}$ regulär und besitzt eine Basis von $\omega(\mathfrak{G}) = 2$ Elementen, d.h. jedes $X \in \mathfrak{G}$ läßt sich darstellen als $X = A^\alpha B^\beta$, wobei A und B feste Elemente aus $\mathfrak{G}$ sind, α und β eindeutig mod $(\{A\})$ bzw. mod $(\{B\})$ festgelegt sind ([3] S. 90, Theorem 4.51). Also hat man $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$, sogar mit $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$.

Daß umgekehrt die behaupteten Relationen in Z_2-zerlegbaren p-Gruppen erfüllt sind, wurde schon in Satz 2 gezeigt, bis auf die triviale Beziehung $d(\mathfrak{G}) \leq 2$.

Wir notieren noch als Nebenergebnis:

Satz 9. *Jede Z_2-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung besitzt eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$ mit $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$.*

Hilfssatz 10. *Ist $(\mathfrak{G}') = p$, so läßt $\mathfrak{G}$ sich beschreiben durch die folgenden Relationen:*

$$S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \qquad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2.$$

Beweis. Aus $(\mathfrak{G}') = p$ folgt $\mathfrak{G}' < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, denn jeder Normalteiler der Ordnung p einer p-Gruppe liegt im Zentrum derselben ([13] S. 70). Für beliebige Elemente X und Y aus $\mathfrak{G}$ ergibt sich deshalb $(X^p, Y) = (X, Y)^p = E$; s. [20] S. 57, Formel (9). Es folgt $X^p \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Wegen $d(\mathfrak{G}) = 2$ läßt sich jede maximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ darstellen in der Form $\mathfrak{U} = \{\Phi(\mathfrak{G}), M\}$ mit $M \notin \Phi(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{U}$ ist abelsch vermöge $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Diejenigen Gruppen $\mathfrak{G}$, welche nicht abelsch sind, und deren eigentliche Untergruppen alle abelsch sind, hat unter anderen Rédei bestimmt; s. [10]. Die

p-Gruppen unter diesen mit $p \neq 2$ werden beschrieben durch

Typ I: $S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \quad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \quad \alpha \geq 2, \quad (\mathfrak{G}) = p^{\alpha+\beta}.$

Typ II: $S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = C^p = E, \quad (S,T) = C, \quad (S,C) = E, \quad (T,C) = E,$
$(\mathfrak{G}) = p^{\alpha+\beta+1}.$

Typ II ist keine Z_3-zerlegbare Gruppe, scheidet also für uns aus; denn $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \{S^p\} \times \{T^p\}$ hat in Typ II den Index p^3. Übrig bleibt Typ I mit den behaupteten Relationen[3]).

Satz 11. *$\mathfrak{G}'$ ist zyklisch.*

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$ erbracht. Angenommen $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch. Dann betrachte man $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}^*$. Gemäß der Induktionsvoraussetzung darf man annehmen, daß $\mathfrak{G}^{*\prime}$ vom Typ (p, p) ist. Es genügt also zu zeigen, daß dies nicht eintreten kann.

Sei $\mathfrak{G}^{*\prime} = \{K\} \times \{C\}$ mit $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Läge auch K in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$, so hätte man $\mathfrak{G}^{*\prime} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Dann würde das Zentrumselement (A^*, B^*) schon $\mathfrak{G}^{*\prime}$ erzeugen, und $\mathfrak{G}^{*\prime}$ wäre doch zyklisch. Es gilt also $K \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ und $\mathfrak{G}^{*\prime} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) = \{C\}$. Jetzt betrachte man $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$:

$$\{\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)\}' \cong \mathfrak{G}^{*\prime} \cdot \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) \cong \mathfrak{G}^{*\prime}/\mathfrak{G}^{*\prime} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) \cong \{K\}.$$

$\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ hat somit die in Hilfssatz 10 angegebene Struktur:

$$\overline{S}^{p^\alpha} = \overline{T}^{p^\beta} = \overline{E}, \qquad \overline{T}\,\overline{S}\,\overline{T}^{-1} = \overline{S}^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2.$$

In $\mathfrak{G}^*$ selbst ist dann

$$S^{p^\alpha} = Z_1, \qquad T^{p^\alpha} = Z_2, \qquad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}} Z_3 \quad \text{mit} \quad Z_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*).$$

Nun folgt

$$T S^{p^{\alpha-1}} T^{-1} = S^{p^{\alpha-1}(1+p^{\alpha-1})} Z_3^{p^{\alpha-1}}, \qquad (T, S^{p^{\alpha-1}}) = (S^{p^{\alpha-1}} Z_3)^{p^{\alpha-1}} = (T,S)^{p^{\alpha-1}} = E.$$

(Letzteres wegen $\alpha \geq 2$ und der Struktur von $\mathfrak{G}^{*\prime}$.) Da $\mathfrak{G}^*$ von S und T erzeugt wird [wegen $\mathfrak{G}^{*\prime} \neq \mathfrak{E}$ und $d(\mathfrak{G}^*) = 2$ gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) < \Phi(\mathfrak{G}^*)$!], folgt $S^{p^{\alpha-1}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Das ist jedoch nicht wahr, da erst S^{p^α} in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ liegt. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mathfrak{G}'$ doch zyklisch ist.

Satz 11 ließe sich bei stärkerer Ausnutzung der Regularität wesentlich einfacher beweisen. Die angegebenen Überlegungen führen jedoch auch für $p = 2$ zu einem Resultat (s. § 3).

12. Hauptsatz I. *Jede Z_3-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung besitzt einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe.*

Beweis. Für abelsche Gruppen stimmt der Satz. Er gilt auch im Falle $(\mathfrak{G}') = p$, wie man aus Hilfssatz 10 entnimmt. Sei weiterhin $(\mathfrak{G}') > p$. Der Beweis wird wieder durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$ geführt.

[3]) Siehe etwa auch H. Liermann [8].

$\Omega_1(\mathfrak{G}') = \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$. $(\mathfrak{N}) = p$, da $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Weiter hat man $\mathfrak{N} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ kann der Satz als richtig angenommen werden. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ enthält daher einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ mit zyklischer Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}{\mathfrak{S}/\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ wird erzeugt von der Zentrumsuntergruppe $\mathfrak{N}$ und einem weiteren Element, ist demnach abelsch. Ist $\mathfrak{S}$ nicht zyklisch, so muß $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$ gelten, wo $\mathfrak{L}$ eine zyklische Gruppe ist. Nun folgt $\mathfrak{N} < \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}')$, da $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{G}')$, $(\mathfrak{G}') > p$ und $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Andererseits hat man $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{S}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{L}) \not> \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{S} > \mathfrak{G}'$ ist das ein Widerspruch. $\mathfrak{S}$ ist also doch zyklisch.

$\mathfrak{G}$ wird definiert durch die folgenden Gleichungen:

$$S^{p^a} = E, \qquad T^{p^b} = S^t, \qquad T S T^{-1} = S^k, \qquad k^{p^b} \equiv 1 \,(p^a), \qquad t(k-1) = 0 \,(p^a).$$

(Siehe [20] S. 95, Satz 20.) $\mathfrak{G}$ besitzt somit eine „normale Zerlegung", in der der eine Faktor Normalteiler ist. S und T werden in Zukunft stets die Elemente einer normalen Zerlegung bezeichnen, während A und B die Elemente sind, welche die ursprüngliche Zerlegung repräsentieren.

Hier taucht nun die Frage auf, ob es auch eine normale Zerlegung gibt, in der Satz 9 befriedigt wird, d.h. ob es einen zyklischen Normalteiler $\{S\}$ mit zyklischer Vertretergruppe gibt. Ist S ein Element von maximaler Ordnung in $\mathfrak{G}$, so stimmt dies ([13] S. 71, Satz 86). Im allgemeinen gibt es aber keine solche Zerlegung.

Beispiel. Sei $\mathfrak{G}$ definiert durch die Gleichungen $S^{p^3} = E$, $T^{p^3} = S^{p^2}$, $T S T^{-1} = S^{1+p}$. Sei nun $\{L\} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\{L\}$ zyklisch mit $L = S^i T^j$. Dann ist $\{L\}$ eine Obergruppe von $\mathfrak{G}' = \{S^p\}$, also $S^p = L^{\lambda p^x}$ mit geeignetem x und geeignetem zu p teilerfremden λ. Eine einfache Rechnung liefert die Bedingungen $x = 1$, $p \nmid i$, $p^2 | j$, $(\{L\}) = p^3$. Als Vertretergruppe von $\mathfrak{G}/\{L\}$ darf man $\{S^k T\}$ annehmen. Aber $(S^k T)^{p^3} = T^{p^3} = S^{p^2} \neq E$. In $\mathfrak{G}$ gibt es demnach keinen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Vertretergruppe.

Aus den angegebenen Relationen für die Z_2-zerlegbaren Gruppen entnimmt man durch eine einfache Rechnung die Richtigkeit der Formel

$$(\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{O}_j(\mathfrak{G})) < \mathfrak{O}_{i+j+1}(\mathfrak{G}).$$

Setzt man darin $j = 0$, so sieht man, daß die $\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G})$ eine Zentralkette von $\mathfrak{G}$ bilden. Die allgemeine Theorie der Zentralketten (vgl. [20], S. 118–121) führt dann zu den Gleichungen

$$\mathfrak{G}^{[i+1]} < \mathfrak{O}_i(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_{\mu-i}.$$

Speziell hat man $c(\mathfrak{G}) \leq \mu(\mathfrak{G})$. (Diese Ergebnisse sind von Interesse, da sie sich auf Z_m-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung übertragen lassen.) Liegt der im Zusatz zu Satz 5 behandelte Fall vor, so erhält man wegen $\Omega_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_{\mu-1}(\mathfrak{G})$ aus der obigen Gleichung wieder das frühere Resultat, allerdings mit der Einschränkung $p \neq 2$.

Satz 13. *Die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen ungerader Ordnung sind genau die regulären p-Gruppen ungerader Ordnung, welche höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten.*

Beweis. a) $\mathfrak{G}$ sei regulär und enthalte höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p. Gibt es in $\mathfrak{G}$ nur eine Untergruppe der Ordnung p, so ist $\mathfrak{G}$ zyklisch; s. [20] S. 112, Satz 15. Andernfalls kann man in $\mathfrak{G}$ ein Zentrumselement Z der Ordnung p und noch ein weiteres Element R der Ordnung p wählen, derart, daß $\mathfrak{U}=\{Z,R\}$ die Ordnung p^2 hat. $\mathfrak{U}$ umfaßt dann alle Untergruppen der Ordnung p. $\mathfrak{U}=\Omega_1(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{U}$ alle X mit $X^p=E$ enthält. Aus $p^2=(\Omega_1(\mathfrak{G}))=p^{\omega(\mathfrak{G})}$ (s. P. Hall [3] S. 79, Theorem 4.3) folgt $\omega(\mathfrak{G})=2$. Demnach besitzt $\mathfrak{G}$ eine Basis von 2 Elementen, ist also Z_2-zerlegbar.

b) Sei jetzt $\mathfrak{G}$ Z_2-zerlegbar. Dann ist $\omega(\mathfrak{G})\leq 2$, also wie eben wegen der Regularität von $\mathfrak{G}$ wieder $(\Omega_1(\mathfrak{G}))\leq p^2$. Nun kann $\mathfrak{G}$ höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten, nämlich die eigentlichen Untergruppen $\mathfrak{B}\neq\mathfrak{E}$ von $\Omega_1(\mathfrak{G})$.

Für $p\geq 5$ darf in Satz 13 die Voraussetzung der Regularität gestrichen werden. Eine irreguläre p-Gruppe besitzt nämlich mindestens p^{p-1} Elemente der Ordnung p (P. Hall [4] S. 479, Theorem 2.41). Jede p-Gruppe mit nur p^2 Lösungen von $X^p=E$ ist daher regulär, sofern $p>3$. Für $p\geq 5$ gibt somit Satz 13 in Verbindung mit Hauptsatz I eine Übersicht über alle p-Gruppen mit höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p. Im Falle $p=3$ treten jedoch weitere Typen auf:

Beispiel. Die Relationen

$$S^9=E,\quad R^{-3}=S^3,\quad (R,S)=T,\quad T^3=E,\quad (S,T)=S^{-3},\quad (R,T)=E$$

definieren eine Gruppe der Ordnung 3^4; s. [1], S. 142. Für diese Gruppe benutzt man mit Vorteil folgende monomiale, treue Darstellung

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\ \varepsilon^3&0&0\end{pmatrix},\qquad R=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-1}&0&0\\0&\varepsilon^2&0\\0&0&\varepsilon^{-1}\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-3}&0&0\\0&\varepsilon^3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

wobei ε eine primitive 9-te Einheitswurzel ist. Man berechnet jetzt leicht

$$\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})=\{S^3\}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}^{[3]},\qquad \Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}'=\Omega_1(\mathfrak{G})=\{S^3\}\times\{T\}.$$

Wegen

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}))=3^3\neq(\Omega_1(\mathfrak{G}))=3^2$$

ist diese Gruppe irregulär. Sie umfaßt 9 Lösungen von $X^3=E$.

Satz 14. *Jede Untergruppe einer Z_2-zerlegbaren p-Gruppe ungerader Ordnung ist Z_2-zerlegbar.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}$ ist dann auch regulär und enthält sicher nicht mehr Untergruppen der Ordnung p als $\mathfrak{G}$, also höchstens $p+1$ Stück. Satz 13 zeigt nun, daß auch $\mathfrak{U}$ Z_2-zerlegbar ist.

Satz 15. *Je zwei Untergruppen einer Z_2-zerlegbaren p-Gruppe ungerader Ordnung sind vertauschbar.*

Beweis. Es genügt, diesen Satz für zwei zyklische Gruppen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zu beweisen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) = \Omega_1(\mathfrak{U}_2) = \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2\}$. Eine Induktion nach der Gruppenordnung liefert

$$\mathfrak{U}_1/\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{U}_2/\mathfrak{N} = \mathfrak{U}_2/\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{U}_1/\mathfrak{N}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{N} = \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1.$$

Wegen $(\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{U}_2) = (\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)$ folgt $\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1$.

b) $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) \neq \Omega_1(\mathfrak{U}_2)$. Dann ist $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) \cdot \Omega_1(\mathfrak{U}_2) = \Omega_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$. Wie eben bekommt man nun $\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{M} = \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1$ und dann $\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1$.

(Satz 15 wurde mit verbandstheoretischen Überlegungen von Iwasawa bewiesen; vgl. [7] S. 189, Satz 14. Den obigen einfachen Beweis verdanke ich Herrn Prof. Wielandt.)

Ein Satz über die Automorphismen nichtabelscher, Z_2-zerlegbarer p-Gruppen ungerader Ordnung, der in § 5 gebraucht wird, sei an dieser Stelle noch angegeben:

Satz 16. *Ist $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche, Z_2-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung, so induziert die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ eine Automorphismengruppe, welche sich bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ durch Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ darstellen läßt.* [Die benutzte Basis wird sich beim Beweis aus der Struktur von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}')$ ergeben.]

Beweis. Die Automorphismen von $\mathfrak{G}$ kann ich als Automorphismen von $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}')$ betrachten, da $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}')$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Bewirkt $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{G}^*$ den identischen Automorphismus, so läßt $\mathfrak{a}$ alle Restklassen nach $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}')$ fest, läßt also wegen $\Phi(\mathfrak{G}) > \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}')$ auch die Restklassen nach $\Phi(\mathfrak{G})$ fest. Nach Hilfssatz 10 wird $\mathfrak{G}^*$ beschrieben durch

$$S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2.$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Automorphismus von $\mathfrak{G}^*$, so hat man

$$S^{\mathfrak{a}} = S^\lambda\,T^\tau, \qquad T^{\mathfrak{a}} = S^\mu\,T^\varrho,$$

$$(T\,S\,T^{-1})^{\mathfrak{a}} = S^\mu\,T^\varrho\,S^\lambda\,T^\tau\,T^{-\varrho}\,S^{-\mu} = S^\mu\,S^{\lambda(1+p^{\alpha-1})^\varrho}\,S^{-\mu(1+p^{\alpha-1})^\tau}\,T^\tau$$
$$= S^{\lambda+(\lambda\varrho-\mu\tau)p^{\alpha-1}}\,T^\tau.$$

Andererseits ist dies gleich dem folgenden Ausdruck:

$$(S^{\mathfrak{a}})^{1+p^{\alpha-1}} = (S^\lambda\,T^\tau)^{1+p^{\alpha-1}} = S^{\lambda+\lambda p^{\alpha-1}}\,T^{\tau+\tau p^{\alpha-1}}.$$

[Man beachte $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}^*) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ und die Tatsache, daß in $\mathfrak{G}^*$ die Relation $(X\,Y)^p = X^p\,Y^p$ gilt.]

Der Vergleich obiger Formeln liefert die Kongruenzen

(1) $\qquad \tau\,p^{\alpha-1} \equiv 0\,(p^\beta)$ und (2) $\quad \lambda \equiv \lambda\,\varrho - \mu\,\tau\,(p)$.

Aus $(T^{\mathfrak{a}})^{p^\beta} = E = S^{\mu\,p^\beta}\,T^{\varrho\,p^\beta}$ erhält man noch

(3) $\qquad \mu\,p^\beta \equiv 0\,(p^\alpha)$.

Für $\alpha \leq \beta$ folgt aus (1) $\mathfrak{p} \mid \tau$. Da $\begin{pmatrix} \lambda & \tau \\ \mu & \varrho \end{pmatrix}$ keine singuläre Matrix ist, ist λ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd; (2) ergibt dann $\varrho \equiv 1 (\mathfrak{p})$. Im Falle $\alpha > \beta$ liefert (3) die Aussage $\mathfrak{p} \mid \mu$. Aus (2) folgt wieder $\varrho \equiv 1 (\mathfrak{p})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 3. Z_2-zerlegbare 2-Gruppen.

Zunächst zeige ein Beispiel, daß jetzt die Verhältnisse wesentlich komplizierter sind:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung 2^5 sei gegeben durch die Relationen

$$B^8 = A^2 = E, \qquad (A, B) = C, \qquad (B, C) = B^4, \qquad (A, C) = E, \qquad C^2 = E.$$

$\mathfrak{G}$ entsteht, wenn man den Normalteiler $\mathfrak{R} = \{A\} \times \{B^4\} \times \{C\}$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 4 erweitert. $B\,\mathfrak{R}$ erzeugt $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, $B^4 \in \mathfrak{R}$. Transformation von $\mathfrak{R}$ mit B^{-1} bewirkt folgenden Automorphismus von $\mathfrak{R}$:

$$A^{B^{-1}} = A\,C, \qquad C^{B^{-1}} = C\,B^4, \qquad (B^4)^{B^{-1}} = B^{B^4}.$$

Faßt man $\mathfrak{R}$ als Vektormodul mit den Basisvektoren A, C, B^4 auf, so wird die Transformation mit B^{-1} durch eine lineare Transformation dieses Moduls dargestellt, nämlich

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine treue monomiale Darstellung der betrachteten Gruppe wird geliefert durch die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet leicht $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{B^4\}$, $\mathfrak{G}' = \{C\} \times \{B^4\}$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_1(\mathfrak{G}) = \{B^2, C\}$.

$(A\,B)^2 = C\,B^2 \notin \{B\}$, $(A\,B)^4 = B^4$. Daher wird $(\{B\}\,\{A\,B\}) = 2^5 = (\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G} = \{B\}\,\{A\,B\}$.

$\mathfrak{G}$ ist also Z_2-zerlegbar, und $\mathfrak{G}'$ ist eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 4. $\mathfrak{G}$ enthält die Untergruppe $\mathfrak{R}$ vom Typus (2,2,2), welche nicht Z_2-zerlegbar ist. Hauptsatz I gilt demnach nicht für 2-Gruppen, und auch Satz 14 ist verletzt. Ferner bestätigt man leicht, daß der Verband der Untergruppen der obigen Gruppe nicht modular ist; die Gruppe besitzt also gewiß nichtvertauschbare Untergruppen. (Ein Beispiel einer nichtmodularen Z_2-zerlegbaren 2-Gruppe wird schon durch die Diedergruppe der Ordnung 8 geliefert.)

Satz 17. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Z_2-zerlegbare 2-Gruppe, so ist $d(\mathfrak{G}') \leq 2$.*

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\Phi(\mathfrak{G}') \neq \mathfrak{E}$. Dann betrachte man $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}')$. Wegen $d(\mathfrak{G}') = d(\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')) \leq 2$ folgt die Behauptung.

b) $\mathfrak{G}$ enthalte einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$. Jetzt folgt die Behauptung aus $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\}' \cong \mathfrak{G}'$.

c) Nun sei $\Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G}'$ elementar abelsch. Weiter gebe es keinen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}) = 2$ und $\mathfrak{N} \not< \mathfrak{G}'$. Dies bedeutet $\Omega_1(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})) < \mathfrak{G}'$. Schließlich kann noch $d(\mathfrak{G}') = 3$ angenommen werden. Nun gilt

$$(A, B^2) = (A, B)\,(A, B)^{B^{-1}} = (A, B)^{-1}(A, B)^{B^{-1}} = \big(B, (A, B)\big) \in \mathfrak{G}^{[3]}$$

$$(A^2, B^2) = (A, B^2)^{A^{-1}}(A, B^2) = \big(A, (A, B^2)\big) \in (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{[3]}) = \mathfrak{G}^{[4]}.$$

Ist $\big(\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) \geq 4$, so hat man $\mathfrak{G}^{[3]} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}^{[4]} = \mathfrak{E}$, $(A^2, B^2) = E$. $\Phi(\mathfrak{G}) = \{A^2\}\{B^2\}$ ist dann abelsch. Wegen $\mathfrak{G}' < \Phi(\mathfrak{G})$ und $d\big(\Phi(\mathfrak{G})\big) \leq 2$ folgt $d(\mathfrak{G}') \leq 2$. Sei also weiterhin $\big(\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) = 2$. Die Voraussetzung $\Omega_1\big(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) < \mathfrak{G}'$ zeigt nun, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ zyklisch ist. Die bei Transformation durch $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ bewirkten Automorphismen lassen sich als lineare Transformationen des Vektormoduls $\mathfrak{G}'$ auffassen. Führt man in dem Modul geeignete Koordinaten ein, so erscheinen die Transformationsmatrizen in Dreiecksgestalt; s. [*13*] S. 222, Satz 204. Genauer erhält man folgendes Aussehen der Matrizen:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus entnimmt man, daß $\mathfrak{G}^{[3]}$ und $\mathfrak{V}_1(\mathfrak{G})$ vertauschbar sind. Es folgt $(B, A^4) = (B, A^2)\,(B, A^2)^{A^{-1}} = \big(A^2, (B, A^2)\big) \in \big(\mathfrak{V}_1(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}^{[3]}\big) = \mathfrak{E}$, also $A^4 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ebenso kommt man zu $B^4 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Nun betrachte man $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^* \cdot (\mathfrak{G}^*) \leq 2^4$. Falls $(\mathfrak{G}^*) \leq 2^3$, so ist $\mathfrak{G}^{*\prime}$ zyklisch. $\mathfrak{G}'$ ist dann eine zyklische Erweiterung der zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, daher $d(\mathfrak{G}') \leq 2$. Im Falle $(\mathfrak{G}^*) = 2^4$ ist nach dem Zusatz zu Satz 5 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ nicht zyklisch, somit $\big(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)\big) \geq 4$. Deshalb wird $(\mathfrak{G}^{*\prime}) = 2$. Wie eben folgt wieder $d(\mathfrak{G}') \leq 2$.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich die in § 2 entwickelte Theorie auch für 2-Gruppen durchführen.

Hilfssatz 18. *Sei $\mathfrak{G}$ Z_2-zerlegbar, $(\mathfrak{G}) = 2^n$, $(\mathfrak{G}') = 2$. Hat jede maximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ höchstens zwei Erzeugende, so wird $\mathfrak{G}$ beschrieben durch*

$$S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = E, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{1+2^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2$$

oder

$$S^4 = E, \qquad S^2 = T^2, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{-1}.$$

Beweis. Genau wie in Hilfssatz 10 zeigt man, daß alle eigentlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind. Nach Rédei [*10*] S. 244 hat dann $\mathfrak{G}$ eine der folgenden Gestalten

Typ I: $\quad S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = E, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{1+2^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2$

Typ II: $\quad S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = C^2 = E, \qquad (S, T) = C, \qquad (S, C) = (T, C) = E$

Typ III: $\quad S^4 = E, \qquad S^2 = T^2, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{-1}$

(Typ III ist die Quaternionengruppe.)

Wir betrachten nun Typ II: $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \{S^2\} \times \{T^2\} \times \{C\}$. Da in Z_2-zerlegbaren Gruppen stets $d(\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})) \leq 2$ gilt, folgt für eine Z_2-zerlegbare Gruppe vom Typ II etwa $T^2 = E, \beta = 1$. $\mathfrak{U} = \{T, \Phi(\mathfrak{G})\} = \{T\} \times \{S^2\} \times \{C\}$ ist maximal in $\mathfrak{G}$. Da nach Voraussetzung $d(\mathfrak{U}) \leq 2$ ist, wird auch $S^2 = E$. $(ST)^2 = S^2 T^2 C = C$, $(ST)^4 = E$. Man sieht jetzt leicht ein, daß $\mathfrak{G} = \{ST, T\}$ eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist, welche schon unter Typ I mit $\alpha = 2, \beta = 1$ enthalten ist. Somit bleiben nur die behaupteten Typen übrig.

Satz 19. *Sei $\mathfrak{G}$ eine Z_2-zerlegbare 2-Gruppe. Ist $d(\mathfrak{U}) \leq 2$ für alle maximalen Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ erfüllt, so besitzt $\mathfrak{G}$ einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe.*

Beweis. Zunächst zeigt man durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$, daß $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Der Beweis verläuft wie in Satz 11 bis zu der Aussage, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ eine der in Hilfssatz 18 angegebenen Gruppen ist. Typ I wird dann wie in Satz 11 erledigt. Bei Typ III verfährt man so:

$$S^4 = Z_1, \quad T^4 = Z_2, \quad S^2 = T^2 Z_3, \quad T S T^{-1} = S^{-1} Z_4 \quad \text{mit} \quad Z_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}).$$

$$T S T^{-1} S^{-1} = S^{-2} Z_4, \quad \text{also} \quad S^{-4} Z_4^2 = E.$$

$$T S^2 T^{-1} = S^{-2} Z_4^2, \qquad T S^2 T^{-1} S^{-2} = S^{-4} Z_4^2 = E, \qquad S^2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}).$$

Das ist ein Widerspruch, da erst S^4 in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen sollte. $\mathfrak{G}'$ ist daher wie in Satz 11 zyklisch.

Da alle in Hilfssatz 18 angeführten Gruppen einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe haben, gelingt der Beweis der restlichen Aussage wie bei Hauptsatz I.

Kap. II. Z_2-zerlegbare Gruppen beliebiger Ordnung.

In diesem Kapitel sei $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$ stets eine Z_2-zerlegbare Gruppe der beliebigen Ordnung $(\mathfrak{G}) = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \dots p_k^{\varepsilon_k}$. Dabei seien die Primzahlen p_i nach ihrer Größe geordnet: $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Ferner sei $(\{A\}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $(\{B\}) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$. Die p_i-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ seien mit $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}_i$ bezeichnet. Es wird meist keine Rolle spielen, um welche p_i-Sylowgruppe es sich handelt. Ein spezielles Sylowsystem[4]) sei noch hervorgehoben: Es sind dies die Gruppen $\widehat{\mathfrak{P}}_i(\mathfrak{G}) = \left\{A^{p_1^{\alpha_1} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots p_k^{\alpha_k}}\right\} \left\{B^{p_1^{\beta_1} \dots p_{i-1}^{\beta_{i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots p_k^{\beta_k}}\right\}$. Diese $\widehat{\mathfrak{P}}_i(\mathfrak{G})$ sind Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$; jedes $\widehat{\mathfrak{P}}_i$ ist Produkt der p_i-Sylowgruppen von $\{A\}$ und $\{B\}$; vgl. Wielandt [18]. Da alle p_i-Sylowgruppen $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{G}$ zu $\widehat{\mathfrak{P}}_i$ isomorph sind, sind alle $\mathfrak{P}_i$ Z_2-zerlegbar. Dies wird von Bedeutung sein.

§ 4. Kompositions- und Hauptreihen Z_2-zerlegbarer Gruppen.

Satz 20. *Seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Gruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind*[5]). *Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{K}$ auflösbar. Insbesondere ist das Produkt von zwei abelschen Gruppen stets auflösbar.*

[4]) Siehe P. Hall [5].

[5]) Die nichtabelschen Gruppen dieser Art heißen Hamiltonsch; sie lassen sich alle angeben; s. [20] S. 123. Zu Satz 20 vgl. Itô [6].

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach der Gruppenordnung erbracht. Da sich die Voraussetzung auf alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ überträgt, genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

Es darf $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ angenommen werden, da sonst $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}$ den gewünschten Normalteiler liefern würde.

Ist $\mathfrak{K}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es ein $\mathfrak{U} = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{H}_1 \leqq \mathfrak{H}$. Nun ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} > \mathfrak{H}_1$, also $\mathfrak{H}_1$ ein von $\mathfrak{E}$ verschiedener Normalteiler des Durchschnitts $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{H}_1 \triangleleft \mathfrak{H}$ gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \mathfrak{U}$ (s. Ore [9] S. 238 oder Rédei-Szép [12] S. 436). $\mathfrak{U}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar, $\mathfrak{N}$ als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ ebenfalls.

Ist $\mathfrak{K}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so darf angenommen werden, daß $\mathfrak{K}$ sein eigener Normalisator ist. (Sonst hat man $\mathfrak{K} \triangleleft \mathfrak{G}$.) Für mindestens ein $G \in \mathfrak{G}$ sei nun $\mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{K}$, aber $\mathfrak{K}^G \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{D} \triangleleft \mathfrak{K}$, $\mathfrak{D} \triangleleft \mathfrak{K}^G$, also auch $\mathfrak{D} \triangleleft \{\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^G\} = \mathfrak{G}$. Ist jedoch für $\mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{K}$ stets $\mathfrak{K}^G \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, so stelle man $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{K}$. Bei dieser Darstellung wird $\mathfrak{H}$ regulär dargestellt. (Aus $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{E}$ mit $G = KH$ würde nämlich folgen $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^H \neq \mathfrak{E}$ und dann durch Transformation mit H^{-1} die falsche Aussage $\mathfrak{H}^{H^{-1}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} \neq \mathfrak{E}$.) Da $\mathfrak{K}$ eigener Normalisator ist und mit allen seinen Konjugierten den Durchschnitt $\mathfrak{E}$ hat, bleibt bei $\mathfrak{K}$ nur ein Symbol fest. Dies gilt auch für die $\mathfrak{K}^G$. $\mathfrak{H}$ und die $\mathfrak{K}^G$ enthalten genau

$$(\mathfrak{H}) + ((\mathfrak{K}) - 1)(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H})(\mathfrak{K}) = (\mathfrak{G})$$

Elemente von $\mathfrak{G}$, erschöpfen also ganz $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}$ enthält daher alle Permutationen in $\mathfrak{G}$, welche kein Symbol fest lassen und, abgesehen von E, auch nur diese. Da auch H^G mit $H \in \mathfrak{H}$, $H \neq E$ und beliebigem $G \in \mathfrak{G}$ kein Symbol fest läßt, folgt $H^G \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \triangleleft \mathfrak{G}$. Damit ist der gewünschte Normalteiler nachgewiesen.

Hilfssatz 21. *Ist* $p_k | (\{A\})$, *so ist* $\{A^{p_k}\}\{B\}$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *vom Index* p_k.

Satz 22. *Die Sylowgruppe* $\mathfrak{P}_1$ *zum größten Primteiler der Gruppenordnung ist Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. (Siehe Wielandt [18].)

Es ist zweckmäßig, Hilfssatz 21 und Satz 22 gemeinsam zu beweisen, und zwar zuerst eine schwächere Form von Hilfssatz 21, mit dieser dann Satz 22 und schließlich den vollen Hilfssatz 21 unter Verwendung von Satz 22.

a) Behauptung. $\{A^{p_k}\}\{B\}$ oder $\{A\}\{B^{p_k}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p_k.

Beweis. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$; die Ordnung von $\mathfrak{N}$ ist eine Primzahlpotenz p_i^e. Ist $p_k | (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so kann man vermöge einer Induktionsannahme behaupten, daß etwa $\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p_k ist.

$$(\{A^{p_k}\}\{B\}) = \frac{((A))((B))}{p_k(\mathfrak{D}^*)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D}^* = \{A^{p_k}\} \cap \{B\}.$$

Setzt man $\mathfrak{D} = \{A\} \cap \{B\}$, so ist wegen $(\mathfrak{D}^*) \leq (\mathfrak{D})$

$$(\{A^{p_k}\}\{B\}) \geq \frac{(\{A\})(\{B\})}{p_k(\mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{G})}{p_k}.$$

Es folgt $(\{A^{p_k}\}\{B\}) \geq (\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\})$, somit $\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\} = \{A^{p_k}\}\{B\}$.

Ist aber p_k kein Teiler von $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so hat man $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{N}$, $\alpha_k \leq 1$, $\beta_k \leq 1$. Wegen $d(\mathfrak{P}_k) \leq 2$ ergibt sich $d(\mathfrak{N}) \leq 2$, $(\mathfrak{N}) \leq p_k^2$.

Hat $\mathfrak{N}$ die Ordnung p_k^2, so ist $\mathfrak{N} = \left\{A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}\right\} \times \left\{B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right\}$. Die von $\mathfrak{G}$ bei Transformation in $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismen lassen sich dann durch zweireihige Matrizen mod p_k darstellen vermöge der folgenden Zuordnung: Ist

$$\left(A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}\right)^G = A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} g_{11}} B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} g_{12}},$$

$$\left(B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right)^G = A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} g_{21}} B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} g_{22}},$$

so sei G die Matrix mit den Elementen g_{ik} zugeordnet. Bei diesem Prozeß wird A auf eine Matrix der Gestalt

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

abgebildet. $\mathfrak{a}$ liegt in der linearen Gruppe $GL(2, p_k)$ [6]), welche die Ordnung $p_k(p_k^2-1)(p_k-1)$ hat. Daher ist $(\{\mathfrak{a}\}) \mid ((\{A\}), p_k(p_k^2-1)(p_k-1))$. Für $p_k \neq 2$ folgt $(\{\mathfrak{a}\}) \mid p_k$. Daraus ergibt sich aber $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$, da $\mathfrak{P}_k$ abelsch ist. Ist $p_k = 2$, so hat man $a_{22} \equiv 1$, $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{e}$, und wie eben ist wieder $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$. Die gleiche Überlegung führt zu $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}$.

Hat $\mathfrak{N}$ nur die Ordnung p_k, so kommt man wie oben zu einer Darstellung der in $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismen durch einreihige Matrizen. In diesem Falle ist $(\{\mathfrak{a}\}) \mid ((\{A\}), p_k - 1) = 1$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$.

$\mathfrak{N}$ liegt daher stets im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ist nun etwa $\mathfrak{P}_k \cap \{B\} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G}) \times \{\mathfrak{P}_k \cap \{B\}\} = \left\{A^{p_k^{\alpha_k}}\right\}\left\{B^{p_k^{\beta_k}}\right\}\left\{B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right\} = \{A^{p_k}\}\{B\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der behaupteten Art. Im Falle $\alpha_k = 0$ ist $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$ die gesuchte Gruppe.

b) Beweis von Satz 22. Sei $p_1 \neq p_k$. (Sonst ist nichts zu beweisen.) Nach a) ist etwa $\mathfrak{U} = \{A^{p_k}\}\{B\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ein Induktionsschluß gestattet die Annahme $\mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{U}$. In $\mathfrak{G}$ hat $\mathfrak{P}_1$ dann höchstens p_k Konjugierte. Andererseits gilt für die Anzahl N der Konjugierten von $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{G}$ die Kongruenz $N \equiv 1\ (p_1)$. Wegen $p_k < p_1$ folgt $N = 1$, also $\mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{G}$.

c) Beweis von Hilfssatz 21. Ist $(\mathfrak{G}) = p_k^{\xi_k}$, so ist der Satz richtig (Satz 3). Andernfalls kann man den unter a) verwendeten Normalteiler $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{P}_1$ wählen, so daß gewiß $p_k \nmid (\mathfrak{N})$ gilt. Aus $p_k \mid (\{A\})$ folgt dann auch $p_k \mid (\{A\}\mathfrak{N}/\mathfrak{N})$. Wie vorher erhält man nun durch Induktion die Richtigkeit der vollen Behauptung von Hilfssatz 21.

In Hilfssatz 21 ist wesentlich, daß p_k kleinster Primteiler der Gruppenordnung $(\mathfrak{G})$ ist:

[6]) Bezeichnung der linearen Gruppen gemäß v. d. Waerden [15].

Beispiel. $(\mathfrak{G}) = p^2 q,\ p > q.$

$$\mathfrak{P}_1 = \{P_1\} \times \{P_2\}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{Q}_1 = \{Q\}.$$

Folgende Relationen mögen gelten:

$$P_1^p = P_2^p = Q^q = (P_1, Q) = E, \qquad Q P_2 Q^{-1} = P_1^\varrho P_2^\lambda$$

mit

$$\lambda^q \equiv 1\ (p), \qquad \lambda \not\equiv 1\ (p), \qquad \varrho \not\equiv 0\ (p).$$

Diese Gruppe besitzt die Zerlegung $\mathfrak{G} = \{P_1 Q\}\{P_2\}$. $\{Q\}\{P_2\}$ ist aber keine Untergruppe wegen $Q P_2 Q^{-1} = P_1^\varrho P_2^\lambda \notin \{Q\}\{P_2\}$.

Durch wiederholte Anwendung von Satz 22 bekommt man eine Normalteilerkette $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{k-1} \lhd \mathfrak{G}$. Kombiniert man die Aussage $\mathfrak{Q}_k(\mathfrak{G}) \lhd \mathfrak{G}$ mit dem bekannten Satz, daß in einer p-Gruppe jede Untergruppe von Index p invariant ist, so sieht man, daß in einer Z_2-zerlegbaren Gruppe jede Untergruppe vom Index p_k invariant ist.

Satz 23. $\mathfrak{U} = \{A^s\}\{B^t\}$ *sei eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *welche also eine der Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ *entsprechende Zerlegung besitzt. Der Normalisator* $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ *und der Zentralisator* $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ *von* $\mathfrak{U}$ *in* $\mathfrak{G}$ *erlauben dann Zerlegungen der Gestalt* $\{A^k\}\{B^l\}$. (Genau wie Satz 4 zu beweisen.)

24. Hauptsatz II. *Jede* Z_2*-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar*[7]).

Ist erst der Nachweis eines Normalteilers von Primzahlordnung gelungen, so folgt Hauptsatz II sofort durch Induktion. Die Existenz eines solchen Normalteilers ist aber eine Folge des jetzt zu beweisenden Satzes 24a.

Sei $(\{A\}) = s\, p_1^{\alpha_1}$, $(\{B\}) = t\, p_1^{\beta_1}$. Zur Abkürzung sei gesetzt $A^{s p_1^{\alpha_1 - 1}} = A^*$, $B^{t p_1^{\beta_1 - 1}} = B^*$.

Satz 24a. $\{A^*\}$ *oder* $\{B^*\}$ *ist invariant in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\alpha_1 > 0$.

Ist $\{A^*\} < \{A\} \cap \{B\}$, so ist der Satz klar. Falls $\beta_1 = 0$ hat man $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{G}) = \{A^s\} \lhd \mathfrak{G}$ und dann auch $\{A^*\} \lhd \mathfrak{G}$. Nach Ausschluß dieser Möglichkeiten gilt gewiß $\Omega_1(\mathfrak{P}_1) = \{A^*\} \times \{B^*\} \lhd \mathfrak{G}$. Die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach dem Zentralisator $\mathfrak{C}(\Omega_1(\mathfrak{P}_1))$ von $\Omega_1(\mathfrak{P}_1)$ in $\mathfrak{G}$, welche mit $\overline{\mathfrak{G}}$ bezeichnet sei, ist isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von $\Omega_1(\mathfrak{P}_1)$ und läßt sich in der schon beschriebenen Art durch zweireihige Matrizen mod p_1 darstellen. Bei dieser Zuordnung werden A und B auf die Matrizen

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abgebildet. Die Behauptung läßt sich nun offenbar so formulieren: Es ist $a_{21} \equiv 0\ (p_1)$ oder $b_{12} \equiv 0\ (p_1)$.

a) Sei $p_1 \mid (\overline{\mathfrak{G}})$, etwa $p_1 \mid (\{\mathfrak{a}\})$. Dann hat eine geeignete Potenz $\mathfrak{a}^r$ von $\mathfrak{a}$ die Ordnung p_1, und es ist $\mathfrak{a}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $(GL(2, p_1)) = p_1(p_1^2 - 1)(p_1 - 1)$

[7]) Herr Itô teilte Herrn Prof. Wielandt brieflich einen anderen Beweis dieses Satzes mit.

folgt nach Satz 22, daß $\{\mathfrak{a}^r\}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant ist. Der Normalisator von $\{\mathfrak{a}^r\}$ in $GL(2, p_1)$ besteht aber aus den Matrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, wie man leicht nachrechnet. Somit ist notwendig $b_{12} \equiv 0\ (p_1)$, also $\{A^*\} \lhd \mathfrak{G}$.

b) Sei $p_1 \nmid (\overline{\mathfrak{G}})$. Dann ist gewiß $a_{22} \not\equiv 1$, $b_{11} \not\equiv 1\ (p_1)$, denn andernfalls hätte $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ die Ordnung p_1. Die Annahme $a_{21} b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ wird nun zum Widerspruch geführt.

Sei etwa $p_k \mid (\{A\})$. In der Gruppe $\{A^{p_k}\}\{B\}$ gilt der Satz gemäß der Induktionsannahme.

$$\mathfrak{a}^{p_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & a_{22}^{p_k} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c = a_{21} \cdot \frac{a_{22}^{p_k} - 1}{a_{22} - 1}$. Es wird $c \equiv 0\ (p_1)$, da $b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ ist.

Wegen $a_{21} b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ und $a_{22} \not\equiv 1\ (p_1)$ folgt nun $a_{22}^{p_k} \equiv 1\ (p_1)$, also $\mathfrak{a}^{p_k} = \mathfrak{e}$. $\{\mathfrak{b}\}$ hat daher in $\overline{\mathfrak{G}}$ den Index p_k; nach einer früheren Bemerkung ist deshalb $\{\mathfrak{b}\}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant. Somit gilt eine Gleichung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^\lambda$ mit geeignetem λ. Berücksichtigt man, daß mit $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{b}^\lambda$ eine Matrix der Gestalt $\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist, so liefert der Vergleich der Matrixelemente g_{22} in der Gleichung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^\lambda \mathfrak{a}$ den Widerspruch $a_{21} b_{12} \equiv 0\ (p_1)$.

Die Aussagen der nun folgenden Sätze 25 bis 29 sind für jede überauflösbare Gruppe gültig. (Übrigens beschreibt auch Satz 22 eine Eigenschaft, die allen überauflösbaren Gruppen zukommt; s. P. Hall [2] S. 103, Theorem 3.14.)

Satz 25. *$\mathfrak{G}'$ ist nilpotent.*

(Erstmals bewiesen wohl von E. Wendt in [16] S. 481. Einen einfachen Beweis findet man bei O. Ore [9] S. 459.)

Satz 26. *Jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ läßt sich auf monomiale Gestalt transformieren.* (Vgl. Zassenhaus [21] S. 207.)

Satz 27. *Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{U}_0 < \mathfrak{U}_1 < \cdots < \mathfrak{U}_j = \mathfrak{G}$ eine Kette von Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche sich nicht verfeinern läßt, so ist der Index von $\mathfrak{U}_i$ in $\mathfrak{U}_{i+1}$ eine Primzahl.* (Siehe Iwasawa [7] S. 174.)

Satz 28. *Jedes p_1-Sylowkomplement $\mathfrak{Q}_1$ bewirkt bei Transformation in $\mathfrak{P}_1$ eine abelsche Automorphismengruppe.*

Beweis. Es genügt, die Automorphismen in $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ zu betrachten; denn diejenigen Automorphismen, welche alle Nebenklassen nach $\Phi(\mathfrak{P}_1)$ fest lassen, haben Ordnungen p_1^π (s. [20] S. 45). Man kann sich daher auf die Untersuchung von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ beschränken. Wegen der Existenz einer primzahlstufigen Hauptreihe ist die zu betrachtende Automorphismengruppe, welche man sich durch Matrizen mod p_1 in der gewohnten Weise dargestellt denke, halbreduzibel in Bestandteile der Dimension 1. Nach der Schurschen Erweiterung des Satzes von Maschke ist sie sogar vollständig reduzibel, ist also eine abelsche Gruppe von Diagonalmatrizen. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 29. $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}_1' \times \mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{G}$. $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}'$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{G}$ *nilpotent ist.*

Beweis. $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{Q}_1$. $\mathfrak{Q}_1$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auch überauflösbar. Ein Induktionsschluß gestattet daher die Annahme $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{Q}_1$. $\mathfrak{Q}_1$ bewirkt nach Satz 28 in $\mathfrak{P}_1$ eine abelsche Automorphismengruppe. Daher wird $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{Q}_1'$ zentralisiert. Wegen $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' < \mathfrak{Q}_1'$ folgt nun $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{G}$. Unter Heranziehung von $\mathfrak{P}_1' \lhd \mathfrak{G}$ ergibt sich jetzt $\mathfrak{J} \lhd \mathfrak{G}$. Speziell folgt noch: Sind $\mathfrak{P}_i$ und $\overline{\mathfrak{P}}_i$ zwei verschiedene Sylowgruppen zur Primzahl p_i, so ist $\mathfrak{P}_i' = \overline{\mathfrak{P}}_i'$.

Ist $\mathfrak{U}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so hat $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ einen Index p_j (Satz 27). Insbesondere enthält $\mathfrak{U}$ eine Gruppe der Ordnung $p_i^{g_i - 1}$ für jedes i. Daher gilt $\mathfrak{U} > \Phi(\overline{\mathfrak{P}}_i) > \mathfrak{P}_i'$ für eine geeignete p_i-Sylowgruppe $\overline{\mathfrak{P}}_i$, also auch $\mathfrak{U} > \mathfrak{P}_1' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k'$ und dann weiter $\Phi(\mathfrak{G}) > \mathfrak{P}_1' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k'$. Aus der letzten Beziehung liest man den zweiten Teil der Behauptung ab, denn $\mathfrak{G}' < \Phi(\mathfrak{G})$ ist eine kennzeichnende Eigenschaft der nilpotenten Gruppen (Wielandt [*17*]).

§ 5. Die Kommutatorgruppe Z_2-zerlegbarer Gruppen.

Es wurde schon gezeigt, daß $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist (Satz 25). Die p_i-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}'$ sei mit $\mathfrak{R}_i$ bezeichnet; also ist

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_k.$$

Genauere Auskunft über die $\mathfrak{R}_i$ gibt Hauptsatz III.

30. Hauptsatz III. *Für* $p_i \neq 2$ *ist* $\mathfrak{R}_i$ *abelsch. Speziell sind alle* Z_2*-zerlegbaren Gruppen ungerader Ordnung metabelsch.*

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\}' \cong \mathfrak{G}'\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$, daher auch $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \cong \mathfrak{R}_i\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N}$.

Beim Beweis, der durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$ geführt wird, sind einige Fälle zu unterscheiden.

a) $\mathfrak{G}$ besitze zwei Normalteiler $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Die Induktionsannahme liefert nun $\{\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N}\}' = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{N}$ und ebenso $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{M}$, also

$$\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}.$$

b) Für $i > 1$ kommt man auf jeden Fall durch, da man ein $\mathfrak{N}$ mit $(\mathfrak{N}) = p_1$ und daher $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}_i = \mathfrak{E}$ wählen kann. $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ ergibt die Behauptung.

c) $\mathfrak{G}$ enthalte nun nur einen minimalen Normalteiler; dieser hat notwendig die Ordnung p_1. Daraus folgt wegen $\mathfrak{R}_i \lhd \mathfrak{G}$ insbesondere $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3 = \cdots = \mathfrak{R}_k = \mathfrak{E}$ also $\mathfrak{G}' = \mathfrak{R}_1 < \mathfrak{P}_1$. Die Gruppe $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1'$ ist ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1'$, dessen Ordnung und Index teilerfremd sind. Daher ist (vgl. [*20*] S. 136)

$$(*) \quad \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' = \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1'\} \times \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1')\}$$
$$= \mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1' \times \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1')\}.$$

Man darf annehmen, daß $\mathfrak{P}_1$ nicht abelsch ist; sonst wäre wegen $\mathfrak{R}_1' < \mathfrak{P}_1' = \mathfrak{E}$ die Behauptung schon bewiesen. Dann gilt nach dem Burnsideschen Basissatz $d(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1') = 2$.

Sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$ der Zentralisator von $\mathfrak{P}_1'$ in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$ ist als Automorphismengruppe der zyklischen Gruppe $\mathfrak{P}_1'$ abelsch. Deshalb ist $\mathfrak{G}' < \mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$, d.h. $\mathfrak{P}_1' < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}')$. Ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1'$ zyklisch, so ist $\mathfrak{G}'$ als zyklische Erweiterung eines Zentrumsnormalteilers abelsch, d.h. $\mathfrak{R}_1$ ist abelsch. Andernfalls hat man $d(\mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1') = 2$. Aus (*) ergibt sich jetzt $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1') = \mathfrak{E}$, somit $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{R}_1$.

Die Induktionsannahme zeigt, daß man $(\mathfrak{P}_1') = (\mathfrak{R}_1') = \mathfrak{p}_1$ setzen darf. $\mathfrak{P}_1$ hat deshalb die wohlbekannte Struktur:

$$S^{p_1^\alpha} = T^{p_1^\beta} = E, \qquad TST = S^{1+p_1^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geqq 2.$$

Sei $\mathfrak{U}$ die Gruppe derjenigen Elemente eines $\mathfrak{p}_1$-Sylowkomplements, welche $\mathfrak{P}_1$ zentralisieren. Da die $\mathfrak{p}_1$-Sylowkomplemente wegen $(\mathfrak{G}') = \mathfrak{p}_1^{f_1}$ abelsch sind, ist $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{E}$ muß $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ sein. $\mathfrak{P}_1$ enthält somit seinen Zentralisator, und $\mathfrak{Q}_1 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1$ ist isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}_1$. Nach Satz 16 ist $\mathfrak{Q}_1$ zyklisch. [Wegen der Teilerfremdheit der Ordnungen der dort betrachteten Matrizen zu p_1 lassen sich diese Matrizen nämlich vollständig reduzieren auf die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. $\mathfrak{Q}_1$ ist daher isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Galois-Feldes $GF(p_1)$, ist also zyklisch. Nach einer bei Satz 28 gemachten Bemerkung bewirkt nämlich kein Element von $\mathfrak{Q}_1$ in $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ den identischen Automorphismus.] $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_1$ vollreduzibel. Es gibt daher eine Basis X, Y von $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ mit der Eigenschaft $X^Q = X^\lambda$ und $Y^Q = Y^\tau \bmod \Phi(\mathfrak{P}_1)$, wobei Q ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Q}_1$ sei. Wegen der oben angegebenen Gestalt der Q zugeordneten Matrix ist $\lambda \equiv 1$ oder $\tau \equiv 1\ (p_1)$, d.h. $\mathfrak{G}' < \{\Phi(\mathfrak{P}_1), Y\}$ bzw. $\mathfrak{G}' < \{\Phi(\mathfrak{P}_1), X\}$. In jedem Falle erhält man den Widerspruch $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{P}_1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Vermerkt sei noch die einfache Beziehung $\mathfrak{R}_k \cong \mathfrak{P}_k'$. Diese ergibt sich so:

$$\mathfrak{P}_k' \cong \{\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1}\}' \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1} = \mathfrak{G}'/\mathfrak{R}_1 \times \dots \times \mathfrak{R}_{k-1} \cong \mathfrak{R}_k.$$

Könnte man beweisen, daß alle Z_3-zerlegbaren 2-Gruppen metabelsch sind, so würde diese Bemerkung in Verbindung mit Hauptsatz III zeigen, daß überhaupt alle Z_3-zerlegbaren Gruppen metabelsch sind.

Eine eingehendere Untersuchung liefert notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{R}_i$ zyklisch ist. Als Anwendung dieser Überlegungen sei ohne Beweis der folgende eigenartige Satz erwähnt:

Satz 31. *Sei $\mathfrak{G}$ eine Z_3-zerlegbare Gruppe ungerader Ordnung, deren Sylowgruppen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ nicht abelsch sind. Dann ist $\mathfrak{G}'$ zyklisch.*

Kap. III. Z_m-zerlegbare Gruppen.

§ 6. Hauptreihen Z_m-zerlegbarer Gruppen.

Sei nun $\mathfrak{G} = \{A_1\}\{A_2\}\{A_3\}\dots\{A_m\}$ Produkt der m paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen $\{A_i\}$. Wie früher sei $p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$, wobei die p_i nach fallender Größe geordnet sind. Die Auflösbarkeit der Z_m-zerlegbaren Gruppen und die Invarianz der Sylowgruppe zum größten

Primteiler der Gruppenordnung wurde in Wielandt [18] gezeigt. Das Ziel dieses Paragraphen ist die Ausdehnung von Hauptsatz II auf Z_m-zerlegbare Gruppen.

Hilfssatz 32. *Aus jedem zyklischen Faktor $\{A_i\}$ entnehme man, sofern $p_1|(\{A_i\})$, die Untergruppe der Ordnung p_1, welche mit $\{L_i\}$ bezeichnet werden möge. Das Erzeugnis aller dieser $\{L_i\}$ ist ein elementar abelscher Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung p_1^m nicht übersteigt.*

Beweis. $A_j L_i A_j^{-1} \in \Omega_1(\mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\}))$. Entweder gilt $\{L_i\} = \{L_j\}$ und dann $L_i \in \mathfrak{Z}(\{A_i\}\{A_j\})$ oder $\{L_i\} \neq \{L_j\}$ und $\Omega_1(\mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\})) = \{L_i\} \times \{L_j\}$. In jedem Falle hat man eine Aussage der Gestalt $A_j L_i A_j^{-1} = L_i^a L_j^b$ und $L_i L_j = L_j L_i$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 33. *Das p_1-Sylowkomplement $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ bewirkt bei Transformation in dem Normalteiler $\mathfrak{L}$ eine abelsche Automorphismengruppe.*

Beweis. (Durch Induktion nach der Gruppenordnung.) $\{Q_i\}$ sei das p_1-Sylowkomplement von $\{A_i\}$, $\{P_i\}$ die p_1-Sylowgruppe von $\{A_i\}$. Dann ist $\mathfrak{U}_i = \{A_1\} \dots \{A_{i-1}\}\{P_i\}\{A_{i+1}\} \dots \{A_m\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; denn $A_j^x P_i^y A_j^{-x} \in \mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\}) = \{P_i\}\{P_j\}$, also $A_j^x P_i^y A_j^{-x} = P_i^s P_j^t$, $A_j^x P_j^y = P_i^s A_j^r$. Beim Übergang zu den in $\mathfrak{L}$ bewirkten Automorphismen werde $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ auf $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ abgebildet. [Es ist also $\bar{\mathfrak{Q}}_1 \cong \hat{\mathfrak{Q}}_1/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, wenn $\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ der Zentralisator von $\mathfrak{L}$ in $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ ist.] Ist p_1^n die Ordnung von $\mathfrak{L}$, so läßt $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ sich durch n-dimensionale Matrizen mod p_1 darstellen ($n \leq m$). Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ eine abelsche Gruppe, sofern $\mathfrak{U}_i$ eine eigentliche Untergruppe ist. Bei diesem Übergang von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{U}_i$ bleibt $\mathfrak{L}$ erhalten. Die Dimension der $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$-darstellenden Matrizengruppe ist daher ebenso groß wie die Dimension der $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ darstellenden Matrizengruppe. Da $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ abelsch ist, gilt $(\bar{Q}_s, \bar{Q}_t) = \hat{E}$ für $s, t \neq i$. Enthält $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$ mindestens drei Faktoren, so kann man je zwei Matrizen $\bar{Q}_s$ und $\bar{Q}_t$ in einer geeigneten Untergruppe $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ finden. $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ ist also abelsch. Es bleibt der Fall zu behandeln, daß $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G}) = \{Q_1\}\{Q_2\}$ nur zwei Faktoren enthält. $\mathfrak{L}$ zerlege man nun in folgender Weise:

$$\mathfrak{L} = \{L_{i_1}\} \times \{L_{i_2}\} \times \cdots \times \{L_{i_n}\}.$$

(Die L_i wurden oben erklärt.) Ist p_1 kein Teiler von $(\{A_1\})$ und $(\{A_2\})$, so gilt $\{L_{i_\nu}\} \lhd \{A_j\}\{A_{i_\nu}\}$, $A_j L_{i_\nu} A_j^{-1} = L_{i_\nu}^{\lambda_\nu}$ für alle $\nu = 1, 2, \dots, n$ und $j = 1$ oder $j = 2$. Die $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ zugeordneten Matrizen erscheinen dann in Diagonalgestalt. Sei nun $p_1|(\{A_1\})$. Dann kann $i_1 = 1$ gewählt werden. Aus $Q_1 L_{i_\nu} Q_1^{-1} = L_1^s L_{i_\nu}^t$ entnimmt man folgende Gestalt der zu $\bar{Q}_1$ gehörigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{32} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wenn $(\{A_2\})$ nicht durch p_1 teilbar ist, erscheint die $\overline{Q}_2$ zugeordnete Matrix in Diagonalgestalt. Dann ist $\{L_1\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$. Falls $p_1|(\{A_2\})$ und $\{L_1\}=\{L_2\}$, gilt dasselbe. Ist $\{L_1\}\neq\{L_2\}$, so kann man $L_{i_1}=L_2$ wählen und bekommt zu $\overline{Q}_2$ eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Betrachtung der Untergruppe $\{A_1\}\{A_2\}$ liefert wegen Satz 28 die Vertäuschbarkeit der Teilmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $a_{21}\,b_{12}\equiv 0\,(p_1)$. Man erhält somit $\{L_1\}\lhd\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$ oder $\{L_2\}\lhd\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$.

In jedem Falle besitzt $\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$ einen Normalteiler der Ordnung p_1, welcher in einem der zyklischen Faktoren $\{A_i\}$ liegt. Die Anwendung dieses Resultats auf $\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1|\{L_1\}$ usw. liefert schließlich eine Normalteilerkette $\mathfrak{E}\lhd\mathfrak{N}_1\lhd\cdots\lhd\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$, in der die Faktorgruppen aufeinanderfolgender Glieder die Ordnung p_1 haben. Nach der Erweiterung des Satzes von Jordan-Hölder auf Hauptreihen hat daher jede Hauptreihe von $\mathfrak{L}\,\hat{\mathfrak{Q}}_1$ die Eigenschaft, daß die Faktorgruppen der Ordnung p_1^{α} stets die Ordnung p_1 haben. Wegen $p_1\nmid\tau(\hat{\mathfrak{Q}}_1)$ ist die $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ zugeordnete Matrizengruppe vollreduzibel und enthält nur irreduzible Bestandteile der Dimension 1. $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ hat deshalb in geeigneten Koordinaten Diagonalgestalt und ist daher abelsch.

Zusatz. *Die in Hilfssatz 33 betrachtete Matrizengruppe läßt sich sogar über dem Galois-Feld $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt transformieren.*

Beweis. Die erzeugenden Matrizen $\overline{Q}_i$ haben Eigenwerte aus $GF(p_1)$, wie man sofort an ihrer Gestalt sieht. Transformiert man nun die $\overline{Q}_i$ simultan auf Diagonalgestalt, so haben die entstehenden Matrizen Elemente aus $GF(p_1)$. Dann haben aber auch alle Produkte dieser Matrizen Elemente aus $GF(p_1)$, d.h. die Gruppe läßt sich über $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt transformieren.

34. Hauptsatz IV. *Jede Z_m-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar.*

Beweis. $\mathfrak{R}=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}_1$ bewirken wegen $\mathfrak{R}<\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ bei Transformation in $\mathfrak{R}$ die gleichen Automorphismen. Diese Gruppe von Automorphismen ist nach Hilfssatz 33 kommutativ. Beachtet man noch den Zusatz, so sieht man, daß $\mathfrak{R}$ direkt zerfällt in lauter Normalteiler der Ordnung p_1 von $\mathfrak{G}$. Nachdem jetzt ein minimaler Normalteiler der Ordnung p_1 von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen ist, läßt sich die volle Behauptung leicht durch Induktion beweisen.

Die Sätze 25 bis 29 des § 4, welche direkte Folgerungen aus Hauptsatz II waren, übertragen sich jetzt ohne weiteres auf Z_m-zerlegbare Gruppen. Man entnimmt diesen Sätzen folgendes Konstruktionsprinzip: Man erweitere die

9183-56

Sylowgruppe zur größten Primzahl, welche die Gruppenordnung noch teilt, mit der Sylowgruppe zur zweitgrößten Primzahl. Die auftretende Gruppe von Automorphismen ist abelsch, das Faktorensystem äquivalent zu einem zerfallenden Faktorensystem. Die so erhaltene Gruppe erweitere man dann mit der Sylowgruppe zur nächstgrößten Primzahl. Auch bei diesem Schritt liegen die eben beschriebenen einfachen Verhältnisse vor. So fahre man fort, bis alle Primteiler der Gruppenordnung aufgebraucht sind. Die Struktur der Z_m-zerlegbaren Gruppen hängt also sehr eng mit der Struktur ihrer Sylowgruppen zusammen. Deshalb muß eine eingehendere Theorie der Z_m-zerlegbaren Gruppen mit der Untersuchung der entsprechenden p-Gruppen beginnen.

§ 7. Bemerkungen über Z_m-zerlegbare p-Gruppen.

Schon bei drei Faktoren treten gegenüber Kap. I neue Erscheinungen auf, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Beispiel. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung p^6 sei definiert durch die Gleichungen

$$A_1^{p^2} = A_2^{p^2} = A_3^{p^2} = E, \qquad A_2 A_1 A_2^{-1} = A_1^{1+p}, \qquad A_3 A_2 A_3^{-1} = A_2^{1+p},$$
$$A_1 A_3 A_1^{-1} = A_3^{1+p}.$$

Diese Gruppe ist eine abelsche Erweiterung ihres Zentrums

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\},$$

sie erlaubt die Zerlegung $\mathfrak{G} = \{A_1\}\{A_2\}\{A_3\}$. (Man überzeugt sich leicht, daß die angegebenen Relationen wirklich eine Gruppe der Ordnung p^6 liefern; s. etwa [*20*] S. 97.) Eine einfache Rechnung zeigt

$$\mathfrak{G}' = \Phi(\mathfrak{G}) = \mho_1(\mathfrak{G}) = \Omega_1(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\}.$$

Es ist bemerkenswert, daß hier die Kommutatorgruppe ebenso viele Erzeugende hat wie die ganze Gruppe. Bei Z_2-zerlegbaren Gruppen ungerader Primzahlpotenzordnung kann dies nach Satz 11 nicht vorkommen.

Nun betrachte man die Untergruppe $\mathfrak{U} = \{A_1 A_2, A_3\}$ von $\mathfrak{G}$. Eine kurze Rechnung ergibt $(A_1 A_2, A_3) = A_2^{-p} A_3^p$, $(A_1 A_2)^p = A_1^p A_2^p$. Daraus folgt

$$\mathfrak{U}' = \{A_2^{-p} A_3^p\}, \qquad \Phi(\mathfrak{U}) = \Omega_1(\mathfrak{U}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{U}$ ist nicht Z_2-zerlegbar, wenn man jetzt p ungerade wählt, da sie eine Untergruppe vom Typ (p, p, p) enthält. Dann kann sie aber wegen $d(\mathfrak{U}) = 2$ auch nicht Z_3-zerlegbar sein. Satz 14 hat demnach bei mehr als zwei Faktoren kein striktes Analogon.

Satz 35. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Z_m-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung, so ist*

$$(\mho_i(\mathfrak{G}), \mho_j(\mathfrak{G})) < \mho_{i+j}(\mathfrak{G}') < \mho_{i+j+1}(\mathfrak{G}).$$

Beweis. Zunächst sei vermerkt, daß auch für Z_m-zerlegbare p-Gruppen die Gleichung $\Phi(\mathfrak{G}) = \mho_1(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\}\{A_2^p\} \ldots \{A_m^p\}$ richtig ist. Man sieht dies

9183-58冊

genau so wie bei zwei Faktoren ein. Zu beweisen ist also nur noch

$$(\mathfrak{V}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{G})) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{G}').$$

Für zwei Faktoren ist dies richtig, wie man leicht mit Hilfe der definierenden Relationen bestätigt. Für m Faktoren schließt man dann so:

Sei $\mathfrak{U}_{st} = \{A_s\}\{A_t\}$.

$$(A_s^{p^i}, A_t^{p^j}) \in (\mathfrak{V}_i(\mathfrak{U}_{st}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{U}_{st})) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{U}'_{st}) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{G}').$$

Da die $(A_s^{p^i}, A_t^{p^j})$ mit ihren Konjugierten die Gruppe $(\mathfrak{V}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{G}))$ erzeugen, folgt daraus die Behauptung.

Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2. Aufl. 1911. — [2] HALL, PHILIP: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [3] HALL, PHILIP: A contribution to the theory of groups of prime power orders. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933). — [4] HALL, PHILIP: On a theorem of Frobenius. Proc. London Math. Soc. (2) **40**, 468—501 (1936). — [5] HALL, PHILIP: On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 316—323 (1937). — [6] ITÔ, NOBORU: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [7] IWASAWA, K.: Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. J. Fac. Sci. Tokyo (2) **4**, 171—199 (1941). — [8] LIERMANN, H.: Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist. Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **4**, 183—207 (1938). — [9] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite orders. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [10] RÉDEI, L.: Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Comm. Math. Helv. **20**, 225—264 (1947). — [11] RÉDEI, L.: Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **1**, 74—98 (1950). — [12] RÉDEI, L., u. SZÉP, J.: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [13] SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. 1927. — [14] SZÉP, J.: Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen. Comm. Math. Helv. **22**, 31—33 (1949). — [15] WAERDEN, B. L. v. d.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. **4**. — [16] WENDT, E.: Über eine specielle Classe von Gruppen. Math. Ann. **55**, 479—492 (1902). — [17] WIELANDT, H.: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — [18] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951). — [19] ZAPPA, G.: Sui gruppi supersolubili. Rend. Sem. Math. Univ. Roma (4) **2**, 323—330 (1937). — [20] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. 1937. — [21] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Seminar Hansischen Univ. **11**, 187—220 (1936).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

INGRAHAM, R. L.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 265—271 (1953)

Linear Connection in Spin-Collineation Space.

By
RICHARD L. INGRAHAM.

The concept of covariant p-vector differentiation over an (affinely or projectively) connected manifold allows a formal unification of the linear connection and the curvature tensor into a larger geometric entity, the p-vector linear connection. This paper specializes to the case of a symmetric connection, when the theory becomes particularly simple. This generalized linear connection formalism allows then the introduction of a natural induced connection of the local spaces whose points are ordered collections of p-vectors $[p = 0, 1, \ldots, n]$. For manifolds of even (odd) dimension in the affine (projective) case, these are nothing other than the local spaces whose points are collineations in the associated local spin-spaces; and the covariant derivative thus introduced allows the differentiation of collineations *with respect to a collineation* in the precise way to be explained.

I. P-vector-differentiation.

We start with a manifold with coordinates x^μ $(\mu = 1, \ldots, n)$ provided with the linear connection $\Gamma^\xi_{\mu\nu}$.[1]) [If the manifold has the curvilinear projective instead of affine geometry then it is $(n-1)$-dimensional, x^μ are the homogeneous coordinates, $\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ is homogeneous in them of degree -1, and all objects encountered in the sequel will be homogeneous of various degrees. The following theory applies indifferently to both types of geometry.] The covariant derivative of a vector v^ν is[1])

$$(1.1) \qquad \nabla_\varphi v^\nu = (A^\nu_\lambda \partial_\varphi + \Gamma^\nu_{\varphi\lambda})\, v^\lambda \quad [(\varphi) \text{ hol. or non hol.}].$$

Now a p-vector is defined as a tensor $v^{\varphi_1 \cdots \varphi_p}$ (or $v_{\varphi_1 \ldots \varphi_p}$) of valence p which is alternating in all indices: $v^{\varphi_1 \cdots \varphi_p} = v^{[\varphi_1 \cdots \varphi_p]}$ (or $v_{\varphi_1 \ldots \varphi_p} = v_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]}$). v^ν is a vector, that is, a 1-vector; and ∇_φ is the 1-vector covariant derivative. One

[1]) The notation used will be mainly that of SCHOUTEN, cf. Comp. Math. **3**, 1 (1936). As general index convention small Greek letters $\lambda, \mu, \ldots, \omega$ run over $1, \ldots, n$; the ranges of other alphabets are explicitly specified. The symbols (φ), (ψ), etc. denote general (holonomic or non-holonomic) systems; transformations between them are defined by sets of functions $A^\varphi_{\varphi'}$ [Det $A^\varphi_{\varphi'} \neq 0$] which equal $\partial_{\varphi'} x^\varphi$ $(\partial_{\varphi'} \equiv \partial/\partial x^{\varphi'})$ in the holonomic case. Thus in any system $A^\varphi_\psi = \delta^\varphi_\psi$, the unity tensor. $A^{\varphi'}_\varphi A^{\mu'}_\mu A^\xi_{\xi'} \ldots$ is abbreviated $A^{\varphi'\mu'\xi'}_{\varphi\mu\xi} \ldots$. ∂_φ is defined as $A^{\varphi'}_\varphi \partial_{\varphi'}$ ((φ') holonomic). [ ] and ( ) around any set of indices of the same type indicate the alternating and symmetric parts, resp. [||] indicates that the index (indices) inside the || is (are) not alternated with the others. $[\,]^{\cdot}_{\cdot}$ and $[|\,|]^{\cdot}_{\cdot}$ will also be used to keep distinct "interlocking" alternators.

can now define the p-vector covariant derivative of a q-vector $v^{\Psi_1 \cdots \Psi_q}$ in the natural way,

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} \equiv \nabla^p_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]} v^{\Psi_1 \cdots \Psi_q} [p, q = 0, 1, \ldots, n] \tag{1.2}$$

where we must define specially $v^{\Phi_0} = v$, an invariant, and 0-vector ("scalar") differentiation $\nabla_{\Phi_0} = \nabla$ is the identity operation. Φ_p and Ψ_q are short for the set of p- and q-vector indices $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ and $\psi_1 \ldots \psi_q$ resp. Thus Φ_p is defined by giving the combination $\{\varphi_1 \ldots \varphi_p\}$ of the integers $1, \ldots, n$, p at a time, in some definite order modulo an even permutation. It can thus be compactly written $[\varphi_1 \ldots \varphi_p]$. $\nabla^p_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]}$ signifies the alternating part of the p-th covariant derivative. ∇_{Φ_p} is linear of course.

Now restricting ourselves to a symmetric connection, the p-vector derivative, like the classical 1-vector derivative, depends on v^ν and $\partial_\varphi v^\nu$ but on ***no higher derivatives***. Namely

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} = \begin{cases} \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1}|\Pi_q|} \nabla_{\varphi_p]} v^{\Pi_q} & [p \text{ odd}] \\ \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} v^{\Pi_q} & [p \text{ even}] \end{cases} \tag{1.3}$$

for certain tensors $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ [p even] as will be shown presently. The analogy of p- with 1-vector differentiation is more clearly shown if we write (1.3) as

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} = (d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} + \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}) v^{\Pi_q} \tag{1.3}'$$

where $d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ is the linear differential operator and $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ the connection quantity given by

$$\begin{cases} \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1}|\Lambda_q|} \Gamma^{\Lambda_q}_{\varphi_p] \Pi_q} & [p \text{ odd}] \\ d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1}|\Pi_q|} \partial_{\varphi_p]}, \quad [p \text{ odd}]; \qquad d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} = 0 \quad [p \text{ even}]. \end{cases} \tag{1.3}''$$

Equation (1.3) is verified as follows. For $p = 0$, it is true with

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_0 \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{\Pi_q} = A^{\Psi_q}_{\Pi_q} \equiv A^{[\psi_1 \cdots \psi_q]}_{\pi_1 \ldots \pi_q} 1)$$

and

$$A^{\Psi_0}_{\Pi_0} = 1.$$

For $p = 1$, it is true identically. Moreover

$$\begin{cases} \nabla_\varphi v^{\Pi_q} = \partial_\varphi v^{\Pi_q} + \Gamma^{\Pi_q}_{\varphi \Lambda_q} v^{\Lambda_q} & \text{with} \\ \Gamma^{\Pi_q}_{\varphi \Lambda_q} \equiv q A^{[\pi_1 \cdots \pi_{q-1}}_{[\lambda_1 \ldots \lambda_{q-1}} \Gamma^{\pi_q]}_{|\varphi| \lambda_q]}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Hence for $p = 2$, it is true with

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_2 \Pi_q} \equiv q A^{[\psi_1 \cdots \psi_{q-1}}_{[\pi_1 \ldots \pi_{q-1}} \Gamma^{\psi_q]}_{|\Phi_2| \pi_q]} \tag{1.5}$$

and

$$\Gamma^\nu_{\Phi_2 \pi} \equiv -\tfrac{1}{2} R^\nu_{\varphi_1 \varphi_2 \pi} \quad \text{where}$$

$$R^\nu_{\varphi_1 \varphi_2 \pi} \equiv -2 \partial_{[\varphi_1} \Gamma^\nu_{\varphi_2] \pi} - 2 \Gamma^\nu_{[\varphi_1 |\lambda|} \Gamma^\lambda_{\varphi_2] \pi}, \tag{1.5}'$$

the ordinary curvature tensor, by the rule for the commutation of ordinary covariant differentiation. For $p=3$, using $\nabla_{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}=\nabla_{[\varphi_1}(\nabla_{\varphi_2\varphi_3]})$ and the Leibniz rule for ordinary covariant differentiation,

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \nabla_{\Phi_3} v^{\Psi_q}=\nabla_{[\varphi_1}\Gamma^{\Psi_q}_{\varphi_2\varphi_3]\Lambda_q}v^{\Lambda_q}+\Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_2\varphi_3|\Lambda_q|}\nabla_{\varphi_1]}\,v^{\Lambda_q} \\ \qquad\quad =\Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_1\varphi_2|\Lambda_q|}\nabla_{\varphi_3]}\,v^{\Lambda_q} \end{cases}$$

by the identity

$$(1.6)'\qquad \nabla_{[\varphi_1}\Gamma^{\Psi_q}_{\varphi_2\varphi_3]\Lambda_q}=0$$

following from the Bianchi identity in view of (1.5), (1.5)′, and the assumed symmetry of the connection. The cases $p\geq 4$ now involve nothing new, and the form (1.3) for $\nabla_{\Phi_p}v^{\Psi_q}$ is seen to be obtained. Thereby the $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}\Pi_q}$ are given by

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Pi_q}=A^{\Psi_q}_{\Pi_q}\quad[j=0]$$

$$(1.7)\qquad \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}\Pi_q}=\Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_1\varphi_2|\Lambda^{(1)}_q|}\Gamma^{\Lambda^{(1)}_q}_{\varphi_3\varphi_4|\Lambda^{(2)}_q|}\cdots\Gamma^{\Lambda^{(j-1)}_q}_{\varphi_{2j-1}\varphi_{2j}]\Pi_q}\quad[j\geq 1]$$

with $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_3\Pi_q}$ given by (1.5) and (1.5)′. All these $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}\Pi_q}$ satisfy the Bianchi identity

$$(1.8)\qquad \nabla_{[\Psi}\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}]\Pi_q}=0.$$

And now definitions analogous to (1.2) serve to define $\nabla_{\Phi_p}v_{\Psi_q}$ and the differentiation of tensors with p-vector indices of any valence. The corresponding formulae are evident in view of those already given. The Leibniz rule for product differentiation has the p-vector analogue

$$(1.9)\qquad \nabla_{\Phi_p}(T^{\Psi}S^{\Pi})=\sum_{q=0}^{p}{}^{p}\Theta^{q}\nabla_{[\Phi_p}T^{\Psi}\nabla_{\Phi_{p-q}]}S^{\Pi}$$

(correspondingly for other index positions and valences) where the coefficients are given by

$$(1.9)'\qquad {}^{p}\Theta^{q}=(-1)^{q(p-q)}\,{}^{p}\Theta^{p-q}\equiv(-1)^{q}\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots j_q\in\{1,\ldots p\}\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}}(-1)^{j_1}(-1)^{j_2}\ldots(-1)^{j_q}$$

of which the first few are

$$(1.9)''\qquad {}^{p}\Theta^{0}=+1,\qquad {}^{p}\Theta^{1}=p\ (\mathrm{mod}\ 2),\qquad {}^{p}\Theta^{2}=\tfrac{1}{2}\{p+p\ (\mathrm{mod}\ 2)\},\ldots.$$

This allows, as usual, the derivation of the derivatives of higher valence tensors in terms of those of scalars and vectors alone.

II. The space S_{2^n}.

The foregoing suggests the introduction of the local (2^n-1)-dimensional projective spaces S_{2^n} whose points V^{Φ} are ordered collections of (contravariant) p-vectors: $\{v, v^{\varphi}, v^{\varphi_1\varphi_2},\ldots v^{\varphi_1\cdots\varphi_n}\}$ running through the 2^n combinations $\varphi_1\ldots\varphi_p$ $[p=0,1,\ldots,n]$. A (holonomic or non-holonomic) change of system

$(\varphi)\to(\varphi')$ in the base space induces the change of system $(\Phi)\to(\Phi')$ in S_{2^n} in which

$$V^{\Phi'} = A^{\Phi'}_{\Phi}(x^\mu)\, V^{\Phi} \quad [A^{\Phi'_p}_{\Phi_r} \equiv \delta^p_r\, A^{[\varphi'_1\ldots\varphi'_p]}_{\varphi_1\ldots\varphi_p},\ A^{\Phi'_0}_{\Phi_0} \equiv 1]. \tag{2.1}$$

Note that there are no "cross terms" in $A^{\Phi'}_{\Phi}$ linking the p-vector component $v^{\Phi'_p}$ of $V^{\Phi'}$ with its old r-vector components v^{Φ_r} for $r \neq p$. This peculiar situation obtains only between systems (Φ) such as are defined here in terms of the systems (φ) of the base space. These systems will be called *substratum* systems and designated generally by capital Greek letters (Π), (Φ), etc. A general transformation in S_{2^n}:

$$A^{A}_{\Phi}(x^\mu), \qquad [A = 1, \ldots, 2^n], \qquad \operatorname{Det} A^{A}_{\Phi} \neq 0,$$

abolishes this segregation.

If the base space is linearly connected, a linear connection is induced in S_{2^n}. Moreover, the notion of p-vector covariant differentiation provides the natural extension of the range of the differentiation index to the dimension of the space. We define

$$\nabla_\Phi V^\Psi \equiv \nabla_\Phi v^\Psi \quad [(\Psi) \text{ substratum}]. \tag{2.2}$$

Then by (1.3)′ this can be written in the form

$$\nabla_\Phi V^\Psi = (d^{\Psi}_{\Phi\Pi} + \Gamma^{\Psi}_{\Phi\Pi})\, V^\Pi. \tag{2.2}'$$

Comparing with (1.3)′, we get

$$d^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_r} = \delta^q_r\, d^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_q}, \qquad \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_r} = \delta^q_r\, \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_q} \quad [(\Psi) \text{ substratum}]. \tag{2.3}$$

When now we require the covariant derivative $\nabla_P V^A \equiv A^\Phi_P \nabla_\Phi V^A$ to be of the form (2.2)′ in any system (A) in S_{2^n}, the usual procedure, expressing the covariance of the right member, gives us the new connection components $\Gamma^B_{PA} \equiv A^\Phi_P \Gamma^B_{\Phi A}$:

$$0 = A^\Phi_P \{d^\Psi_{\Phi\Pi}\, A^\Pi_A + \Gamma^\Psi_{\Phi\Pi} A^\Pi_A - A^\Psi_B\, \Gamma^B_{\Phi A}\}. \tag{2.4}$$

Curvature: Classically, the alternating part of the second covariant derivative of a vector is linear in the components of the vector; the coefficients then define the curvature tensor:

$$2!\, \nabla^2_{[\pi\varphi]}\, v^\Psi \equiv -\, R^\Psi_{\pi\varphi\lambda}\, v^\lambda.$$

The alternating part of iterated covariant p-vector differentiation will also serve us to define the curvature with respect to the S_{2^n}. First we note that by definition

$$\nabla_{[\Pi_p}(\nabla_{\Phi_q]} V^\Psi) = \nabla_{\Lambda_{p+q}} V^\Psi \quad [\Lambda_{p+q} \equiv [\Pi_p \Phi_q]]. \tag{2.5}$$

Referring to (1.3), we see that only in the case $p+q$ even is the operator $\nabla_{\Lambda_{p+q}}$ necessarily independent of ∂_φ. Accordingly, we can define these components of the curvature tensor by:

$$(p+q)!\, \nabla_{[\Pi_p}(\nabla_{\Phi_q]} V^\Psi) \equiv -\, N^\Psi_{\Lambda_{p+q}\Omega} V^\Omega \quad [\Lambda_{p+q} \equiv [\Pi_p \Phi_q]]. \tag{2.6}$$

By (2.5) then,

$$N^{\Psi}_{\Lambda_{2j}\Omega} \equiv -(2j)!\,\Gamma^{\Psi}_{\Lambda_{2j}\Omega} \quad [0 \leq j] \tag{2.7}$$

so that we get no new differential invariants—the curvature tensor is already comprised in our linear connection. Curvature is thus seen to be essentially a tensor bearing three p-vector indices, of which the first is an even p-vector. The classical case is that of one 2-vector and two 1-vector indices. Completing the definition by putting, say,

$$N^{\Psi}_{\Lambda_{2j+1}\Omega} = 0 \quad [0 \leq j] \tag{2.7'}$$

we have the curvature tensor defined in a substratum system and hence in any system (A) in S_{2^n}.

Abstractly considered, the 2^n+1 p-vector derivative operators $a_{\Pi} \leftrightarrow \nabla_{\Pi}$ (adjoining $a_0 \leftrightarrow \nabla_0 \cdot \equiv \cdot$ multiplication by zero) under the multiplication $a_{\Pi} \cdot a_{\Phi}$ defined by alternated iteration $\nabla_{[\Pi}(\nabla_{\Phi])}$ form a non-commutative finite linear associative algebra. All non-zero elements are of the form $a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{j_n}$ $[j_i = 0 \text{ or } 1]$ and the multiplication law results from the law for the a_{φ}, namely

$$a_{\pi} \cdot a_{\varphi} = -a_{\varphi} \cdot a_{\pi} \quad [\pi, \varphi = 1, \ldots, n]. \tag{2.8}$$

Substituting the expressions $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_s \Pi_q}$ given by (1.5) into (1.7) we arrive at the decomposition of $\Gamma^{\Psi}_{\Phi_{2j}\Pi}$ given by [2])

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}\Pi_r} = \delta^q_r \left\{ q^j A^{[\Psi_q}_{[\ldots}{}^{[\Pi_{q-1}} \Gamma^{\Psi_q]}_{[\varphi_1\varphi_2|\lambda_1|]} \Gamma^{\lambda_1}_{\varphi_3\varphi_4|\lambda_2|]} \cdots \Gamma^{\lambda_{j-1}}_{\varphi_{2j-1}\varphi_{2j}]\pi_q]} \right\} \tag{2.9}$$

$$[(\Pi) \text{ substratum}].$$

The ordinary curvature ($\propto \Gamma^{\Psi}_{\Phi_s \pi}$) of the base space thus generates the curvature associated with the S_{2^n}. Accordingly, the condition $N^{\Psi}_{A\Omega} = 0$ is seen to be equivalent to $R^{\nu}_{A_s \omega} = 0$ whose geometrical meaning in the affine case is that the base space is a flat affine space and in the projective case (with the condition $\Gamma^{\nu}_{\varphi\pi} x^{\pi} = A^{\nu}_{\varphi}$ adjoined) that the base space is a flat projective space[3]). Quadric in S_{2^n}: The existence of a non-singular quadric $g_{\mu\varrho}$ in the local spaces of the base space induces a non-singular quadric in the local spaces S_{2^n} in the obvious way

$$S_{\Phi_r \Psi_r} \equiv \delta^p_r\, g_{[\varphi_1[\nu_1} g_{|\varphi_2|\nu_2|} \cdots g_{|\varphi_p]\nu_p]}, \quad S_{\Phi_s \Psi_s} \equiv 1. \tag{2.10}$$

In the affine case, with the quadric as metric, the affine space becomes Riemannian; in the projective case, the projective space becomes the generalized conformal space K_{n-2}[4]) with fundamental quadric $g_{\mu\varrho}$.

If indices are raised and lowered with $g_{\mu\varrho}$ in the base space, they are raised and lowered with $S_{\Phi\Psi}$ in S_{2^n}. (Geometrically, V_{Φ} is polar to V^{Φ} in the quadric

$$S_{\Phi\Psi} W^{\Phi} W^{\Psi} = 0$$

---

[2]) The notation means that Π_{q-1} is alternated separately with each of the j indices $\lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}$ and π_q, while the φ's are alternated by themselves.

[3]) SCHOUTEN, J., and J. HAANTJES: Comp. Math. **3**, 20 (1936).

[4]) INGRAHAM, R.: Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 921, (1952); Nuovo Cimento **9**, 886 (1952).

if its component p-vectors are polar to the corresponding p-vectors of V^Φ in the quadric

$$g_{\varphi\psi} w^\varphi w^\psi = 0 \qquad \text{and conversely.)}$$

If the connection in the base space fixes the quadric: $\nabla_\pi g_{\varphi\psi} = 0$, then the connection of the S_{2^n} fixes the quadric in S_{2^n}: $\nabla_\Pi S_{\Phi\Psi} = 0$ and conversely. (In this case $\Gamma^\psi_{\varphi\pi} = \{^\psi_{\varphi\pi}\}_g$, the Christoffel symbols of $g_{\varphi\psi}$ and $\Gamma^\Psi_{\Pi\Phi}$ is built out of these.) Further parallels are too numerous to be dealt with here.

III. S_{2^n} as Space of Spin-Collineations.

We want now to consider an especially interesting transformation $(\Phi) \to (A)$ in S_{2^n} for the case n even ($n \equiv 2\nu$), where (Φ) is a substratum system and (A) is now to be defined.

The local spin-spaces[5]) associated with the local (affine or projective) spaces of the base space, provided with quadric $g_{\mu\varrho}$, are complex projective spaces $P^*_{2^\nu - 1}$ in which are given n (normalized) involutions $\eta^\varrho{}_{a}{}^{}_{b}$ $[a, b = 1, \ldots, 2^\nu]$ or simply η^ϱ in matrix notation satisfying

$$\eta^{(\mu}\eta^{\varrho)} = g^{\mu\varrho} B \qquad \text{[matrix multiplication]} \tag{3.1}$$

$B\,(\equiv B^a_b)$ the unity tensor of spin space. Let now $A \equiv (^{a_1}{}_{a_2})$ stand for a set of collineation indices; then A runs through $(2^\nu)^2 = 2^n$ elements. Defining

$$\eta^{\Phi_0}_A \equiv B^{a_1}_{a_2}, \qquad \eta^{\Phi_p}_A \equiv \eta^{[\varphi_1}{}^{a_1}_{c_1} \eta^{\varphi_2}{}^{c_1}_{c_2} \ldots \eta^{\varphi_p]}{}^{c_{p-1}}_{a_2} \tag{3.2}$$

and setting $A^\Phi_A \equiv \eta^\Phi_A$, then the inverse exists, and is given by

$$A^A_{\Phi_p} = (-1)\,(^p_2)^{1}/_{2^\nu}\,\eta^A_{\Phi_p} \qquad [p = 0, 1, \ldots, n] \tag{3.3}$$

where Φ in η_Φ is lowered with $S_{\Phi\Psi}$ and for any T and $A \equiv (^{a_1}{}_{a_2})$, $T^A = T^{a_2}{}_{a_1}$. This theorem, which we write in the form

$$A^A_\Phi A^\Psi_A = A^\Psi_\Phi \tag{3.4}$$

merely states that every element except the identity of the Clifford algebra defined by (3.1) has vanishing trace[6]). Thus $A^\Phi_A \equiv \eta^\Phi_A$ defines an admissible transformation in S_{2^n}. Then the formula

$$V^A = A^A_\Phi V^\Phi \tag{3.5}$$

exhibits a 1—1 mapping of ordered collections of p-vectors onto collineations in spin-space. (This fact was noted by Givens, ref. 5, Chap. 8, § 2.) S_{2^n} is thus nothing else than the space of spin-collineations.

The introduction of a fundamental quadric and linear connection into spin-collineation space is thus a fait accompli. The quadric is

$$S_{AB} = A^{\Phi\Psi}_{AB} S_{\Phi\Psi}. \tag{3.6}$$

---

[5]) VEBLEN, O., and J. GIVENS: Geometry of Complex Domains, lectures given at the Inst. for Advanced Study, Chap. 5. 1935/36.

[6]) VEBLEN, O., and J. GIVENS: Geometry of Complex Domains, lectures given at the Inst. for Advanced Study, Chap. 8, § 2. 1935/36.

The spin-collineation derivative of spin-collineations is given by (2.2)′ with indices $P, A, B, \ldots$ etc., where the spin-collineation linear connection Γ^B_{PA} transforms according to (2.4). By extending the range of the differentiation index from n to 2^n we have effectively defined the covariant derivative of a spin-collineation *with respect to a spin-collineation* [in the precise sense that ∇_P bears a collineation index and these 2^n operators ∇_P are in general linearly independent:

$$C^P \nabla_P V^A = 0$$

for all V^A only if all $C^P = 0$. This last is evident from (1.3) and (1.7[7])]. The spin-collineation curvature has been defined: (2.7), (2.7)′.

The transformation rule (2.4) for $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$ gives by (3.2)

$$\nabla_\varphi A^\psi_A \equiv \nabla_\varphi \eta^\psi_A = 0 \tag{3.7}$$

so that the spin-collineation connection automatically fixes the family of involutions η^ψ_A. (The discovery of a *vector* connection in spin-space which does this is of course a different problem.)

Due to the very special nature of the system (A) [arising from equation (3.1)], it has special properties not shared by a general system. Let us choose (a) in spin-space and (φ) (non-holonomic) in the base space *canonically* related, i.e., such that the η^φ are certain canonical constant matrices over the manifold. [The possibility of doing this is the fundamental theorem of spin-space[8]).] By (3.1) $g_{\mu\varrho}$ is then constant. Then it follows that the A^Φ_A and A^A_Φ are constants, so that the solution of (2.4) for the spin-collineation connection is simply

$$\Gamma^B_{PA} = A^{\Phi\Pi B}_{PA\Psi} \Gamma^\Psi_{\Phi\Pi} \quad [(a) \text{ can. } (\varphi)] \tag{3.8}$$

which may be reduced out in terms of the basic $\Gamma^\psi_{\varphi\pi}$ and $\Gamma^\psi_{\varphi_1\varphi_2\pi}$.

---

[7]) The affine case is meant here; the statement requires modification in the projective case due to the identity $x^\mu \partial_\mu v = 0$ for any v homogeneous of degree zero. Its truth in the affine case can be seen by considering, e.g., the case of constant non-zero curvature

$$\Gamma_{\Phi_2 \pi \psi} = K \left(g_{[\varphi_1 |\pi|}\, g_{\varphi_2]\psi}\right) \equiv K S_{\Phi_2 \Lambda_2}, \qquad \Lambda_2 \equiv [\pi \psi].$$

Then it follows from (2.9) that more generally for $j \geq 1$,

$$\Gamma_{\Phi_2 \Pi_j \Psi_j} = j K^j S_{\Phi_2 \Lambda_2}, \qquad \Lambda_{2j} \equiv [\Pi_j \Psi_j]$$

so that the linear independence of the 2^n operators ∇_Φ follows from the non-singularity of $S_{\Phi\Psi}$, which means

$$\text{Det } S_{\Phi_p \Psi_p} \neq 0 \; [p = 0, 1, \ldots, n].$$

A notable case of linear dependence is the flat case ($K = 0$) in which only the scalar and vector derivatives are linearly independent.

[8]) SCHOUTEN, J.: Proc., Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam **52**, 179 (1949).

Institute for Advanced Study, Princeton N.J., U.S.A.

(Eingegangen am 21. Oktober 1952).

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 272—280 (1953)

Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist.

Von
K. P. GROTEMEYER.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Herr E. REMBS [1] eine Vermutung von Herrn W. Süss bewiesen, daß beschränkte, konvexe Flächen, die berandet werden von einer geschlossenen Eigenschattengrenzkurve, infinitesimal starr sind, wenn die Randkurve bei der infinitesimalen Verbiegung Eigenschattengrenze bleibt. Im ersten Teil der vorliegenden Note soll ein neuer, einfacher Beweis für diesen Satz erbracht werden. Weiter wird gezeigt, daß konvexe Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze ist, gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr sind, die die Bogenlängen der sphärischen Bilder der Randkurven stationär lassen. Im nächsten Teil werden die endlichen Verbiegungen der vorliegenden Flächenklasse untersucht. Auch hier läßt sich zeigen, daß die Flächen der betrachteten Klasse gegenüber endlichen Verbiegungen starr sind, wenn die Randkurve beim Verbiegungsprozeß Eigenschattengrenze bleibt. Zum Abschluß sei dann noch die endliche Verbiegung eines konvexen Flächenstückes betrachtet, welches von zwei sich nicht schneidenden Kurven berandet wird. Längs der einen Randkurve sei der Normalenvektor der Fläche konstant (d.h. längs dieser Kurve verschwindet die GAUSSsche und die Normalkrümmung). Die Fläche berührt also längs dieser Kurve eine feste Ebene. Ist jetzt etwa die andere Randkurve Eigenschattengrenze bei Beleuchtung senkrecht zu der festen Ebene der ersten Randkurve, so ist dieses Flächenstück bei endlichen Verbiegungen starr, wenn nur die zweite Randkurve Eigenschattengrenze bleibt. Für die Starrheitsaussage spielt also nur die Eigenschaft der zweiten Randkurve eine Rolle.

Die Bezeichnungsweise ist einer früheren Arbeit entnommen [4].

1. Die natürliche Gleichung für den Flächenstreifen längs einer Eigenschattengrenze.

Es sei $\mathfrak{e}$ ein konstanter Einheitsvektor, der die Lichtrichtung bei der Beleuchtung eines Flächenstückes angeben möge. Längs einer Eigenschattengrenzkurve muß dann gelten:

$$(\mathfrak{e}\,\xi) = 0 \quad \text{und abgeleitet} \quad (\mathfrak{e}\,\dot{\xi}) = 0. \tag{1}$$

Da in einem nicht parabolischen Flächenpunkt die Vektoren $\xi, \dot{\xi}$ linear unabhängig sind, so folgt für die Punkte mit $K \neq 0$ auf einer Eigenschattengrenze:

$$\mathfrak{e} = \frac{[\xi\,\dot{\xi}]}{|\dot{\xi}|}.$$

Unter Benutzung der Ableitungsgleichung[1]) für $\dot{\xi}$ erhalten wir:

$$\mathfrak{e} = \frac{a\,\dot{\mathfrak{x}} + b\,\eta}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,. \tag{2}$$

Führen wir noch den Winkel Θ ein:

$$\cos\Theta = \frac{a}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,; \qquad \sin\Theta = \frac{b}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,, \tag{3a}$$

so läßt sich die Gl. (2) so schreiben:

$$\mathfrak{e} = \cos\Theta\,\dot{\mathfrak{x}} + \sin\Theta\cdot\eta\,. \tag{3}$$

Aus der Bedingung $\mathfrak{e} = \text{const}$ oder $\dot{\mathfrak{e}} = 0$ folgt unter Anwendung der Ableitungsgleichungen für einen Flächenstreifen die gesuchte „natürliche Gleichung" für den Flächenstreifen einer Eigenschattengrenze:

$$c + \dot{\Theta} = 0 \tag{4}$$

oder

$$c + \frac{d}{ds}\left\{arc\,cotg\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = 0\,. \tag{5}$$

Man erkennt auch unmittelbar, daß der Flächenstreifen einer Eigenschattengrenze zylindrisch ist. Auf Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung sind die Eigenschaften einer Kurve, Eigenschattengrenze zu sein oder einen zylindrischen Flächenstreifen zu besitzen, äquivalent.

Da wir weiterhin nur Flächen betrachten, die durchweg positive Gausssche Krümmung besitzen[2]), so läßt es sich stets so einrichten, daß die zweite Fundamentalform an diesen Stellen positiv definit wird. Die Normalkrümmung $b(s)$ ist dann stets negativ. Dann läßt sich aber der Winkel Θ wegen (3a) so wählen, daß

$$0 \leq -\Theta \leq \pi\,. \tag{6}$$

In den Abschnitten 2., 3. und 4. betrachten wir beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung, die von einer geschlossenen, zweimal stetig differenzierbaren Eigenschattengrenze berandet werden. Wenn $\mathfrak{e}$ die Lichtrichtung ist, so verschwindet die Funktion $(\mathfrak{e}\,\xi)$ auf dem Rande des vorliegenden Flächenstückes und ändert auf demselben nirgends das Vorzeichen. Bei der obigen Wahl des Zeichens von $\mathfrak{e}$ gilt:

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0\,. \tag{7}$$[3])

Da die zweite Fundamentalform nicht negativ definit sein soll, so weist der Vektor ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle.

---

[1]) Vgl. W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. I, 4. Aufl., S. 67ff.; desgleichen [4] S. 255.

[2]) Wenigstens längs der betrachteten Eigenschattengrenze.

[3]) Das sphärische Bild der vorliegenden Flächen ist bekanntlich genau die Halbkugel. $\mathfrak{e}$ ist der Stellungsvektor der Randebene dieser Halbkugel.

2. Die infinitesimale Verbiegung konvexer Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze bleiben soll[4]).

Es sei $\mathfrak{y}$ der Drehriß der genannten Fläche: $\mathfrak{y}_i = \alpha_i^K \mathfrak{x}_K$. Weiter gilt der vektorielle Integralsatz:

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, \xi \, do = \tfrac{1}{2} \oint [\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] \, ds. \tag{8}$$

Der Vektor $\dot{\mathfrak{y}}$ läßt sich so darstellen:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \delta a \, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b \, \eta. \tag{9}^{5})$$

Die skalare Multiplikation von (8) mit dem Vektor $\mathfrak{e}$ liefert nach (2):

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, (\mathfrak{e}\, \xi) \, do = \frac{1}{2} \oint \delta\left(\frac{a}{b}\right) \frac{b^2 \varphi}{|\sqrt{a^2 + b^2}|} \, ds. \tag{10}$$

Es gilt nämlich: (nach (2) und (9))

$$[\dot{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{e}] = \frac{\delta a \cdot b - \delta b \cdot a}{|\sqrt{a^2 + b^2}|} \cdot \xi \quad \text{also} \quad (\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{e}) = \frac{\delta\left(\frac{a}{b}\right)}{|\sqrt{a^2 + b^2}|} \varphi\, b^2.$$

Hier ist $\varphi = (\mathfrak{y}\, \xi)$ die WEINGARTENsche Funktion.

Soll nun während der infinitesimalen Verbiegung der Rand Eigenschattengrenze bleiben, so ist die Gleichung (5) auch für die „verbogene Fläche" gültig. Andererseits ist aber für jede infinitesimale Verbiegung $\delta c \equiv 0$ ([5] Gl. (27)). Nach dem Gesagten gilt dann für die Verbiegungen, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, erhalten:

$$\delta\left\{arc\ cotg\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = 0. \tag{11}$$

Wegen (10) ist dann:

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, (\mathfrak{e}\, \xi) \, do = 0.$$

Da ein Vorzeichenwechsel und das identische Verschwinden von $(\mathfrak{e}\, \xi)$ ausgeschlossen ist, so folgt, da wegen $K > 0$ $\|\alpha_i^K\| \leq 0$ ist:

$$\|\alpha_i^K\| = 0.$$

Daraus ergibt sich die Starrheitsaussage $\alpha_i^K = 0$. Wir formulieren das gewonnene Ergebnis in dem

Satz 1: *Ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit $K > 0$, welches von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird, ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, nicht ändern.*

---

[4]) Eine ausführliche Darstellung der infinitesimalen Verbiegung in der hier benutzten Bezeichnungsweise findet sich in [5]. Hier findet sich auch die Herleitung des Integralsatzes (8).

[5]) δa und δb sind die „Variationen" der geodätischen Torsion und Normalkrümmung längs der betrachteten Kurve bei der infinitesimalen Verbiegung, d.h. bei der Variation des Flächenstückes unter der Nebenbedingung $\delta g_{iK} = 0$. (g_{iK}: metrischer Fundamentaltensor.) Vgl. [5].

Nach früher Bemerktem läßt sich also ein Flächenstück mit $K > 0$, welches von einem zylindrischen Randstreifen berandet wird, nicht infinitesimal verbiegen, so daß der Randstreifen zylindrisch bleibt. (Abgesehen natürlich von der infinitesimalen Bewegung.)

Die Gültigkeit des Satzes wurde kürzlich von Herrn E. REMBS, angeregt durch eine Vermutung von Herrn W. SÜSS, nachgewiesen [1]. Herr REMBS benutzt die bekannte Integralformel von Herrn W. BLASCHKE und wendet dann einige Sätze über die Eigenschaften der Komponenten des Drehrisses $\mathfrak{y}$ an, die er an anderer Stelle hergeleitet hat [2].

3. Die infinitesimale Verbiegung einer konvexen Fläche, deren Rand Eigenschattengrenze ist, bei stationärer Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve.

Wir wenden jetzt eine Integralformel, die wohl von E. REMBS zuerst angegeben ist [2] (allerdings in etwas anderer Form, als sie hier benutzt wird) auf die Flächen der vorgelegten Klasse an. Diese Formel lautet:

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, S \, do = \oint (\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{y}})\,(\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{12}$$ [6])

Darin ist $S = (\hat{\mathfrak{x}}\,\xi)$ mit $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathfrak{e}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x})$ d.h. $\hat{\mathfrak{x}}$ ist der in die Richtung $\mathfrak{e}$ „projizierte Ortsvektor" des Flächenstückes. $\bar{\mathfrak{y}}$ ist der SAUERsche Verschiebungsriß ([3] und [5]). Wegen (2) geht das Randintegral von (12) über in:

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, S \, do = \oint \frac{a\,\delta a + b\,\delta b}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,(\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{y}})\, ds$$

oder

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, S \, do = \oint \delta\,|\sqrt{a^2+b^2}|\,(\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{13}$$

Weiter überzeugt man sich leicht, daß die Funktion

$$S = (\mathfrak{x}\,\xi) - (\mathfrak{e}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{e}\,\xi)$$

bei geeigneter Wahl des Nullpunktes des Koordinatensystems das Vorzeichen nicht ändert. Legen wir etwa den Ursprung des Koordinatensystems in den Flächenpunkt, indem die Tangentialebene den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt. (Da das sphärische Bild der Fläche genau eine Halbkugel ist, und die Randebene dieser Halbkugel den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt, so ist der genannte Flächenpunkt eindeutig bestimmt.) Die Fläche liegt dann ganz auf einer Seite dieser Tangentialebene und es ist: $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}) \gtrsim 0$. Weiter ist $(\mathfrak{x}\,\xi) \lesssim 0$, weil ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle weist. Nach (7) ist endlich noch $(\mathfrak{e}\,\xi) \gtrsim 0$. Daher

$$S \lesssim 0.$$

Wenn nun $|\sqrt{a^2+b^2}|$ am Rande der Fläche während des Verbiegungsprozesses stationär bleibt (d.h. $\delta|\sqrt{a^2+b^2}|$ muß am Rand verschwinden), so folgt wieder

$$\iint \|\alpha_i^K\| \, S \, do = 0.$$

[6]) Man vgl. [5] Gl. (16).

Daraus folgt dann aber wie unter 2. das Verschwinden von $\|\alpha_i^K\|$. Da $K>0$ ist, liefert $\|\alpha_i^K\|=0$ die Starrheitsaussage. Nun ist $\sigma(s)=\int_0^s |\sqrt{a^2+b^2}|\,ds$ die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve. Wenn $\delta\sigma=0$, so folgt $\delta|\sqrt{a^2+b^2}|=0$. Somit haben wir den folgenden Satz gefunden:

Satz 2. *Ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit positiver* GAUSSscher *Krümmung, welches von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird, ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve stationär lassen.*

Aus der beim Beweis des Satzes 1 angewandten Integralformel (10) erkennt man, daß die konvexen Flächen, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet werden, gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr sind, die eine „charakteristische Funktion" φ besitzen, die am Rande verschwindet. Nach dieser Feststellung können wir die gleichen Folgerungen ziehen, wie sie im Anschluß an den Satz 3 der Arbeit [5] angestellt wurden.

4. Die endliche Verbiegung konvexer Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze bleiben soll.

Als wichtigstes Hilfsmittel verwenden wir die in [4][7]) hergeleitete Integralformel mit vektoriellen Integranden:

$$\iint \frac{\|A_{iK}\|}{g}\,\xi\,do=-\oint A^{iK}\,n_i\,\mathfrak{x}_K\,ds.$$

In [6] ist gezeigt worden, daß sich der Integrand des Randintegrals so schreiben läßt:

$$\iint \frac{\|A_{iK}\|}{g}\,\xi\,do=\oint\{(a-a^*)\,\dot{\mathfrak{x}}+(b-b^*)\,\eta\}\,ds. \tag{14}$$

Hier sind a^* und b^* die geod. Torsion und Normalkrümmung der zur vorliegenden isometrischen Fläche. $A_{iK}=B_{iK}-B_{iK}^*$ ist die Differenz der beiden zweiten Fundamentaltensoren der zueinander isometrischen Flächen. Wegen $K>0$ läßt es sich so einrichten, daß beide Tensoren positiv definit werden. Dann ist $\|A_{iK}\|\leqq 0$ und aus $\|A_{iK}\|=0$ folgt $A_{iK}=0$, d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der beiden isometrischen Flächen.

Es sei jetzt $\mathfrak{F}$ eine beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit $K>0$, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird. $\mathfrak{F}^*$ sei eine Fläche, die zu $\mathfrak{F}$ isometrisch ist. (Beide Flächen seien auf dasselbe, die Isometrie vermittelnde Parametersystem bezogen.) Ist weiter $\mathfrak{e}$ der in (2) definierte Vektor der Fläche $\mathfrak{F}$, so kann man, da nach (7) $(\mathfrak{e}\,\xi)$ das Zeichen nicht wechselt,

$$G(\mathfrak{F})=\iint \frac{\|A_{iK}\|}{g}\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do$$

als „Gesamtmaß" für die Verbiegbarkeit der vorliegenden Fläche $\mathfrak{F}$ in eine beliebige zu $\mathfrak{F}$ isometrische Fläche $\mathfrak{F}^*$ bezeichnen. Aus dem Verschwinden

[7]) Vgl. [4], S. 260 (4).

von G folgt die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$. Im übrigen ist $G(\mathfrak{F})$ nie positiv. Nach (14) erhalten wir

$$G(\mathfrak{F}) = \oint \frac{(a-a^*)\,a + (b-b^*)\,b}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,ds$$

oder

$$G(\mathfrak{F}) = \oint |\sqrt{a^2+b^2}|\,ds - \oint \frac{a\,a^* + b\,b^*}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\,ds.$$

Weil das sphärische Bild des Randes von $\mathfrak{F}$ ein Großkreis ist, so ist

$$\oint |\sqrt{a^2+b^2}|\,ds = \oint |\dot{\xi}|\,ds = 2\pi.$$

Wir führen noch die Größen

$$\cos\Theta^* = \frac{a^*}{|\sqrt{a^{*2}+b^{*2}}|}; \qquad \sin\Theta^* = \frac{b^*}{|\sqrt{a^{*2}+b^{*2}}|}$$

ein. ($e^* = \cos\Theta^*\,\dot{\xi}^* + \sin\Theta^*\,\eta^*$ ist der zu $\dot{\xi}^*$ konjugierte Vektor längs des Randes von $\mathfrak{F}^*$.) Wegen $K>0$ können wir auch hier wieder den Winkel Θ^* auf das Intervall $0 \leq -\Theta^* \leq \pi$ beschränken. Mit $\sigma^*(s) = \int_0^s |\sqrt{a^{*2}+b^{*2}}|\,ds$ als Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve von $\mathfrak{F}^*$ erhalten wir endlich:

(15) $$G(\mathfrak{F}) = 2\pi - \oint \cos(\Theta - \Theta^*)\,d\sigma^*.$$

Da der Rand von $\mathfrak{F}$ Eigenschattengrenze ist, so gilt:

(4) $$c + \dot{\Theta} = 0.$$

Nun sei auch der Rand von $\mathfrak{F}^*$ Eigenschattengrenze, d.h.

(16) $$c + \dot{\Theta}^* = 0.$$

(Als geodätische Krümmung ist c invariant gegenüber isometrischen Abbildungen.)

Aus den Gln. (4) und (16) folgt:

(17) $$\Theta - \Theta^* = \gamma = \text{const}.$$

Da der Rand von $\mathfrak{F}^*$ Eigenschattengrenze ist, so ist $\oint d\sigma^* = 2\pi$. Nach (17) und (15) ist dann

(18) $$G(\mathfrak{F}) = 2\pi\{1 - \cos\gamma\}.$$

Bestimmen wir jetzt den Wert der Konstanten γ. Zunächst gelten die Gleichungen für die Randkurven:

$$\oint \dot{\xi}\,ds = 0 \quad \text{und} \quad \oint \dot{\xi}^*\,ds = 0.$$

Da $\mathfrak{F}^*$ von einer Eigenschattengrenze berandet wird, ist der Einheitsvektor

$$e^* = \cos\Theta^*\,\dot{\xi}^* + \sin\Theta^*\,\eta^* \qquad \text{konstant.}$$

Daher ist

$$\oint (e\,\dot{\mathfrak{x}})\,ds = 0; \qquad \oint (e^*\,\dot{\mathfrak{x}}^*)\,ds = 0$$

oder wegen

$$(e\,\dot{\mathfrak{x}}) = \cos\Theta; \qquad (e^*\,\dot{\mathfrak{x}}^*) = \cos\Theta^*:$$

$$\oint \{\cos\Theta - \cos\Theta^*\}\,ds = 0,$$

somit

$$\sin\frac{\gamma}{2}\oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds = 0. \tag{19}$$

Daher sind zwei Fälle möglich:

$$1.\ \sin\frac{\gamma}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 2l\pi \quad (l = \text{ganzzahlig}). \tag{20}$$

$$2.\ \oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds = 0.$$

Wegen $0 \leq -\Theta \leq \pi$ und $0 \leq -\Theta^* \leq \pi$ liefert

$$0 \leq -\frac{\Theta+\Theta^*}{2} \leq \pi$$

$\sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2} \leq 0$. Es folgt also aus dem Verschwinden des Integrals

$$\oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds$$

$\Theta+\Theta^* = \text{const}$. Wegen (17) ist dann $\Theta = \text{const}$ und auch $\Theta^* = \text{const}$.

Aus $\oint \cos\Theta\,ds = 0$ und $\oint \cos\Theta^*\,ds = 0$ folgt dann aber $\cos\Theta = 0$ und $\cos\Theta^* = 0$. Weil $0 \leq -\Theta$; $-\Theta^* \leq \pi$ ist, so muß in diesem 2. Fall $-\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $-\Theta^* = \frac{\pi}{2}$ sein. Es ist also auch hier $\Theta - \Theta^* = 0$. Somit hat die Konstante γ stets den Wert:

$$\gamma = 2l\pi.$$

Weil jetzt $\cos\gamma = +1$ ist, so verschwindet $G(\mathfrak{F})$ und die beiden Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind kongruent oder symmetrisch. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 3. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ mit positiver* GAUSSscher *Krümmung gegeben, die von je einer geschlossenen Randkurve berandet werden.*

Sind die Randkurven beider Flächen Eigenschattengrenzen, so sind beide Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ kongruent oder symmetrisch zueinander.

(Wir können auch sagen: Sind die Randstreifen beider Flächen zylindrisch, dann sind beide Flächen kongruent oder symmetrisch.)

Sprechen wir den vorstehenden Satz noch für die endlichen Verbiegungen aus:

Eine beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit positiver GAUSSscher *Krümmung, welche von einer geschlossenen Eigenschattengrenze (von einem geschlossenen zylindrischen Randstreifen) berandet wird, läßt sich endlich nicht so verbiegen, daß der Rand seine Eigenschaft, Eigenschattengrenze (zylindrischer Streifen) zu sein, beibehält. (Von der trivialen „Verbiegung", der Bewegung, ist natürlich abzusehen.)*

5. Die endlichen Verbiegungen einer besonderen Flächenklasse.

Wir wollen sagen, eine Fläche gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist beschränkt und dreimal stetig differenzierbar.

2. Sie wird von zwei sich nicht schneidenden geschlossenen Kurven R_1 und R_2 berandet, die zweimal stetig differenzierbar sind. Längs R_1 sei der Flächennormalenvektor ξ konstant. [Das heißt längs R_1 ist $K=0$ und $b(s)=0$.]

3. In allen Punkten der Fläche, die nicht auf dem Rand R_1 liegen, ist $K>0$.

4. Die Projektion der Fläche auf die Ebene der Randkurve R_1 sei eindeutig. [Ist $\mathfrak{e}$ der Stellungsvektor dieser Ebene, so ändert $(\mathfrak{e}\,\xi)$ sein Vorzeichen auf der Fläche nicht.]

Wir nehmen weiter wieder an, daß der Flächennormalenvektor ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle der Fläche weist. Dann ist die zweite Fundamentalform in allen inneren Flächenpunkten positiv definit.

Ein einfaches Beispiel einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ ist der Teil eines Torus, den man erhält, wenn man alle Flächenpunkte mit negativer Gaussscher Krümmung wegläßt, dann den Torus längs des Äquators aufschneidet und eine Hälfte fortläßt.

Für die Verbiegung einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ kann man jetzt auch wieder wegen Eigenschaft 3. und 4. als „Gesamtmaß der Verbiegbarkeit" das Integral wählen:

$$G(\mathfrak{F}) = \iint \frac{\|A_{iK}\|}{g}\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do\,.$$

Dabei ist $\mathfrak{e}$ der Stellungsvektor der Randebene von R_1. Nach (13) gilt dann:

$$G(\mathfrak{F}) = \oint\limits_{(R_1)} \{(a-a^*)\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}) + (b-b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\}\,ds + \oint\limits_{(R_2)} \{(a-a^*)\,(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) + (b-b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\}\,ds\,.$$

Nun ist aber längs R_1: $\mathfrak{e}=\xi$ d.h. $(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}})=(\mathfrak{e}\,\eta)=0$. Daher:

$$G(\mathfrak{F}) = \oint\limits_{(R_2)} \{(a-a^*)\,(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) + (b-b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\}\,ds\,.$$

Wir können demnach sagen:

Das Verbiegbarkeitsmaß einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ hängt nur ab von den Eigenschaften der nicht parabolischen Randkurve R_2.

Ist also die nicht parabolische Randkurve einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ Eigenschattengrenze bei Beleuchtung senkrecht zu der Ebene der parabolischen Randkurve, so ist die Fläche gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, nicht ändern. Wir können aber auch die Sätze 1′ und 2′ der Arbeit [6] auf die Flächen der Klasse $\mathfrak{K}$ anwenden. Danach ist eine Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ gegenüber endlichen Verbiegungen starr, wenn nur die Randkurve, die nicht parabolisch

ist, kongruent bleibt. Ist die nicht parabolische Randkurve eben, so genügt für die Starrheit gegenüber endlichen Verbiegungen sogar nur das Festbleiben der Kurvenkrümmung dieser Randkurve. Nach diesen letzten Sätzen ist also das oben beschriebene „Viertel eines Torus" bei allen endlichen Verbiegungen starr, die nur den Randstreifen längs des Äquators zylindrisch lassen oder die nur die konstante Krümmung des Äquators nicht ändern.

Literatur.

[1] REMBS, E.: Zur Verbiegung der Flächen im Großen. Math. Z. **56**, 271. — [2] REMBS, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1930**, 127ff. — [3] SAUER, R.: Projektive Liniengeometrie, S. 145ff. Berlin u. Leipzig: W. de Gruyter & Co. 1937. — [4] GROTEMEYER, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253ff. — [5] GROTEMEYER, K. P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. Math. Vol. IV, Fasc. 2 (1953). — [6] GROTEMEYER, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953).

Weitere Literaturangaben finden sich in der unter [1] genannten Arbeit.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1952.)

RIEGER, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 281—283 (1953)

Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems.

Von
G. J. RIEGER.

L. SCHNIRELMANN[1]) hat mit den bekannten analytischen Methoden, wie sie von HARDY, LITTLEWOOD, WINOGRADOFF u. a. verwendet wurden, folgende Verallgemeinerung des WARING-HILBERTschen Satzes bewiesen:

Satz. *Ist $\mathfrak{M}$ eine monotone Folge natürlicher Zahlen, die die Null enthält und eine positive Dichte $d(\mathfrak{M})$ hat, so bilden die n-ten Potenzen der Zahlen aus $\mathfrak{M}$ eine Basis der natürlichen Zahlen.*

Für $d(\mathfrak{M}) = 1$ ist das offenbar die Aussage des WARING-HILBERTschen Satzes[2]).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen kurzen und elementaren Beweis des verallgemeinerten Satzes zu geben. Dazu werden wir den elementaren LINNIKschen Beweis des WARING-HILBERTschen Satzes[3]) ein wenig modifizieren.

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}$ eine monotone Folge natürlicher Zahlen. Ist x eine beliebige natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$ mit $1 \leq a \leq x$. Man definiert die Dichte von $\mathfrak{A}$ als

$$d(\mathfrak{A}) = \inf \frac{A(x)}{x}.$$

$\mathfrak{N}$ sei die Folge aller natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathfrak{M}$ sei wie oben erklärt: $\{0, 1, m_2, m_3, \ldots\}$.

Wir bezeichnen

mit $\mathfrak{A}_n$ die Folge: $\{0^n, 1^n, 2^n, \ldots\}$,
mit $\mathfrak{A}'_n$ die Folge: $\{0^n, 1^n, m_2^n, m_3^n, \ldots\}$,
mit $r_{k,n}(m)$ bzw. $r'_{k,n}(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = m, \tag{1}$$

wobei $x_i \in \mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist,
und mit $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ die Folge der Zahlen m, die sich in der Form (1) schreiben lassen mit $x_i \in \mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$. Offenbar ist $\mathfrak{A}_n^{(1)} = \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_n^{(1)'} = \mathfrak{A}'_n$.

---

[1]) SCHNIRELMANN, L.: Über additive Eigenschaften der Zahlen. Math. Ann. **107**, 649—690 (1933).

[2]) HILBERT, D.: Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. Math. Ann. **67**, 281—300 (1909).

[3]) Vgl. CHINTSCHIN, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie, S. 33—61. Berlin: Akademieverlag 1951.

LINNIK beweist das Lemma[4]):

Lemma. *Es existieren eine natürliche, nur von n abhängige Zahl* $k = k(n)$ *und eine nur von n abhängige Zahl* $c = c(n)$ *derart, daß für eine beliebige natürliche Zahl N*

$$r_{k,n}(m) < c\, N^{\frac{k}{n}-1} \qquad (1 \leq m \leq N) \tag{2}$$

gilt.

Daraus läßt sich unsere Behauptung leicht herleiten.

Aus der Definition der Zahl $r'_{k,n}(m)$ ergibt sich unmittelbar, daß

$$r'_{k,n}(0) + r'_{k,n}(1) + \cdots + r'_{k,n}(N) = R'_{k,n}(N)$$

die Anzahl aller Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \mathfrak{M}$ ist, für die

$$x_1^n + \cdots + x_k^n \leq N \tag{3}$$

gilt.

Dieser Forderung genügt offenbar jede Menge von Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ aus $\mathfrak{M}$, für die

$$0 \leq x_i \leq \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n} \qquad (1 \leq i \leq k)$$

gilt. Man kann also jedes x_i auf mindestens

$$1 + M\left(\left[\left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}\right]\right) > d(\mathfrak{M}) \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}$$

verschiedene Art wählen. Da sich in (3) diese möglichen Werte noch willkürlich kombinieren lassen, folgt

$$R'_{k,n}(N) > \left(d(\mathfrak{M}) \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}\right)^k. \tag{4}$$

Wäre nun $d(\mathfrak{A}_n^{(k)'}) = 0$, so hätten wir bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und passend gewähltem N

$$A_n^{(k)'}(N) < \varepsilon N.$$

Dabei können wir N als beliebig groß voraussetzen.

Weil aber aus der Definition

$$r'_{k,n}(m) \leq r_{k,n}(m)$$

folgt, erhalten wir durch Anwendung von (2):

$$R'_{k,n}(N) = \sum_{m=0}^{N} r'_{k,n}(m) = r'_{k,n}(0) + \sum_{m=1}^{N} r'_{k,n}(m) < 1 + c\, N^{\frac{k}{n}-1} A_n^{(k)'}(N) < 1 + c\, \varepsilon\, N^{k/n}.$$

Für hinreichend großes N ist also

$$R'_{k,n}(N) < 2c\, \varepsilon\, N^{k/n}.$$

[4]) Vgl. [3]), 35.

Da für hinreichend kleines ε

$$2c\,\varepsilon < \left(\frac{d(\mathfrak{M})}{k^{1/n}}\right)^k$$

ist, so würden wir

$$R'_{k,n}(N) < \left(d(\mathfrak{M})\left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}\right)^k$$

erhalten, was (4) widerspricht. Also ist *notwendigerweise*

$$d(\mathfrak{A}_n^{(k)'}) > 0.$$

Das bedeutet aber: $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ ist eine Basis der natürlichen Zahlen und damit auch $\mathfrak{A}'_n$; denn $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ entsteht, indem wir die Folge $\mathfrak{A}'_n$ im Sinne der additiven Zahlentheorie k-mal addieren.

Damit ist die SCHNIRELMANNsche Verallgemeinerung des WARING-HILBERTschen Satzes vollständig bewiesen.

Gießen (Lahn), Mathem. Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 2. Februar 1953.)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 284—287 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I.

Herrn Professor Dr. HANS ROHRBACH zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von

BODO VOLKMANN.

1. Im folgenden werden g-adische Entwicklungen

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i} \quad (e_i \text{ ganz};\ 0 \leq e_i < g;\ g \geq 2) \tag{1}$$

betrachtet. Wird dabei vereinbart, daß unendlich viele Ziffern e_i von Null verschieden sein sollen, so existiert für jedes ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$ genau eine Entwicklung der Form (1). Ist $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{g^i}$, so soll das Symbol $\sigma \underset{g}{\leqq} \varrho$ („σ ist g-adisch enthalten in ϱ") mit

$$e_i \leq f_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

gleichbedeutend sein. Die Menge aller σ mit $\sigma \underset{g}{\leqq} \varrho$ wird mit $\langle \varrho \rangle_g$ bezeichnet.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Hausdorffschen Dimensionen der Mengen $\langle \varrho \rangle_g$ in bezug auf eine geeignet gewählte Funktionenklasse zu bestimmen. Auf diese Weise wird für den Fall, daß die gewöhnliche (gebrochene) Dimension von $\langle \varrho \rangle_g$ verschwindet, eine darüber hinausgehende Aussage über die „Größe" von $\langle \varrho \rangle_g$ möglich.

2. Den allgemeinen Hausdorffschen Maßbegriff führen wir folgendermaßen ein: Sind M und V Punktmengen im R_r, so heißt V eine η-Überdeckung von M $(\eta > 0)$, wenn V aus höchstens abzählbar vielen konvexen Gebieten $\mathfrak{v}_\nu$ besteht, deren Durchmesser $|\mathfrak{v}_\nu|$ der Bedingung $|\mathfrak{v}_\nu| \leq \eta$ genügen. Die Menge aller η-Überdeckungen von M sei $U(\eta, M)$. Ist dann $\mu(t)$ eine für $0 \leq t \leq t_0$ erklärte stetige und monoton nichtabnehmende Funktion, die genau bei $t = 0$ verschwindet — solche Funktionen wollen wir M-Funktionen nennen —, so wird das μ-Maß von M erklärt als

$$\mu\{M\} = \lim_{\eta \to 0^+} \mu_\eta\{M\},$$

wobei

$$\mu_\eta\{M\} = \operatorname*{fin}_{V \in U(\eta, M)} \sum_{\mathfrak{v}_\nu \in V} \mu(|\mathfrak{v}_\nu|) \tag{3}$$

gesetzt wird. Es sei F eine Klasse von M-Funktionen $\mu^{(\alpha)}(t)$, definiert für $\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}$ $(-\infty \leq \underline{\alpha} < \overline{\alpha} \leq +\infty)$, die der Bedingung genügen:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mu^{(\alpha_2)}(t)}{\mu^{(\alpha_1)}(t)} = 0, \quad \text{wenn } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ist.} \tag{4}$$

Man kann leicht zeigen, daß es zu einer solchen Klasse von M-Funktionen für jede Menge M ein δ mit $\underline{\alpha} \leq \delta \leq \bar{\alpha}$ gibt, derart, daß

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha > \delta \\ \infty & \text{für } \alpha < \delta \end{cases} \tag{5}$$

wird, soweit diese $\mu^{(\alpha)}$ definiert sind. Wir nennen δ die Hausdorffsche Dimension von M in bezug auf die Funktionenklasse F, geschrieben $\delta = \dim_F M$. Wird für F die Klasse der Funktionen t^α $(0 < \alpha < r)$ genommen, so ist $\dim_F M$ mit der gebrochenen Hausdorffschen Dimension $\dim M$ identisch[1]).

Die im folgenden auftretenden Mengen M lassen sich in der Form $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n$ darstellen[2]), wobei jedes I_n aus g_n getrennten Intervallen $\mathfrak{i}_n^1, \ldots, \mathfrak{i}_n^{g_n}$ gleicher Länge λ_n besteht, derart, daß jedes Intervall $\mathfrak{i}_{n+1}$ von I_{n+1} $(n = 2, 3, \ldots)$ in einem Intervall $\mathfrak{i}_n$ von I_n enthalten ist. Für solche Mengen M gilt der Satz von H. G. Eggleston[3]): Wenn

a) jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ $(m = 1, \ldots, g_n)$ die gleiche Anzahl $\left(\text{also } \frac{g_{n+1}}{g_n}\right)$ von Intervallen $\mathfrak{i}_{n+1}$ enthält und

b) für eine gegebene Klasse F von M-Funktionen[4]) ein α_0 existiert, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)}$ für alle $\alpha < \alpha_0$ konvergiert, dann ist $\dim_F M \geq \alpha_0$.

3. Mit Hilfe dieses Satzes wird es möglich, das eingangs formulierte Problem zu behandeln. Zu der Ziffernfolge e_i von (1) definieren wir die Folge $G(n)$ durch

$$g^{G(n)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + e_i)$$

und interpolieren sie zu einer monoton nichtabnehmenden, für $x \geq 0$ stetigen Funktion $G(x)$, was offenbar auf mannigfache Weise möglich ist. Dann ist leicht zu verifizieren, daß die Funktionen

$$\xi^{(\alpha)}(t) = g^{-\alpha G\left(\frac{-\log t}{\log g}\right)} \quad (0 < \alpha < \infty,\ 0 \leq t \leq 1)$$

M-Funktionen sind. Das angekündigte Ergebnis liefert der

[1]) Manche Autoren nennen in diesem Fall $\dim_F M$ die Besicovitchsche Dimension von M und sprechen nur dann von gebrochenen Hausdorffschen Dimensionen $\delta = \dim M$, wenn $0 < \mu^{(\delta)}\{M\} < \infty$ für $\mu^{(\delta)}(t) = t^\delta$ ist.

[2]) Solche Mengen sind vom Verfasser betrachtet worden: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen [J. reine angew. Math. **190**, 199—230 (1952), insbesondere S. 212ff.]. Die dortige Bezeichnungsweise ist hier weitgehend beibehalten worden.

[3]) Eggleston, H. G.: Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **2**, 54 (1951), 42—93, Theorem 5. Wir spezialisieren den Satz hier auf den Fall $r = 1$.

[4]) Eggleston macht zwar noch die Voraussetzungen, daß $\frac{t^r}{\mu(t)}$ monoton wachsen und $\lim_{t \to 0^+} \frac{t^r}{\mu(t)} = 0$ sein soll, und fordert ferner strenge Monotonie der Funktionen $\mu(t)$; doch zeigt sich, daß zum Beweise des angeführten Theorem 5 nur M-Funktionen benötigt werden.

Satz 1. *In bezug auf die Klasse Z der Funktionen* $\xi^{(\alpha)}(t)$ *ist* $\dim_Z \langle \varrho \rangle_g = 1$.

Beweis. a) Sei $\alpha > 1$. Ist K_n die Menge der σ, bei denen (2) für die ersten n Ziffern erfüllt ist, so wird $\langle \varrho \rangle_g = \bigwedge_{n=1}^{\infty} K_n$. Jede Menge K_n besteht aus $\prod_{i=1}^{n} (1+e_i)$ Intervallen $\mathfrak{k}_n$ der Form $\left(\frac{k}{g^n}, \frac{k+1}{g^n}\right)$, da bei einer Zahl $\sigma \in \langle \varrho \rangle_g$ die i-te Ziffer jeden der Werte $0, 1, \ldots, e_i$ annehmen kann. Somit ist jedes K_n eine g^{-n}-Überdeckung von $\langle \varrho \rangle_g$, und man erhält, wenn man das Symbol $\xi_\eta^{(\alpha)}$ entsprechend wie μ_η in (3) gebraucht,

$$(6) \quad \begin{cases} \xi^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\} = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_{g^{-n}}^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\} \\ \qquad \leq \varliminf\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{i=1}^{n} (1+e_i)\, \xi^{(\alpha)}(g^{-n}) = \varliminf\limits_{n \to \infty} g^{G(n) - \alpha G(n)} = 0. \end{cases}$$

Also ist nach (5) $\dim_Z \langle \varrho \rangle_g \leq 1$.

b) Sei $\alpha < 1$. Da jedes Intervall $\mathfrak{k}_n$ die gleiche Anzahl von Intervallen $\mathfrak{k}_{n+1}$ enthält, nämlich e_{n+1}, trifft die Voraussetzung a) des Satzes von Eggleston zu. Ebenso ist auch die Voraussetzung b) erfüllt, denn die Reihe

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} g \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1+e_i)\, \xi^{(\alpha)}(g^{-n})} = \sum_{n=1}^{\infty} g^{1 - G(n)(1-\alpha)}$$

ist wegen $G(n) \to \infty$ sicher konvergent. Also ist $\dim_Z \langle \varrho \rangle_g \geq 1$.

Aus a) und b) folgt die Behauptung.

4. Zu Satz 1 ergeben sich einige Folgerungen und Ergänzungen, die besondere Erwähnung verdienen:

Satz 2. *Die gebrochene Dimension von* $\langle \varrho \rangle_g$ *ist* $\dim \langle \varrho \rangle_g = \varliminf\limits_{n \to \infty} \frac{G(n)}{n}$.

Der Beweis ergibt sich analog zu dem von Satz 1, wenn man statt $\xi^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\}$ überall die mit der Funktion $\tau^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$ gebildeten Maße $\tau^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\}$ einsetzt. Schreibt man $\varliminf\limits_{n \to \infty} \frac{G(n)}{n} = \zeta$, so ist offenbar $0 \leq \zeta \leq 1$ und

$$\zeta = \varliminf \frac{1}{\log g} \cdot \frac{1}{n} \cdot \log \prod_{i=1}^{n} (1+e_i) = \varliminf \frac{\log \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} (1+e_i)}}{\log g}.$$

Daher erhält man für $\alpha > \zeta$ an Stelle von (6)

$$\tau^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\} = \lim_{n \to \infty} \tau_{g^{-n}}^{(\alpha)}\{\langle \varrho \rangle_g\} \leq \varliminf_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} (1+e_i)\, g^{-\alpha n} = \varliminf g^{(\zeta - \alpha) n} = 0$$

und für $\alpha < \zeta$ an Stelle von (7) für $\varepsilon > 0$ die ebenfalls konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} g \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1+e_i)\, g^{-\alpha n}} < \sum_{n=1}^{n_0} g^{1 + n\alpha - G(n)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g^{1 - n\varepsilon},$$

da bei geeignetem n_0 für $n > n_0$ sicher $G(n) > n(\alpha + \varepsilon)$ ist.

Im Falle $g=2$ läßt sich die dyadische Entwicklung $\varrho=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{2^i}$ ($e_i=0$ oder 1) als Dualwert der Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen auffassen, deren charakteristische Funktion die Folge e_i ist. Bei dieser Betrachtungsweise fällt $\langle\varrho\rangle_2$ mit der Menge $_\Gamma[\mathfrak{A}]$ der Dualwerte der unendlichen Untermengen von $\mathfrak{A}$ zusammen. Bezeichnet man die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$ mit $A(n)=\sum_{i=1}^{n}e_i$, so wird $2^{A(n)}=\prod_{i=1}^{n}(1+e_i)$ und daher $A(n)=G(n)$. Infolgedessen gehen, wenn $A(n)$ zu einer stetigen, monoton nichtabnehmenden Funktion $A(x)$ interpoliert wird, die Sätze 1 und 2 über in

Satz 3. *In bezug auf die Klasse Z der Funktionen* $\xi^{(\alpha)}(t)=2^{-\alpha A\left(\frac{-\log t}{\log 2}\right)}$ $(0<\alpha<\infty,\ 0\leq t\leq 1)$ *ist* $\dim_z {}_\Gamma[\mathfrak{A}]=1$.

Satz 4. *Die gebrochene Dimension von* $_\Gamma[\mathfrak{A}]$ *ist* $\dim {}_\Gamma[\mathfrak{A}]=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$.

Satz 4 stellt ein früheres Resultat des Verfassers dar[5]).

[5]) l. c. [2]), Satz 35.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 4. Februar 1953.)

ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 288—305 (1953)

FK-Räume in der Funktionentheorie. I*.

Von
KARL ZELLER.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 288
§ 1. Definitionen und Bezeichnungen 291
§ 2. Kriterien für *FK*-Räume 293
§ 3. Lineare Operationen, Halbnormen und Minoranten 296
§ 4. Der gleitende Buckel 298
§ 5. Halbstetige Funktionen 300
§ 6. Produkträume 301
§ 7. Sätze über *FK*-Räume 303

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Klärung verschiedener Konvergenz- und Divergenzfragen in der Funktionentheorie mit Hilfe der Funktionalanalysis, insbesondere der Lehre von den *FK*-Räumen (= *F*-Räumen mit koordinatenweiser Konvergenz). Dabei charakterisieren wir einen *FK*-Raum folgendermaßen: Er ist linear, durch abzählbar viele Halbnormen wird in ihm eine separierte gleichmäßige Struktur im Sinne von BOURBAKI erklärt, der Raum ist bezüglich dieser Struktur vollständig, seine Elemente sind komplexe Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_k\}$, die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ sind linear und stetig.

Die Verwendung dieser Räume veranlaßt uns, statt einer analytischen Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ die Folge $\mathfrak{a} = \{a_k\}$ ihrer Koeffizienten, statt Funktionenräumen also Folgenräume zu betrachten und die meisten Ergebnisse als Beziehungen zwischen Mengen von Zahlenfolgen auszudrücken, was auch häufig prägnante Formulierungen gestattet. Die Resultate beruhen letztlich auf einigen wenigen bekannten Sätzen über lineare Räume, jedoch führt ein weiter Weg von diesen Sätzen bis zu unseren Anwendungen.

Nach der Behandlung der funktionalanalytischen Grundlagen in §§ 1 bis 7 (s. unten) beginnt in § 8 der funktionentheoretische Teil mit der Betrachtung des *FK*-Raumes $\mathfrak{R}$ (Reguläre Funktionen), welcher der Menge der in $|z| < 1$ regulären Funktionen entspricht (8.1). Konvergenz und Beschränktheit einer Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$ (diese Begriffe sind durch die Topologie erklärt) bedeutet für

*) Diese Arbeit ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen als Habilitationsschrift angenommen worden. Sie wurde dem Berichterstatter im Mai 1952 überreicht. Der vorliegende erste Teil bringt die funktionalanalytischen Grundlagen, der zweite Teil (im nächsten Heft der Math. Z.) die Anwendungen auf die Funktionentheorie. Herrn Prof. KNOPP, Herrn Prof. WIELANDT und Herrn Dr. STOLL danke ich für zahlreiche Ratschläge.

die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ gleichmäßige Konvergenz bzw. Beschränktheit in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$. Aus verschiedenen Durchschnittsdarstellungen von $\mathfrak{R}$ lesen wir unter anderem ab, daß jede in $\mathfrak{R}$ beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält (8.3), und haben damit auf neue Weise einen bekannten funktionentheoretischen Satz gewonnen.

Dieser ist z. B. von Bedeutung für die Konvergenzsätze der Funktionentheorie, die in § 9 behandelt werden. In einem *FK*-Raum $\mathfrak{E}$ ist neben der gewöhnlichen (starken) Konvergenz noch eine „schwache" Konvergenz mittels der stetigen Linearformen definiert. Ist $\mathfrak{E}<\mathfrak{R}$ und die Folge $a^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ schwach konvergent, so konvergieren die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig. Kriterien für schwache Konvergenz in $\mathfrak{E}$ liefern einen allgemeinen Satz (9.1), aus dem die Konvergenzsätze von Vitali, Blaschke, Khintchine-Ostrowski folgen. Wir beleuchten dabei den Zusammenhang zwischen Bedingungen, die eine reguläre Funktion eindeutig bestimmen, und Bedingungen, die die Konvergenz einer Funktionenfolge bewirken.

Die nächsten drei Paragraphen behandeln das Verhalten im Einheitskreis regulärer Funktionen $a(z)$ bei radialer Annäherung an $|z|=1$. Zur Erläuterung unserer Methode beginnen wir in § 10 mit bekannten Ergebnissen: Es gibt Funktionen $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für ein, abzählbar viele, über abzählbar viele, alle ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert (10.1—4). 10.5 und 10.6 betreffen nichtfortsetzbare Funktionen. In § 11 geht es um die Frage: Zu welchen Teilmengen C von $|\zeta|=1$ gibt es ein $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta\in C$ existiert, für $\zeta\notin C, |\zeta|=1$ nicht existiert? § 12 befaßt sich mit der Möglichkeit, daß $a(\varrho\zeta)$ $(\varrho\to 1-)$ auf $|\zeta|=1$ ungleichmäßig konvergiert.

In §§ 13 und 14 untersuchen wir bei Funktionen $a(z)=\sum a_k z^k$, die in $|z|<1$ regulär sind und gewisse weitere Eigenschaften haben, das Verhalten der Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ bzw. $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ (unter anderem Sätze von Fejér und Szász).

§ 1 bringt Bezeichnungen, §§ 2 bis 7 die funktionalanalytischen Hilfsmittel, wobei teilweise bekannte Dinge wiederholt werden müssen.

In § 2 geben wir allgemeine Kriterien, wann eine Menge von Zahlenfolgen (mit geeigneten Halbnormen) ein *FK*-Raum ist. Diese Kriterien umfassen alle bei uns vorkommenden Fälle.

Es folgen in § 3 die Grundtatsachen über die einfachsten Funktionen in *FK*-Räumen, nämlich die linearen Operationen und die Halbnormen. Weiter führen wir die „Minoranten einer Halbnorm" ein, die wir später bei komplizierten Divergenzproblemen benötigen (10.4, 11.5). Schließlich formulieren wir zwei geläufige Lemmata über Folgen linearer Operationen (3.6 und 3.7).

An diesen Lemmata erläutern wir die in den anschließenden §§ 4 bis 6 untersuchten Beweismethoden, die mit den Stichworten „Gleitender Buckel", „Halbstetige Funktionen", „Abgeschlossene Produkträume" zu kennzeichnen

sind und zur Beantwortung der folgenden, eng zusammenhängenden Fragen dienen:

Wann gilt für zwei *FK*-Räume $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$, wann gilt $\mathfrak{E} \not< \mathfrak{F}$?

Wann ist eine lineare Operation zwischen zwei *FK*-Räumen stetig?

Wann nimmt eine Funktion $\chi(a) \leq \infty$ in einem *FK*-Raum den Wert $+\infty$ an?

Auf diese Fragen, hauptsächlich die erste, werden sich nämlich fast alle unsere Probleme zurückführen lassen. Die drei Methoden tragen ungefähr gleich weit. Wir bevorzugen in dieser Arbeit die letzte (Produkträume), weil sie bis jetzt in der Literatur etwas vernachlässigt wurde, außerdem auch für *FK*-Räume besonders geeignet ist. Jedoch gibt es Fälle, wo nur der „Buckel" oder nur die „halbstetigen Funktionen" zum Ziele führen (vgl. etwa 11.2 und 10.4).

§ 7 stellt die wichtigsten Resultate über *FK*-Räume zusammen. Diese handeln von Vereinigung und Durchschnitt abzählbar vieler *FK*-Räume und vor allem von der Beziehung $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ zwischen zwei *FK*-Räumen.

Ausführliche Inhaltsangaben stehen am Anfang jedes einzelnen Paragraphen.

Wir betonen, daß ein guter Teil unserer Ergebnisse auf der Ausnützung der „koordinatenweisen Konvergenz" in *FK*-Räumen beruht. Wir könnten eine analoge Eigenschaft auch für Räume formulieren, deren Elemente Funktionen sind, jedoch kürzt die Verwendung der *FK*-Räume manche Ausführungen ab.

Schon seit langer Zeit versuchte man, mit funktionalanalytischen Methoden in die Funktionentheorie einzudringen. Größere Erfolge hat man jedoch erst in neuerer Zeit erzielen können, nachdem geeignete Raumtypen eingeführt und untersucht worden sind, nämlich die *F*-Räume, die vollkommenen Räume (s. KÖTHE [1950]) und gewisse Verallgemeinerungen derselben. Ihrer Anwendung in der Funktionentheorie haben vor allem KÖTHE und TOEPLITZ Bahn gebrochen. Verfasser verdankt diesen Autoren zahlreiche Anregungen.

Die Veröffentlichungen auf diesem Gebiet teilen wir in vier Gruppen ein:

1. Die Existenz analytischer Funktionen mit gewissen Eigenschaften wird auf die Lösung eines unendlichen Gleichungssystems zurückgeführt. Arbeiten von BOREL, EIDELHEIT, POLYA, KÖTHE, TOEPLITZ (s. Schrifttumsverzeichnis bei KÖTHE [1947]).

2. Der Zusammenhang analytischer Funktionen mit ihren Randwerten bzw. Randverteilungen (Cauchyscher Integralsatz u. ä.) wird untersucht. Arbeiten von FANTAPPIÉ, TAYLOR, SILVA, KÖTHE, DIAS, GROTHENDIECK (s. Literaturverzeichnis bei KÖTHE [1952]).

3. Man befaßt sich mit der Existenz von Grenzwerten, die im Zusammenhang mit analytischen Funktionen auftreten (Randwerte, Reihenentwicklungen, Funktionsfolgen). Arbeiten von KIERST-SZPILRAJN (s. § 10), TOEPLITZ (s. §§ 8 und 9), TAYLOR (s. § 9).

4. Sonstige: GANAPATHY IYER, DOSS, MARCOUCHEWITSCH (Behandlung allgemeiner topologischer Eigenschaften, Orthogonalentwicklungen, Basen).

Die vorliegende Arbeit gehört zur dritten Gruppe. Von TAYLOR und TOEPLITZ weichen wir in der Art der topologischen Hilfsmittel ab: TAYLOR beschränkt sich auf Banachräume, TOEPLITZ verwendet vollkommene Räume. Dennoch ergeben sich manche Parallelen zu diesen Arbeiten (s. §§ 8 und 9).

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen.

Übersicht. Wir setzen die Kenntnis der Grundlagen der Funktionalanalysis und Topologie voraus. Wir verwenden die Bezeichnungen und Definitionen der französischen Schule (BOURBAKI [1940], [1949], DIEUDONNÉ [1942]), die sich von denen der polnischen Schule (BANACH [1932]) hauptsächlich in folgenden Punkten unterscheiden:

Die Topologie wird nicht auf konvergenten Folgen, sondern auf offenen Mengen aufgebaut. „*F*-Raum" ist ein weniger umfassender Begriff als bei Banach. Ein linearer Raum hat die komplexen, nicht nur die reellen Zahlen als Skalare. Eine lineare Operation ist nicht notwendig stetig. Das Wort Funktional wird vermieden.

Nicht bei Bourbaki stehen die Begriffe: Fette Teilmenge, Folgenraum, *BK*-Raum, *FK*-Raum, Abschnittsdichte, Abschnittskonvergenz. Für das Wort „entourage" schlagen wir die Übersetzung „Band" vor (ein Band längs der Diagonale des Produktraumes, ein Band, das die Umgebungen verschiedener Punkte verbindet).

Begriffe wie Menge, Funktion, Operation, stetig, halbstetig setzen wir als bekannt voraus — vgl. etwa CARATHÉODORY [1927, insbesondere S. 120ff.], BANACH [1932], HILLE [1948].

Ein (komplexer) *linearer Raum* $\mathfrak{E}$ ist eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, in der eine Multiplikation $\lambda\mathfrak{a}$ mit den komplexen Zahlen λ erklärt ist, die folgenden Gesetzen genügt:

$$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\,\mathfrak{a}+\mu\,\mathfrak{a},\quad \lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda\,\mathfrak{b},\quad (\lambda\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda(\mu\,\mathfrak{a}),\quad 1.\ \mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Eine *lineare Operation* oder lineare Abbildung T (zwischen zwei linearen Räumen) erfüllt die Beziehungen

$$T(\lambda\,\mathfrak{a})=\lambda\,T(\mathfrak{a}),\quad T(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{b}).$$

Eine lineare Operation T, deren Werte komplexe Zahlen sind, wird *Linearform* genannt. Aus Gründen der „Dualität" wird ihr Wert oft mit $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\rangle$ bezeichnet, wo $\mathfrak{a}'$ als Symbol für die betreffende Abbildung steht.

Eine *Halbnorm* (oder Quasinorm) $\varphi(\mathfrak{a})$ ist eine in einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ erklärte Operation, deren Werte positive Zahlen (einschließlich der Null) sind, mit den Eigenschaften

$$\varphi(\lambda\,\mathfrak{a})=|\lambda|\cdot\varphi(\mathfrak{a}),\quad \varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\leq\varphi(\mathfrak{a})+\varphi(\mathfrak{b}).$$

Folgt überdies $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ (Nullelement) aus $\varphi(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$, so heißt φ eine *Norm*.

Lassen wir bei reellwertigen Funktionen, insbesondere Halbnormen, den Wert $+\infty$ zu, so kennzeichnen wir dies durch $\varphi(\mathfrak{a})\leq\infty$. Wir rechnen dann in üblicher Weise mit dem Wert ∞, wobei die Ausdrücke $0\cdot\infty$ und $\infty-\infty$ undefiniert bleiben.

In einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ seien abzählbar viele Halbnormen φ_i erklärt; $\mathfrak{U}(\varepsilon,m)$ $(\varepsilon>0;\ m=0,1,\ldots)$ sei die Menge der Elementpaare $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ (wo $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{E}$) mit

$$\varphi_0(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon,\ldots,\varphi_m(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon.$$

Mit den $\mathfrak{U}$ als Grundsystem von Bändern (entourages) ist dann in $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ eine *gleichmäßige Struktur* und damit eine *Topologie* erklärt (BOURBAKI [1940, S. 85—92]). Von dieser Struktur müssen wir uns merken, daß in ihr — gemäß den allgemeinen Definitionen — eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine *Cauchyfolge* bzw. gegen $\mathfrak{a}$ *konvergent* heißt, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein r gibt, so daß

$$(\mathfrak{a}^{(m)}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (m, n > r)$$

bzw.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n > r)$$

gilt. Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\lim_{m,n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Weiter heißt eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ *beschränkt*, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$(\mathfrak{o}, \lambda\, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gilt, was dasselbe bedeutet wie

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \varphi_i(\mathfrak{a}^{(n)}) < \infty \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{E}$ ist mit dieser Struktur ein *linearer topologischer Raum* (d.h. ein linearer Raum mit einer Topologie, in der $\lambda\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ als Funktionen beider Veränderlichen stetig sind) und sogar ein *lokalkonvexer* Raum (s. DIEUDONNÉ [1942, S. 110]). In $\mathfrak{E}$ sind vermittels der Topologie Begriffe wie stetig, abgeschlossen, dicht, Grundmenge, nirgends dicht erklärt. Eine Untermenge von $\mathfrak{E}$ heißt *mager* (oder Menge von erster Kategorie), wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist, *fett*, wenn sie Komplement einer mageren Menge ist. Der Raum $\mathfrak{E}$ heißt vollständig, wenn jedes *Cauchyfilter* (BOURBAKI [1940, S. 99]) in ihm konvergent ist, was hier — wegen der Metrisierbarkeit von $\mathfrak{E}$, s. unten — bedeutet, daß jede Cauchyfolge gegen ein Grenzelement konvergiert.

Ein F-Raum ist ein Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ der eben beschriebenen Art, in dem $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ aus $\varphi_i(\mathfrak{a}) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ folgt *(separierte Struktur)* und der überdies vollständig ist. Ein F-Raum heißt ein B-Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi]$, wenn seine Struktur durch eine einzige Halbnorm $\varphi(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|$ beschrieben werden kann, was sich so ausdrücken läßt: $\mathfrak{E}$ ist ein F-Raum mit den Halbnormen $\varphi, 0, 0, \ldots$ (oder auch $\varphi, \varphi, \ldots$); φ ist dann natürlich eine Norm.

In einem Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ (s. oben) führen wir mittels der stetigen Linearformen $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle$ (kurz mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet) neben der oben genannten (starken) Struktur eine *„schwache" gleichmäßige Struktur* und damit eine *„schwache" Topologie* ein. Als Grundsystem von Bändern nehmen wir die durch

$$|\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' \rangle| < \varepsilon \qquad (\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}')$$

definierten Mengen $\mathfrak{U}(\varepsilon, \mathfrak{F}')$, wobei ε die Zahlen > 0 und $\mathfrak{F}'$ alle endlichen Teilmengen der Gesamtheit der stetigen Linearformen in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ durchläuft. Die auf dieser Struktur beruhenden Begriffe versehen wir mit dem Zusatz „schwach" (*schwach konvergent* usw.). Die schwache gleichmäßige Struktur ist wegen der Stetigkeit der Linearformen *gröber* als die starke, d.h. enthält weniger Bänder, aber mehr konvergente Filter und Folgen (wobei „mehr" „gleichviel" nicht ausschließen soll).

Die gleichmäßige (starke) Struktur in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ läßt sich mittels einer Metrik definieren, z.B. durch

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{\varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{1 + \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$$

(vgl. BOURBAKI [1949, S. 22—23]), so daß wir in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ die Betrachtung der Filter durch die der Folgen ersetzen, m. a. W. die Struktur mittels Folgen erklären können. Dies geht jedoch im allgemeinen nicht bei der schwachen Struktur. Die Menge der stetigen Linearformen $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{E}$ bildet den dualen Raum $\mathfrak{E}'$, der sich ersichtlich als linearer Raum auffassen läßt und in dem man in verschiedener Weise gleichmäßige Strukturen und Topologien einführen kann. Uns interessiert nur der Fall, daß $\mathfrak{E}$ ein *B*-Raum ist: $\mathfrak{E}'$ ist dann mit der Norm

$$\|\mathfrak{a}'\| = \overline{\operatorname{fin}}_{|\mathfrak{a}|<1} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle|$$

ebenfalls ein *B*-Raum.

Ein *BK*- bzw. *FK-Raum* ist ein *B*- bzw. *F*-Raum, dessen Elemente *Stellen* (Folgen komplexer Zahlen) $\mathfrak{a} = \{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ sind, und in dem die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ stetige Linearformen sind. Aus der (starken) Konvegenz im Raumsinne folgt also die *„koordinatenweise Konvergenz"*. Da sich ein Stellenraum auf „höchstens eine Weise" als *FK*-Raum auffassen läßt (die genaue Aussage steht in 7.1), können wir für einen *FK*-Raum und die Menge seiner Elemente dieselbe Bezeichnung verwenden. So ist für zwei *FK*-Räume $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ (was $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ nicht ausschließt) im mengentheoretischen Sinn zu verstehen.

Ein *FK*-Raum (oder *BK*-Raum) $\mathfrak{E}$ besitzt *Abschnittsdichte*, wenn die *abbrechenden Stellen* (Stellen $\{a_k\}$ mit $a_k = 0$ für fast alle k) zum Raum gehören und in ihm dicht liegen; er besitzt *Abschnittskonvergenz*, wenn darüber hinaus für jedes $\{a_k\} \in \mathfrak{E}$ die Stellen $\{a_0, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots\}$ bei $r \to \infty$ gegen $\{a_k\}$ konvergieren.

Weitere Bezeichnungen findet man in § 8.

§ 2. Kriterien für *FK*-Räume.

Übersicht. Wir geben einige Kriterien dafür, daß gewisse Folgenräume durch Festsetzung geeigneter Halbnormen als *FK*-Räume aufgefaßt werden können. Diese Kriterien umfassen fast alle bekannten Fälle von *FK*-Räumen. Schwierigkeiten bereitet dabei nur der Nachweis der Vollständigkeit. Die betreffenden Räume werden aus schon bekannten Räumen gewonnen durch „Kleiner unendlich" – bzw. Null-Setzen von Halbnormen (2.1, 2.1a, 2.2), mittels Durchschnittsbildung (2.3) und einfacher Trans-

formation (2.4). 2.5 behandelt die Frage verschiedener Systeme von Halbnormen, die dieselbe Topologie ergeben. 2.6 liefert damit ein Normierbarkeitskriterium. Wir schließen mit einer Liste von *BK*- und *FK*-Räumen.

Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum). *$[\mathfrak{E};\varphi_i]$ sei ein FK-Raum, $\chi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ eine nach unten halbstetige Halbnorm in $\mathfrak{E}$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ einen FK-Raum mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a})$, $\varphi_0(\mathfrak{a})$, $\varphi_1(\mathfrak{a})$, ...*

Beweis. Die einzige Schwierigkeit liegt im Nachweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$. Sei $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{F}$. Dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{E}$ ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergiert. Ferner ist $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) < \varepsilon$ für $m, n > r(\varepsilon)$. Die Halbstetigkeit ergibt $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}) \leq \varepsilon$ für $m > r(\varepsilon)$, woraus man $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ und die Konvergenz von $\mathfrak{a}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{F}$ abliest.

Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum). *$\chi_\iota(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in einem FK-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi_\iota(\mathfrak{a}) = 0$ für alle ι einen linearen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{E}$, also einen FK-Raum mit den Halbnormen φ_i.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Sind $[\mathfrak{E}^{(j)};\varphi_i^{(j)}]$ $(j = 0, 1, \ldots)$ abzählbar (oder endlich) viele FK-Räume, so ist $\mathfrak{E} = \bigcap \mathfrak{E}^{(j)}$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i^{(j)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$.*

Beweis. Siehe ZELLER [1951$_1$, S. 472].

Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix). *Sind die Zahlen $\delta_k \neq 0$ gegeben und ist $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ ein FK-Raum, so bildet die Menge $\mathfrak{E}(\delta_k)$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\{a_k \delta_k\} \in \mathfrak{E}$ ist, einen FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i(\{a_k \delta_k\})$.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.5 (Wechsel der Halbnormen). *$[\mathfrak{E};\varphi_i]$ sei ein FK-Raum. Genau dann ist $\mathfrak{E}$ auch mit den Halbnormen χ_j ein FK-Raum, wenn Ungleichungen folgender Art für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i, j = 0, 1, \ldots$ bestehen:*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leq M_i \cdot (\chi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \chi_{j(i)}(\mathfrak{a})),$$
$$\chi_j(\mathfrak{a}) \leq N_j \cdot (\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})).$$

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, weil dann die φ_i und die χ_j dieselbe gleichmäßige Struktur definieren. — Ist sowohl $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ als auch $[\mathfrak{E};\chi_j]$ ein *FK*-Raum, so ist auf Grund bekannter Sätze über Operationen mit abgeschlossenem Graph die kanonische Abbildung von $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ auf $[\mathfrak{E};\chi_j]$ in beiden Richtungen stetig, was die Ungleichungen ergibt. Man vgl. Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen).

Kriterium 2.6 (*FK*- und *BK*-Raum). *Genau dann läßt sich ein FK-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ als BK-Raum (mit einer gewissen Norm χ) auffassen, wenn es ein r und Zahlen M_i gibt, so daß für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i = 0, 1, \ldots$*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leq M_i \cdot (\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a}))$$

gilt.

Beweis. I. Gelten solche Ungleichungen, so ist nach Kriterium 2.5 $\mathfrak{E}$ ein *BK*-Raum mit der Norm $\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a})$. II. Ist $\mathfrak{E}$ mit einer Norm $\chi(\mathfrak{a})$ ein *BK*-Raum, so folgt aus Kriterium 2.5

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leq M_i \chi(\mathfrak{a}) \leq M_i \cdot N \cdot (\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a}))$$

mit einem gewissen $r = i(0)$. — Wir hätten uns beim Beweis auch auf das Normierbarkeitskriterium von KOLMOGOROFF [1934] stützen können.

Wir bezeichnen spezielle Folgenräume durch einen großen deutschen Buchstaben mit anhängendem lateinischen Buchstaben (etwa $\mathfrak{S}_B$). Wir verwenden die Buchstaben $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}$, je nachdem es bei den Elementen $\{a_k\}$ des Raumes auf das Verhalten der a_k selber ankommt ($\mathfrak{S}$: Sequenz-Folge), oder auf die Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ($\mathfrak{T}$: Teilsummen), oder auf die Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ in einem gewissen Gebiet ($\mathfrak{R}$: Reguläre Funktion), oder auf diese Funktion auf einem Strahl ($\mathfrak{Q}$: wegen der Nachbarschaft im Alphabete gewählt), oder auf die Konvergenzeigenschaften der Potenzreihe $\sum a_k z^k$ ($\mathfrak{P}$: Potenzreihe). Der lateinische Buchstabe kennzeichnet das Verhalten der a_k bzw. der Teilsummen usw. näher, etwa $\mathfrak{S}_B$ = Raum der beschränkten Folgen $\{a_k\}$. Aus dem Rahmen fällt die historisch begründete Bezeichnung $\mathfrak{L}_p$ (s. unten).

Als erstes stellen wir fest, daß der Raum $\mathfrak{S}$ aller Folgen komplexer Zahlen ein *FK*-Raum mit den Halbnormen $\varrho_i(\mathfrak{a}) = |a_i|$ ist, was unmittelbar aus der Vollständigkeit des Raumes der komplexen Zahlen folgt. Konvergenz $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{a}$ im Raum $\mathfrak{S}$ ist gleichbedeutend mit gliedweiser Konvergenz ($a_k^{(n)} \to a_k$ für jedes k). Wir spezialisieren Kriterium 2.1.

Kriterium 2.1a (Unterräume von $\mathfrak{S}$). *$\chi_i(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in $\mathfrak{S}$, $\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_i \chi_i(\mathfrak{a})$ gesetzt. Die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ bildet dann einen FK-Raum $\mathfrak{F}$ mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a})$, $|a_0|$, $|a_1|$, ... Gelten überdies Ungleichungen der Form $|a_k| \leq M_k \cdot \chi(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, $k = 0, 1, \ldots$), so ist $\mathfrak{F}$ sogar ein BK-Raum mit der Norm $\chi(\mathfrak{a})$.*

Beweis. $\chi(\mathfrak{a})$ ist als obere Grenze stetiger Halbnormen eine nach unten halbstetige Halbnorm. 2.1 (mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}$) liefert die erste Behauptung, die zweite folgt anschließend mit 2.5.

Mit 2.1a erhalten wir die unten verzeichneten *BK*-Räume. Hinter der Bezeichnung des Raumes und ihrer Erläuterung steht das jeweilige $\chi(\mathfrak{a})$. Zum Raum gehören also genau die $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$, die Norm ist $\chi(\mathfrak{a})$.

$\mathfrak{S}_B$ (beschränkte Folgen): $\overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |a_k|$;

$\mathfrak{T}_B$ (beschränkte Reihen): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right|$;

$\mathfrak{L}_p$ (p-te Potenz konvergiert): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}$ ($p \geq 1$);

$\mathfrak{P}_B$ (Potenzreihen mit beschränkten Teilsummen): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|$.

Kriterium 2.2 liefert weitere *BK*-Räume. In der nachstehenden Liste ist neben der Bezeichnung des Raumes (in 2.2 also $\mathfrak{F}$) der jeweilige Oberraum aufgeführt (in 2.2 also $\mathfrak{E}$), sodann die in 2.2 mit χ bezeichnete Halbnorm. (Wir betrachten den Fall, daß die Menge χ_ι aus einer Halbnorm besteht.) Zum Unterraum gehören alle $\mathfrak{a}$ des Oberraumes mit $\chi(\mathfrak{a})=0$, während die Norm von $\mathfrak{a}$ im Unterraum gleich der Norm von $\mathfrak{a}$ im Oberraum ist.

$\mathfrak{S}_C$ (konvergente Folgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim}_{k,l\to\infty} |a_k - a_l|$;

$\mathfrak{S}_N$ (Nullfolgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k|$;

$\mathfrak{T}_C$ (konvergente Reihen): $\mathfrak{T}_B$, $\overline{\lim}_{m,n\to\infty} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|$;

$\mathfrak{P}_G$ (gleichmäßig konvergente Potenzreihen): $\mathfrak{P}_B$, $\overline{\lim}_{m,n\to\infty} \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k z^k\right|$.

§ 3. Lineare Operationen, Halbnormen und Minoranten.

Übersicht. Wir führen die Minoranten einer Halbnorm ein; das sind reellwertige Funktionen, die sich z. B. durch fin-Bildung von Halbnormen ergeben (3.3). Die obere Grenze von Halbnormen bzw. Minoranten ist wieder eine Halbnorm bzw. Minorante (3.4). Die Hilfssätze 3.1, 3.2 und 3.5 befassen sich mit der Stetigkeit von Halbnormen, Minoranten und linearen Operationen. Schließlich formulieren wir zwei bekannte Lemmata (3.6 und 3.7) über Folgen von Linearformen. An diesen Lemmata werden wir in den §§ 4 bis 6 drei Beweismethoden veranschaulichen.

Wir sagen, daß eine Funktion $\omega(\mathfrak{a})\leq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$ erfüllt, wenn es Zahlen m und M gibt, so daß

$$(\mathcal{M}) \qquad \omega(\mathfrak{a}) \leq M\cdot(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a})) \qquad (\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

gilt. Sind die φ_i monoton, d. h. gilt $\varphi_i(\mathfrak{a})\leq\varphi_{i+1}(\mathfrak{a})$, oder ist $\mathfrak{E}$ ein B-Raum $[\mathfrak{E};\varphi]$, so vereinfacht sich diese Bedingung zu

$$\omega(\mathfrak{a}) \leq M\cdot\varphi_m(\mathfrak{a}) \quad \text{bzw.} \quad \omega(\mathfrak{a}) \leq M\cdot\varphi(\mathfrak{a}).$$

Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm). *Erfüllt eine Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$, so ist $\chi(\mathfrak{a})<\infty$ und stetig. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so ist $\chi(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Menge des Raumes beschränkt, insbesondere nirgends stetig.*

Beweis. Ist $(\mathcal{M})$ erfüllt, so ist χ jedenfalls im Punkte $\mathfrak{o}$ stetig. Mittels der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so konstruiert man Elemente $\mathfrak{a}^{(n)}$, die im F-Raum $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren, so daß $\chi(\mathfrak{a}^{(n)})\to\infty$ geht (vgl. etwa ZELLER [1951$_1$, S. 467]). χ ist also in keiner Umgebung des Nullpunktes beschränkt. Mit der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$.

Die Funktion $\psi(\mathfrak{a})\leq\infty$ heißt Minorante oder Unternorm der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leq\infty$, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

$$0\leq\psi(\mathfrak{a})\leq\chi(\mathfrak{a}), \qquad \psi(\lambda\,\mathfrak{a}) = |\lambda|\cdot\psi(\mathfrak{a}),$$

$$(\Delta') \qquad \psi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \leq \psi(\mathfrak{a})+\chi(\mathfrak{b}).$$

Die Dreiecksungleichung ist also durch die kompliziertere Bedingung Δ' ersetzt. 3.1 läßt sich in gewissem Umfang auf Minoranten übertragen.

Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante). *$\psi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ sei Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ im F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$. I. Ist χ stetig, so auch ψ. II. Erfüllt ψ nicht $(\mathcal{M})$ und liegen die Punkte $\mathfrak{b}$ mit $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ dicht im Raum $\mathfrak{E}$, so ist ψ in keiner offenen Menge beschränkt.*

Beweis. Δ' liefert nach Umrechnung

$$(\Delta'') \qquad \psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \geq \psi(\mathfrak{a}) - \chi(-\mathfrak{b}).$$

I. Dies folgt aus Δ' und Δ''. II. Wir konstruieren eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ mit $\psi(\mathfrak{a}^{(n)}) \to \infty$ (vgl. 3.1). Ist $\mathfrak{O}$ irgendeine offene Menge im F-Raum $\mathfrak{E}$, so wählen wir ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{O}$ mit $\chi(-\mathfrak{b}) < \infty$. Setzt man in Δ'' $\mathfrak{a}^{(n)}$ statt $\mathfrak{a}$ ein, so ergibt sich die Behauptung.

Minoranten von Halbnormen werden bei uns für gewisse Divergenzfragen von Bedeutung sein (10.4, 11.5). Mit Rücksicht auf diese Anwendungen sind die übrigens nicht unabhängigen Axiome der Minorante gewählt. Die meisten Folgerungen über Minoranten lassen sich jedoch auf schwächeren Forderungen aufbauen. Die beiden nächsten Hilfssätze zeigen, in welchem Zusammenhang man auf Minoranten stößt.

Hilfssatz 3.3 ($\underline{\text{fin}}$ von Halbnormen). *Für jedes z einer Menge Z sei $\chi(\mathfrak{a}; z) \leq \infty$ eine Halbnorm ein und desselben linearen Raumes. Dann ist die Funktion*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \underset{z \in Z}{\underline{\text{fin}}}\, \chi(\mathfrak{a}; z) \leq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\underset{z \in Z}{\text{fin}}}\, \chi(\mathfrak{a}; z) \leq \infty.$$

Beweis. Einfache Rechnung.

Hilfssatz 3.4 ($\overline{\text{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). *Ist für jedes r einer Menge R die Funktion $\psi(\mathfrak{a}; r) \leq \infty$ Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}; r) \leq \infty$ ($\mathfrak{a}$ variiere in einem linearen Raum), so ist*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \overline{\underset{r \in R}{\text{fin}}}\, \psi(\mathfrak{a}; r) \leq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\underset{r \in R}{\text{fin}}}\, \chi(\mathfrak{a}; r) \leq \infty.$$

Sind die $\psi(\mathfrak{a}; r)$ bzw. $\chi(\mathfrak{a}; r)$ stetig, so ist ψ bzw. χ nach unten halbstetig.

Beweis. Klar.

Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operationen). *Eine lineare Operation T, die einen F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ in einen ebensolchen $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ abbildet, ist genau dann stetig, wenn die Halbnormen $\chi_j(T\mathfrak{a})$ $(j = 0, 1, \ldots)$ in $\mathfrak{E}$ stetig sind, also die Bedingung $(\mathcal{M})$ (s. oben) erfüllen.*

Beweis. Klar.

Die bekannten Lemmata 3.6 und 3.7 dienen uns zur Erläuterung der in den folgenden Paragraphen besprochenen Beweismethoden (vgl. Einleitung).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum, die $\langle a, a'_n\rangle$ $(n=0,1,\ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gilt $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|a'_n\| = \infty$, so gibt es ein $a\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle a, a'_n\rangle| = \infty$.* (Für die Definition von $\|a'_n\|$ vgl. § 1.)

Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum, die $\langle a, a'_{np}\rangle$ $(n,p=0,1,\ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gibt es zu jedem p ein a_p mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle a_p, a'_{np}\rangle| = \infty$, so auch ein $a\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle a, a'_{np}\rangle| = \infty$ für alle $p=0,1,\ldots$.*

§ 4. Der gleitende Buckel.

Übersicht. Die Methode des gleitenden Buckels besteht darin, daß man ein Element a mit den Eigenschaften $E_0, E_1, \ldots$ aus Elementen a_k mit der Eigenschaft E_k in Form einer Reihe $\sum \alpha_k a_k$ zusammensetzt, wobei man darauf achtet, daß sich die a_k gegenseitig nicht stören, daß also bezüglich E_k das Element a_k in der Summe den Haupteinfluß (Buckel!) ausübt. Wie man diese Störungsfreiheit erzielt, ist aus den unten gezeigten, verhältnismäßig einfachen Beweisanordnungen für die Lemmata 3.6 und 3.7 zu sehen. Wir weisen auch auf einen prinzipiellen Vorteil des „Buckels" gegenüber den Methoden aus §§ 5 und 6 hin, der unter anderem in 11.2 zur Geltung kommt. Der Grundgedanke der Methode stammt von LEBESGUE [1909] und TOEPLITZ [1911].

Beweis zu Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). Wir können $a'_n \neq 0$ voraussetzen. Zu jedem $n=0,1,\ldots$ gibt es ein $a_n\in\mathfrak{E}$ mit

$$|\langle a_n, a'_n\rangle| > \tfrac{3}{4}\|a'_n\|, \quad \|a_n\| < 1.$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$M_n = \overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |\langle a_n, a'_k\rangle| < \infty \qquad (n=0,1,\ldots)$$

gilt, sonst wäre ja nichts mehr zu beweisen. Wir wählen eine Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < \ldots$ nach der induktiven Vorschrift: $n_0 = 0$; sind $n_0, \ldots, n_{r-1}$ bestimmt, so wird n_r so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{4}\,5^{-r}\|a'_{n_r}\| > r \quad \text{und} \quad > \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k}$$

gilt (dies ist möglich wegen $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|a'_n\| = \infty$). Das Element $a = \sum 5^{-k} a_{n_k}$ gehört wegen der Vollständigkeit zum Raum $\mathfrak{E}$. Es ist

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} 5^{-k} a_{n_k}, a'_{n_r}\right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{r-1} + \sum_{k=r}^{r} + \sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k} a_{n_k}, a'_{n_r}\right\rangle = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III};$$

$$|\mathrm{I}| = \left|\sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k}\langle a_{n_k}, a'_{n_r}\rangle\right| \leq \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k} < \tfrac{1}{4}\,5^{-r}\|a'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{II}| = 5^{-r}|\langle a_{n_r}, a'_{n_r}\rangle| > 5^{-r}\tfrac{3}{4}\|a'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{III}| = \left|\left\langle \sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k} a_{n_k}, a'_{n_r}\right\rangle\right| < \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k}\cdot 1\right)\|a'_{n_r}\| = \frac{5^{-r}}{4}\|a'_{n_r}\|.$$

Die Abschätzungen lehren

$$|\langle a, a'_{n_r}\rangle| > \tfrac{1}{4}\, 5^{-r}\, \|a'_{n_r}\| > r,$$

also

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle a, a'_n\rangle| = \infty,$$

w. z. b. w.

In manchen Spezialfällen lassen sich die Abschätzungen vereinfachen, nämlich dann, wenn die Linearformen a'_n in gewissem Sinn unabhängig sind, wofür wir als krassen Fall das Beispiel $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_N$ (vgl. § 2), $\langle a, a'_k\rangle = k \cdot a_k$ anführen. Der Name gleitender Buckel erklärt sich so, daß in $\langle \sum 5^{-k} a'_{n_k}, a'_{n_r}\rangle$ für jedes r ein anderes Glied der Reihe für das Großwerden der Summe (Buckel!) verantwortlich ist, während die restlichen Glieder nur geringen Einfluß ausüben. Die Voraussetzungen wurden nur zum Teil ausgenützt. So können wir statt Linearformen auch Halbnormen und Minoranten betrachten. Ein prinzipieller Vorteil des „Buckels" im Vergleich zu den Methoden aus §§ 5 und 6 liegt weiter darin, daß man unter Umständen a in Gestalt einer divergenten (d. h. nicht im Sinne der Norm des Raumes konvergenten) Reihe darstellen kann — s. Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen) und Hilfssatz 12.2 (Randwerte bei beschränkten unstetigen Funktionen).

Beweis von Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). Wir dürfen $\sum \|a_p\| < \infty$ annehmen. Wir bestimmen mittels induktiver Vorschrift Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ mit $0 < \xi_k \leq 1$ und natürliche Zahlen $n = n(p, m)$ $(0 \leq p \leq m;$ $m = 0, 1, \ldots)$ so, daß

$$\left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k a_k, a'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l,\ l = 0, 1, \ldots$$

gilt. Denn dann ist $a = \sum \xi_k a_k$ konvergent und

$$|\langle a, a'_{np}\rangle| \geq m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m,\ m = 0, 1, \ldots,$$

d. h.

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle a, a'_{np}\rangle| = \infty \qquad (p = 0, 1, \ldots).$$

Die Bestimmung erfolgt so: Sind $\xi_0, \ldots, \xi_l$ und $n(p, m)$ für $0 \leq p \leq m \leq l$ schon derart definiert, daß

$$(1) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k a_k, a'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l),$$

$$(2) \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k a_k, a'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt, so wählen wir ξ_{l+1} so, daß

$$(1') \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k a_k, a'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l+1),$$

$$(2') \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k a_k, a'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt. Dies ist möglich, weil Bedingung (1') nur endlich viele Werte für ξ_{l+1} ausschließt und (2') zu erfüllen ist, indem man ξ_{l+1} so klein wählt, daß das im Vergleich zu (2) neu hinzukommende Glied $\xi_{l+1}\,\mathfrak{a}_{l+1}$ keinen wesentlichen Einfluß in den betreffenden endlich vielen Ungleichungen ausübt. Sodann legen wir vermöge (1') $n(p, l+1)$ $(0 \leq p \leq l+1)$ so fest, daß

$$(2'') \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np} \right\rangle\right| > l+1 \quad \text{für} \quad n = n(p, l+1), \quad 0 \leq p \leq l+1$$

ist. (2') und (2'') zusammen ergeben Bedingung (2) mit $l+1$ an Stelle von l. Entsprechendes gilt für (1') und (1). Mit den Anfangswerten $\xi_0 = 1$, $n(0, 0)$ geeignet gewählt, haben wir die gesuchte induktive Vorschrift.

Wir erkennen hier als Nachteil des „Buckels", daß umfangreiche Rechnungen nötig sind. Der Beweis vereinfacht sich jedoch wesentlich, wenn man

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, |\langle \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}'_{np} \rangle| < \infty \quad \text{für} \quad p \neq r$$

annehmen darf.

§ 5. Unterhalb stetige Funktionen.

Übersicht. Aufbauend auf einem bekannten Magerkeitssatz von BAIRE (5.1) erhält man Bedingungen, unter denen eine nach unten halbstetige Funktion bzw. Halbnorm bzw. Minorante $\omega(\mathfrak{a}) \leq \infty$ den Wert ∞ annimmt (5.2 bis 5.4). Mit 5.3 ergeben sich sofort die Lemmata 3.6 und 3.7. Der Grundgedanke dieser Methode stammt von SAKS (siehe BANACH-STEINHAUS [1927]). In etwas abgeänderter Formulierung findet man 5.3 bei BANACH [1932, S. 19], und bei GELFAND [1936]. Satz 5.4 ist mit einem Ergebnis von BANACH [1931] verwandt.

Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire). *Ist $\mathfrak{M}$ eine magere Menge in einem vollständigen metrischen Raum $\mathfrak{E}$, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{M}$.*

Bemerkung. Für die Anwendung beachte man, daß die Vereinigung abzählbar vieler magerer Mengen wieder eine magere Menge ist, wie direkt aus der Definition zu ersehen ist.

Lemma 5.2 (Unbeschränkte halbstetige Funktion). *$\mathfrak{E}$ sei ein vollständiger metrischer Raum, $\omega(\mathfrak{a}) \leq \infty$ eine nach unten halbstetige Funktion in $\mathfrak{E}$. Ist $\omega(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Teilmenge von $\mathfrak{E}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$. Genauer: Die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$ ist fett.*

Lemma 5.3 (Halbstetige Halbnorm). *Eine nach unten halbstetige Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ in einem F-Raum $\mathfrak{E}$ ist genau dann stetig, wenn $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ gilt. Ist letzteres nicht der Fall, so ist die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) = \infty$ fett.*

Beweise. Der einfache Beweis von 5.1 ist bekannt (vgl. BANACH [1932, S. 14]). Aus 5.1 folgt leicht 5.2 (für die Beweismethode vgl. man BANACH [1932, S. 19]). 5.3 erhält man nun mit Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearfolgen) gewinnt man durch Anwendung von 5.3 auf die Halbnormen

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n \rangle| \leq \infty \quad \text{bzw.} \quad \chi_p(\mathfrak{a}) = \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np} \rangle| \leq \infty$$

(vgl. Hilfssatz 3.4 über die obere Grenze von Halbnormen). Mit Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante) an Stelle von 3.1 erhalten wir eine Variante von 5.3:

Satz 5.4 (Halbstetige Minorante). *$\psi(a) \leq \infty$ sei eine nach unten halbstetige Minorante der Halbnorm $\chi(a) \leq \infty$ im F-Raum $\mathfrak{E}$. Die Stellen b mit $\chi(b) < \infty$ mögen in $\mathfrak{E}$ dicht liegen, ψ erfülle nicht die Bedingung $(\mathcal{M})$ aus § 3 (d.h. sei in keiner Umgebung von o beschränkt). Dann gibt es ein $a \in \mathfrak{E}$ mit $\psi(a) = \infty$. Genauer: Die Menge der a mit $\psi(a) = \infty$ ist fett.*

Wir bemerken noch, daß man ein a mit $\chi(a) = \infty$ in 5.3 bzw. mit $\psi(a) = \infty$ in 5.4 durch eine Konstruktion erhält, die große Ähnlichkeit mit der Konstruktion beim „gleitenden Buckel" (§ 4) aufweist (betrachte den bekannten Beweis von 5.1 mit der „Kugelschachtelung").

§ 6. Produkträume.

Übersicht. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ zweier F-Räume ist wieder ein F-Raum. Lemma 6.1 bringt eine Magerkeitsaussage über lineare abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{G}$, die auf Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) beruht. Eine Abbildung T mit Erklärungsbereich $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{E}$ und Wertbereich in $\mathfrak{F}$ heißt Operation mit abgeschlossenem Graph, wenn die Menge der Elemente (a, Ta) $(a \in \mathfrak{E}_0)$ in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist. Für solche Operationen erhält man aus 6.1 bekannte Aussagen über Stetigkeit, Bild- und Erklärungsbereich (6.2 bis 6.4). Es ergeben sich wieder Beweise für 3.6 (Folgen von Linearformen) und 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen), wobei man allgemeiner Folgen linearer Operationen in F-Räumen betrachten kann. — Die grundlegende Beweisidee stammt von Schauder [1930]; vgl. auch Banach [1932, S. 38] und Hille [1948, S. 29].

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ aller Paare (a, b) mit $a \in \mathfrak{E}$, $b \in \mathfrak{F}$ läßt sich dann in naheliegender Weise als F-Raum auffassen (lineare Verknüpfung in natürlicher Weise erklären, Halbnormen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ übernehmen! Vgl. auch Bourbaki [1940, S. 42]).

Lemma 6.1 (Komponenten in Produkträumen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, $\mathfrak{H}$ ein linearer abgeschlossener Unterraum in $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$. Die Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ der $a \in \mathfrak{E}$, die in einem Element $(a, b) \in \mathfrak{H}$ vorkommen, sei nichtmager. Dann ist sogar $\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$; und zu jeder Umgebung $\mathfrak{V}$ von o in $\mathfrak{F}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von o in $\mathfrak{E}$, so daß jedes $a \in \mathfrak{U}$ in einem Element $(a, b) \in \mathfrak{H}$ mit $b \in \mathfrak{V}$ vorkommt.*

Wir unterdrücken den Beweis, weil sich fast wörtlich das Beweisschema von Schauder [1930] anwenden läßt, das sich z. B. wieder bei Banach [1932, S. 38] und Hille [1948, S. 29] findet.

Ist T eine Operation von $\mathfrak{E}_0 < \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so wird die Menge der Elemente (a, Ta) $(a \in \mathfrak{E}_0)$ als der Graph von T bezeichnet. Hier interessiert der Fall, daß der Graph im Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen ist, was sich bei Verwendung von Elementfolgen so ausdrückt:

Aus $a^{(n)} \to a$, $Ta^{(n)} \to b$ folgt $Ta = b$.

Ein solches T wird deshalb auch „fehlkonvergenzfrei" genannt. Diese Eigenschaft verlangt etwas weniger als Stetigkeit, so daß der folgende Satz ein (wichtiges) Stetigkeitskriterium liefert:

Lemma 6.2 (Operation mit abgeschlossenem Graph). *Eine lineare Operation T mit abgeschlossenem Graph, die einen F-Raum $\mathfrak{E}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{F}$ abbildet, ist stetig.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare der Gestalt $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$, also der Graph von T. Lemma 6.1 ergibt mit der $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{U}$-Bedingung, daß T im Nullpunkt, also überall stetig ist.

Bemerkung. Eine „additive" Operation T mit abgeschlossenem Graph ist linear. Denn für rationales λ ist jedenfalls $T(\lambda\,\mathfrak{a}) = \lambda\, T(\mathfrak{a})$. Grenzübergang ergibt die Behauptung. Daher gilt 6.2 auch schon unter der engeren Voraussetzung der Additivität (s. BANACH [1932, S. 41]; beim Beweis fehlt dort die obige Bemerkung).

Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$. Dann ist die Menge der in der Form $\mathfrak{b} = T\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$ darstellbaren $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$ entweder mager in $\mathfrak{F}$ oder $= \mathfrak{F}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare $(T\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{C})$. Als stetige Operation besitzt T einen abgeschlossenen Graph, also läßt sich 6.1 anwenden.

Lemma 6.4 (Erklärungsbereich von Operationen mit abgeschlossenem Graph). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare Operation, die in einem linearen Unterraum $\mathfrak{E}_0$ von $\mathfrak{E}$ erklärt ist und diesen in $\mathfrak{F}$ abbildet. Der Graph von T sei in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen. Dann ist entweder $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_0$ mager in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei wieder die Menge der Paare $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$. Lemma 6.1 liefert den Beweis.

Wir kommen auf Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen) zurück.

Zu 3.6. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{E}_0$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $T\mathfrak{a} = \{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_k' \rangle\} \in \mathfrak{S}_B$. Die Abbildung $\mathfrak{a} \to T\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{S}_B$ hat wegen der Stetigkeit der Linearformen und der koordinatenweisen Konvergenz in $\mathfrak{S}_B$ einen abgeschlossenen Graph in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_B)$. Natürlich ist auch sie linear. Gäbe es kein $\mathfrak{a}$ der in 3.6 genannten Art, so wäre $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ und T nach Lemma 6.2 stetig, was aber im Widerspruch zu $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}_n'\| = \infty$ steht.

Zu 3.7. Nach Lemma 6.4 ist für jedes $p = 0, 1, \ldots$ die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{np}' \rangle| < \infty$ mager in $\mathfrak{E}$ (man überlegt sich wie oben, daß 6.4 anwendbar ist). Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) vollendet den Beweis.

Einige Bemerkungen am Rande: Diese Sätze und Methoden lassen sich auf Folgen von Operationen (in F-Räumen) übertragen. Der Raum $\mathfrak{F}_B$ der in einem F-Raum $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ beschränkten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ bildet einen F-Raum mit den Halbnormen $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \chi_j(\mathfrak{a}^{(n)})$ $(j = 0, 1, \ldots)$; Beweis ähnlich wie bei $\mathfrak{S}_B$ in §2. Sind die T_n lineare stetige Operationen, die den F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ in $\mathfrak{F}$ abbilden, so ist genau dann $T_n\mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge, wenn $\mathfrak{a} \to \{T_n\mathfrak{a}\}$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}_B$ ist (Beweis wie oben für 3.6), was sich durch Ungleichungen der Form

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \chi_j(T_n\mathfrak{a}) \leq M_j\left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

ausdrückt. Da die Menge $\mathfrak{F}_C$ der in $\mathfrak{F}$ konvergenten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ einen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{F}_B$ bildet, so existiert genau dann $\lim_{n\to\infty} T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$, wenn $T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge bildet und $\lim_{n\to\infty} T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}$ einer Grundmenge in $\mathfrak{E}$ existiert. Entsprechendes gilt für Konvergenz gegen Null, schwache Konvergenz usw. Schließlich zeigt Lemma 6.4, daß die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit beschränkter Folge $T_n\mathfrak{a}$ entweder mager ist oder ganz $\mathfrak{E}$ umfaßt. Analoges gilt natürlich für „konvergente Folge" usw. Man vgl. dazu MAZUR-ORLICZ [1933].

Auf der Methode der Produkträume, die bis jetzt im Schrifttum etwas vernachlässigt wurde, beruhen die Sätze des § 7 und damit die meisten Ergebnisse dieser Arbeit. Jedoch erhält man viele der funktionentheoretischen Resultate auch mit dem „Buckel" (§ 4) oder den „Halbstetigen Funktionen" (§ 5). Bei *FK*-Räumen, die nach Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) mittels halbstetiger Halbnormen definiert werden, läuft die Anwendung der Methoden aus § 5 und § 6 auf dasselbe hinaus.

§ 7. Sätze über *FK*-Räume.

Übersicht. Wir stellen einige Sätze über *FK*-Räume zusammen, die wir bei den folgenden Anwendungen gebrauchen werden. Diese Sätze beruhen auf den beiden Grundsäulen der Funktionalanalysis, dem HAHN-BANACHschen Erweiterungssatz und dem Baireschen Magerkeitssatz, und lassen sich großenteils mit den in §§ 4 bis 6 beschriebenen Methoden gewinnen. Zuerst beschäftigen wir uns mit *FK*-Räumen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, die der Beziehung $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$ genügen. Dabei vergleichen wir die Topologien (7.1) und die Halbnormen (7.2) dieser Räume. 7.2 ist wichtig für den Nachweis $\mathfrak{E}\nsubseteq\mathfrak{F}$, während man mit 7.3 mittels einer Grundmengenbedingung häufig $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$ zeigen kann. In 7.4 betrachten wir die Vereinigung von *FK*-Räumen $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0, 1, \ldots)$. Gilt für einen *FK*-Raum $\mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{F}\nsubseteq\mathfrak{E}^{(j)}$ für jedes j, so auch $\mathfrak{F}\nsubseteq\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$. 7.6 bringt eine ähnliche Aussage für den Durchschnitt von *FK*-Räumen, während in 7.5 die Konvergenz in einem *FK*-Raum $\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}$ mit der Konvergenz in jedem einzelnen $\mathfrak{E}^{(j)}$ in Verbindung gebracht werden. 7.6 ist neu, die übrigen Lemmata stammen im wesentlichen aus früheren Arbeiten des Verfassers.

Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien von *FK*-Räumen). *Sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ FK-Räume mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$, so ist die von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ induzierte gleichmäßige Struktur gröber als die von $\mathfrak{E}$. Entsprechendes gilt für die schwache gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$, so haben beide Räume dieselbe gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}=\mathfrak{E}$, so bildet $\mathfrak{E}$ eine magere Menge im FK-Raum $\mathfrak{F}$.*

Bemerkung. Es ist also die kanonische Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig; und eine in $\mathfrak{E}$ beschränkte, konvergente, schwach konvergente, Cauchysche, schwach Cauchysche Folge hat bzw. dieselben Eigenschaften in $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach ZELLER [1951, S. 471] ist die eben genannte Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ stetig, daher als lineare Abbildung sogar gleichmäßig stetig. Dies ergibt die Behauptung über die „starke" Struktur und damit auch über die „schwache" Struktur. Die Magerkeitsaussage folgt mit Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen).

Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen). *Sind* $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ *und* $[\mathfrak{F};\chi_j]$ *FK-Räume mit* $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}$, *so genügt jede Halbnorm* χ_j *in* $\mathfrak{E}$ *der Bedingung* $(\mathcal{M})$ *aus* § 3 [die mit $M=M(j)$ und $m=m(j)$

$$\chi_j(\mathfrak{a})\leq M\cdot(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a}))\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

lautet und sich in Spezialfällen noch vereinfachen läßt — s. § 3].

Beweis. Nach 7.1 ist die Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ stetig. Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operation) ergibt die Behauptung.

Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung). $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{F}$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E}_0$ *eine Grundmenge in* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_0$ *ein linearer abgeschlossener Unterraum in* $\mathfrak{F}$. *Aus* $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{E}_0\subset\mathfrak{F}_0$ *folgt dann* $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}_0$.

Beweis. Dies ergibt sich wieder aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ (vgl. 7.1).

Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen). *Sind die* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *und* $\mathfrak{F}$ *FK-Räume und gilt* $\mathfrak{F}\not\subset\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so auch* $\mathfrak{F}\not\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$. *Genauer ist* $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ *eine magere Menge im FK-Raum* $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$ ist ein *FK*-Raum — s. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen). Nach 7.1 ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$, also auch $\bigcup(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)})=\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ mager in $\mathfrak{F}$. Nach Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) gilt $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}\not\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$.

Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Der FK-Raum* $[\mathfrak{E};\varphi_i^{(j)}]$ *sei der Durchschnitt der FK-Räume* $[\mathfrak{E}^{(j)},\varphi_i^{(j)}]$ — *vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen). Eine Folge* $\mathfrak{a}^{(n)}$ *in* $\mathfrak{E}$ *ist genau dann eine Cauchysche, konvergente, schwach Cauchysche, schwach konvergente, beschränkte Folge, wenn sie die betreffende Eigenschaft in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *hat.*

Beweis. Dies folgt aus der Gestalt der Halbnormen in $\mathfrak{E}$ — vgl. Kriterium 2.3 — und der Darstellung der stetigen Linearformen in $\mathfrak{E}$ — s. ZELLER [1951, S. 472].

Lemma 7.6 (Abschnittsdichte im Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Die* $[\mathfrak{E}^{(j)};\varphi_i^{(j)}]$ *seien FK-Räume, die die Menge* $\mathfrak{A}$ *der abbrechenden Folgen enthalten; es gelte* $\mathfrak{E}^{(j)}\supset\mathfrak{E}^{(j+1)}$, $\mathfrak{A}$ *liege dicht in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$. *I. Dann liegt* $\mathfrak{A}$ *auch dicht im FK-Raum* $\mathfrak{E}=\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}$ *[vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen)]. II. Ist* $[\mathfrak{F};\chi]$ *ein BK-Raum mit* $\mathfrak{E}^{(j)}\not\subset\mathfrak{F}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so gilt auch* $\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}\not\subset\mathfrak{F}$.

Bemerkung. 7.6 II ist also ein Seitenstück zu 7.4.

Beweis. I. Sei l fest gewählt, $\mathfrak{a}$ irgendein Element aus $\mathfrak{E}$. Es gibt Stellen $\mathfrak{b}^{(n)}\in\mathfrak{A}$, die im *FK*-Raum $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren, also wegen 7.1 auch in den *FK*-Räumen $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(0\leq j\leq l)$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren. Daher erfüllt eines der $\mathfrak{b}^{(n)}$, das wir mit $\mathfrak{a}^{(l)}$ bezeichnen wollen, die Beziehung

$$\varphi_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}-\mathfrak{a})<\frac{1}{l+1}\qquad(0\leq i,j\leq l).$$

Wir erhalten so Stellen $\mathfrak{a}^{(l)}\in\mathfrak{A}$ $(l=0,1,\ldots)$, die in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren.

II. Wir dürfen $\mathfrak{F} > \mathfrak{A}$ annehmen. Wieder sei l fest und $\mathfrak{b}$ sei eine Stelle mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{E}^{(l)}$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$. Wir bestimmen Stellen $\mathfrak{b}^{(n)} \in \mathfrak{A}$, die in $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{b}$ konvergieren. $\mathfrak{b}^{(n)}$ ist in $\mathfrak{E}^{(l)}$, also nach 7.4 in jedem $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(0 \leq j \leq l)$ eine Cauchysche Folge, aber wegen $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$ keine Cauchysche Folge in $\mathfrak{F}$. Unter den Stellen der Form $\beta\,(\mathfrak{b}^{(m)} - \mathfrak{b}^{(n)})$ (β beliebig komplex) können wir daher ein $\mathfrak{a}^{(l)}$ finden, das

$$\varphi_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}) < \frac{1}{l+1}\ (0 \leq i, j \leq l), \quad \chi(\mathfrak{a}^{(l)}) > 1$$

genügt. Die so gewonnene Folge $\mathfrak{a}^{(l)}$ konvergiert in $\mathfrak{E}$, aber nicht in $\mathfrak{F}$ gegen Null, was $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ ausschließt (s. 7.1).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)

FOSTER, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 306—336 (1953)

Generalized "Boolean" theory of universal algebras.

Part I.

Subdirect sums and normal representation theorem.

By

ALFRED L. FOSTER.

1. Introduction. One particular property of the Boolean realm, namely the fundamental structure theorem that every Boolean algebra (or ring) is isomorphically representable as an algebra (ring) of classes (STONE [1]), has been reformulated and substantially extended by BIRKHOFF [2], MCCOY [3]–[6], MCCOY and MONTGOMERY [7], FOSTER [8]–[13], WADE [14], KRULL [15], and others. In particular, for instance ([6], [10], [11], [14]) it is known that:

(i) Each p-ring (algebra) and, more generally, each p^k-ring (algebra) is isomorphic with a subdirect sum of F_p (= field of residues, mod p), respectively of F_{p^k} (= Galois field of p^k elements).

As illustrated in (i), the extensions referred to lean on the notion of *subdirect sum*—a simple and natural restriction of the broader concept of "subalgebra of a direct sum"—as defined and studies (for universal algebras) by BIRKHOFF [2]. Again, these extensions do not elevate properties of Boolean theory other than the fundamental structure theorem.

In this connection, as an application of the *K-ality theory* (see [8] for outline) the author has shown in a series of recent publications ([8]–[12]) that p-rings and p^k-rings constitute generalizations of the Boolean realm not merely in the narrower sense (i) above, but actually in the widest sense: all concepts and theorems on the Boolean (i.e., $p = p^k = 2$) level possess p- and p^k-level extensions. In particular we recall that

(ii) The familiar duality principle generalizes to a certain p-ality (respectively p^k-ality) principle.

(iii) Each p-ring is a ring-algebra (also called ring-logic), and similarly for each p^k-ring.

(iv) The well known canonical or *normal* representation theorems for Boolean functions generalize to various normal representation theorems for p- (respectively p^k-) functions.

We propose to exhibit this wide extension of the Boolean domain on a considerably broader front. Let us call the algebras (*in casu*, fields) F_p and F_{p^k} the *kernels* of the p- and p^k-extensions. It will be shown that a parallel extension exists corresponding to each preassigned *f-algebra* as kernel; here an f-algebra (§ 2) is a rather general genus of universal algebra. More specifically, in the current Part I of this development we shall in considerable measure be concerned with the exhibition of the property (iv)—and, of course also of (i)—on the universal (= f-algebra) level. Corresponding to a given

kernel, $\mathfrak{U}$, we shall characterize a class $[\mathfrak{U}]$ of algebras, and a class $(\mathfrak{U})$ of subdirect sums of $\mathfrak{U}$ which are coextensive in the sense: each $\in [\mathfrak{U}]$ satisfies (a generalized version of) (iv) and is isomorphic with an $\in (\mathfrak{U})$, and conversely, each $\in (\mathfrak{U})$ is isomorphic with an $\in [\mathfrak{U}]$.

On this universal-algebra level the theory gains in depth for the special case of a functionally complete (finite) kernel. Both F_p and F_{p^k} above are kernels of this character.

The unifying value of this theory is illustrated by remarking that it is identified with the theory of Post Algebras ([*14*]) when the kernel is taken as the (again functionally complete) n-element "min, $x+1$" f-algebra, P_n.

Criteria for functional completeness are determined (§ 16–18) and various interesting classes of complete kernels of order n are suggested, including such whose structure is more closely related to fields than is the Post kernel, P_n.

Finally for a functionally complete kernel the class $[\mathfrak{U}]$ and with it the class $(\mathfrak{U})$, referred to above, will be shown to be completely characterized by the identities satisfied by its kernel, $\mathfrak{U}$, (§ 19).

2. Some preliminaries. Let $\mathfrak{U}=(U, o, \ldots)$ be a universal algebra, where $o, \ldots$ are the *primitive operations*, in the class U. By a *U-function* $f=f(\xi, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ we mean simply a function from the set U^k to the set U. A *strict $\mathfrak{U}$-function* is a U-function composed from one or more indeterminates $\xi, \ldots$ over the set U, in terms of the primitive operations of $\mathfrak{U}$; furthermore the identity function $i(\xi)\equiv\xi$ is admitted as a strict $\mathfrak{U}$-function. A U-function which is either a strict $\mathfrak{U}$-function or which results from such by replacing any of its arguments by constants (= fixed $\in U$) is called simply a *$\mathfrak{U}$-function*. In particular each constant, $\alpha\in U$, is thus a $\mathfrak{U}$-function.

A *$\mathfrak{U}$-permutation* $p(\xi)$ is a $\mathfrak{U}$-function which is a permutation ($=1-1$ self-mapping) of the set U. A *$\mathfrak{U}$-identity* is an identity $f(\xi, \ldots)=g(\xi, \ldots)$ between $\mathfrak{U}$-functions f and g; the identity is called *strict* if both f and g are strict functions.

$\mathfrak{U}$ is *finite*, of *order* n, if U is a class of n elements. $\mathfrak{U}$ is *(functionally) complete* if it is finite, and if every U-function may be expressed as a $\mathfrak{U}$-function; if every U-function may be expressed as a strict $\mathfrak{U}$-function, $\mathfrak{U}$ is called *strictly* complete.

Binary- and f-algebras, frames, etc. An algebra $\mathfrak{U}=(U, \times, o, \ldots)$ is called *binary* if its primitive operations include a binary operation, $\times$ (= "product" or "connex") for which a $0\in U$ (= "zero" or "null") and a $1\in U$ (= "identity") exist satisfying

$$0\times\xi=\xi\times 0=0, \qquad 1\times\xi=\xi\times 1=\xi \quad (\xi\in U).$$

It is noted that the product, $\times$, need in general be neither associative nor commutative.

A binary algebra $\mathfrak{U}=(U, \times, ^\wedge, ^\vee)$ whose primitive operations consist of $\times$ together with a $0\leftrightarrow 1$ permutation, $^\wedge$, of U and its inverse, $^\vee$, we call a *(simple) frame*,—also a *(simple) logical algebra*, or *logic*. We write

$$\wedge(\xi)=\xi^\wedge, \qquad \vee(\xi)=\xi^\vee$$

and by definition,

$$0^{\wedge} = 1, \qquad 1^{\wedge} = 0; \qquad 0^{\vee} = 1, \qquad 1^{\vee} = 0; \qquad \xi^{\wedge\vee} = \xi^{\vee\wedge} = \xi .$$

We call $^{\wedge}$ the *complement* of the frame, or logic, and $^{\vee}$ the inverse complement.

A binary algebra $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ is called a *frame algebra*, or simply an *f-algebra* if at least one $0 \leftrightarrow 1$ permutation, $^{\wedge}$, of the set U is expressible as a $\mathfrak{U}$-permutation, and if the inverse, $^{\vee}$, of $^{\wedge}$ is also so expressible. We then call the algebra $\mathcal{U} = (U, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$ a *frame of* $\mathfrak{U}$,—or the $^{\wedge}$-frame of $\mathfrak{U}$, also the $^{\wedge}$-*logic* of $\mathfrak{U}$. Examples are widespread. To begin with, all Boolean rings, p-rings and p^k-rings are f-algebras. Quite generally, any ring with unit is an f-algebra, with $^{\wedge}$ given for example by: $\xi^{\wedge} = 1 - \xi$. Again, any complemented lattice, also all Post-algebras are f-algebras. Further, any functionally complete binary algebra (see § 16–18 for criteria and examples) is an f-algebra. Finally we remark, if a binary algebra is not an f-algebra it may of course be converted to one by augmenting its primitive operations by $^{\wedge}, ^{\vee}$—an arbitrary $0 \leftrightarrow 1$ U-permutation and its inverse.

If $\mathfrak{U}$ is an f-algebra we shall use the term "subalgebra" of $\mathfrak{U}$ to mean: subalgebra containing the 0 of $\mathfrak{U}$. If $\mathcal{U}$ is a frame of $\mathfrak{U}$ then a subalgebra of $\mathcal{U}$ (i.e., a subalgebra containing the 0 of $\mathfrak{U}$) is called a *subframe* of $\mathfrak{U}$, or of $\mathcal{U}$.

If $\mathfrak{U}$ is a finite binary algebra which possesses a $0 \leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\wedge}$, then its inverse, $^{\vee}$, is necessarily a $\mathfrak{U}$-permutation and $\mathfrak{U}$ is therefore an f-algebra.

Transforms; $^{\wedge}$-join. Let U be a class, $f(\xi, \xi_2, \ldots)$ a U-function and $p(\xi)$ a permutation of the set U, with inverse written $p^{-}(\xi)$. Then the function f_p defined by

$$f_p(\xi, \xi_2, \ldots) = p^{-}\{f(p(\xi), p(\xi_2), \ldots)\}$$

is called the *p-transform*[1]) of f. Via the $1-1$ correspondence $\xi \to p(\xi)$ the functions (as mappings) are isomorphic,

$$f_p(\xi, \ldots) \cong f(\xi, \ldots) .$$

We are here particularly concerned with a frame $\mathcal{U} = (U, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$ of an f-algebra $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$, and with $p(\xi)$ chosen as the complement, $^{\wedge}$. The $^{\wedge}$-transform of each $\mathfrak{U}$-function is then an (isomorphic) $\mathfrak{U}$-function, and the $^{\wedge}$-transform of each $\mathcal{U}$-function (= *frame*-function) is again a frame function. In particular, $\times_{\wedge}$, the $^{\wedge}$-transform of the product, $\times$, of the algebra $\mathfrak{U}$ is given by

$$\xi \times_{\wedge} \eta = (\xi^{\wedge} \times \eta^{\wedge})^{\vee} = (\xi^{\wedge}\, \eta^{\wedge})^{\vee} .$$

We call $\times_{\wedge}$ the *join* (or $^{\wedge}$-*join*) operation of $\mathfrak{U}$, or of $\mathcal{U}$[2]).

[1]) See [8]. As there noted, f_p is the "same" function as f, expressed however in the p "coordinate system".

[2]) The terminology stems from the special case where $\mathfrak{U} = (U, \times, +)$ is a Boolean ring, which is an f-algebra with the frame (= Boolean algebra corresponding to the ring $\mathfrak{U}$) $\mathcal{U} = (\mathfrak{U}, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$, where

$$\xi^{\wedge} = \xi^{\vee} = 1 + \xi .$$

In this case $\times_{\wedge}$ reduces to the Boolean union,

$$\xi \times_{\wedge} \eta = \xi + \eta + \xi\eta = \xi + \eta - \xi\eta = \xi \oplus \eta = \text{union}.$$

A. Synthesis: Boolean Extension of an f-algebra.

3. J-extension of a set. Let $\mathfrak{U}=(U, \times, o, \ldots)$ be an f-algebra[3]) and let J be a given Boolean algebra. We call $\mathfrak{U}$ the *kernel* and J the *core* of a specific over f-algebra $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{[J]}$ which we shall synthesize in a manner reminiscent of an orthodox hypercomplex construction. The class $[\mathfrak{A}]$ of all such algebras $\mathfrak{A}$—with fixed kernel and variable core—is the class referred to in the introduction. That is, in each $\mathfrak{A} \in [\mathfrak{A}]$ we shall establish the existence of a certain normal decomposition. In § 10 we shall establish an isomorphic identification of $[\mathfrak{A}]$ with a certain class of subdirect sums of $\mathfrak{U}$.

Condition on J. Throughout the paper we shall automatically assume: if the kernel $\mathfrak{U}$ is a finite algebra, J may be chosen as an entirely arbitrary Boolean algebra; in particular it may be of arbitrary cardinality, and need not be complete, nor even atomistic, etc. If $\mathfrak{U}$ is an infinite algebra we restrict J to being an arbitrary *complete* Boolean algebra.

Notation. In the core $(J, \times, ^*)$, in which $\times, ^*$ denote Boolean-intersection and -complement, and in which the null and universe are denoted by $0, 1$, possible ambiguity in the meanings of $\times, 0, 1$ is usually resolved by the convention: small Greek letters α, β, ξ, η, etc. denote $\in \mathfrak{U}$ (= kernel); small Roman letters a, b, x, y etc. denote elements of J; bold face $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ etc. denote $\in \mathfrak{A}$, to be defined presently. Thus, in the expression $\alpha \times \beta (= \alpha\, \beta) = 0$, both $\times$ and 0 refer to $\mathfrak{U}$, while in $a \times b (= a\, b) = 1$ both $\times$ and 1 refer to J. This present ambiguous use of $\times, 0, 1$ anticipates an eventual single-meaninged interpretation, in which both kernel and core will be identified as particular subsystems of $\mathfrak{A}$.

We consider the set

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]} = \{\ldots, \boldsymbol{\alpha}, \ldots\}, \tag{3.1}$$

which depends only on the set U and the Boolean algebra J, and, in particular, is independent of the primitive operations of $\mathfrak{U}$. The elements

$$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{U}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = [\ldots, a_\mu, \ldots]$$

are the *J-partition vectors* over U: to each $\mu \in U$ is assigned an $a_\mu \in J$, such that the a_μ are pairwise disjoint and cover J,

$$\begin{cases} a_\mu a_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu) \\ \overset{\times_*}{\sum\limits_{\mu \in U}} a_\mu = 1 \qquad\qquad (\mu, \nu \in U). \end{cases} \tag{3.2}$$

Here $\times_*$ is the Boolean union operation of J,

$$a \times_* b = (a^* b^*)^*, \qquad (a, b \in J), \tag{3.3}$$

[3]) The f-algebra nature of $\mathfrak{U}$ is not used until § 5. In this and the following section $\mathfrak{U}$ may be an arbitrary universal algebra.

and $\overset{\times}{\sum_{\mu\in U}}$ denotes the union of the assigned a_μ. The a_μ are called the J- or *core-components* of $\mathfrak{a}$, and in connection therewith we shall use square brackets,

$$[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}; \qquad [\mathfrak{a}]_\mu = a_\mu. \tag{3.4}$$

Further, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *(equality)* denotes: $[\mathfrak{a}]_\mu = [\mathfrak{b}]_\mu$, $(\mu \in U)$.

Identification of U in $\boldsymbol{U}$. By U', the *regular* subset of $\boldsymbol{U}$, we mean the set of all $\in \boldsymbol{U}$ in which some core-component is 1; from this it follows that all other components are 0. We have

$$U' = \{\ldots, \mathfrak{l}_\mu, \ldots\}, \quad \mathfrak{l}_\mu = [\ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots], \ (\mu^{\text{th}} \text{ component} = 1), \tag{3.5}$$

and we shall henceforth automatically *identify* the kernel set U with this regular subset,

$$U = U': \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{l}_\alpha, \qquad U \subseteqq \boldsymbol{U}, \tag{3.6}$$

thus in part justifying the "extension" terminology for $\boldsymbol{U}$: U is a specific subset of $\boldsymbol{U}$, or $\boldsymbol{U}$ an overset of U.

For the finite case we have the readily verified (see [*10*])

Theorem 1. *If $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ is finite (that is if both the kernel* $\mathfrak{U}$ *and the core J are finite), the order of $\boldsymbol{U}$ is n^k, where n is the order of* $\mathfrak{U}$ *and k is the number of atoms in J.*

4. The J-extension of operations. Let now $q(\xi, \eta, \ldots)$ be any $\mathfrak{U}$-function, or even any U-function. By the *extension to* $\boldsymbol{U}$, or the *J-extension* of $q(\xi, \eta, \ldots)$ we mean the $\boldsymbol{U}$-function $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ defined by:

$$q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = [q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)]_\mu = \overset{\times}{\sum_{g(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}} (x_\alpha\, y_\beta \ldots), \tag{4.1}$$

where

$$\mathfrak{x} = [\ldots, x_\mu, \ldots], \quad \mathfrak{y} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots.$$

Here $\overset{\times}{\sum}$ denotes the union of all those terms $(x_\alpha\, y_\beta \ldots)$ for which $q(\alpha, \beta, \ldots) = \mu$; if for some particular μ no such $\alpha, \beta, \ldots$ exist, then for this μ, $q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ is defined $= 0$. It is easily verified from (4.1) that

$$\begin{cases} q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) \times q_\nu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = 0 \quad (\mu \neq \nu) \\ \overset{\times}{\sum_{\mu\in U}} q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

and hence that $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ as defined is actually $\in \boldsymbol{U}$.

The *J-extension* of an algebra $\mathfrak{U} = (U, \ldots, o, \ldots)$ is now defined as the algebra $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, \ldots, o, \ldots)$ whose class $\boldsymbol{U}$ of elements is the J-extension of the class U, and whose primitive operations are the J-extensions of the primitive operations of $\mathfrak{U}$.

The identification of U with the regular subset of $\boldsymbol{U}$ (§ 3) and the "extension" terminology is now fully justified by

Theorem 2. *If U' is the class of all regular elements of $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ then $\mathfrak{U}' = (U', \ldots, o, \ldots)$ forms a subalgebra (called the regular subalgebra) of $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, \ldots, o, \ldots)$. Via the $1-1$ correspondence*

$$\alpha \leftrightarrow \mathbf{1}_\alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{U})$$

$\mathfrak{U}'$ is isomorphic with the kernel $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$.

Proof. We must show that: from $o(\alpha, \beta, \ldots) = \gamma$ follows $o(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \mathbf{1}_\gamma$, or, what is equivalent, that

$$o_\mu(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \gamma \\ 0 & \text{if } \mu \neq \gamma \end{cases}. \tag{4.3}$$

But

$$o_\mu(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \sum_{o(\sigma,\tau,\ldots)=\mu}^{\times\bullet} ([\mathbf{1}_\alpha]_\sigma [\mathbf{1}_\beta]_\tau \ldots). \tag{4.4}$$

From the definition of the $\mathbf{1}_\gamma$, (4.4) reduces to (4.3) and the theorem is proved.

We shall hereafter *identify* $\mathfrak{U}$ with $\mathfrak{U}'$, and shall speak of the *kernel* $\mathfrak{U}$ of $\mathfrak{U}$:

$$\alpha = \mathbf{1}_\alpha, \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' = \text{kernel} = \text{regular subalgebra of } \mathfrak{U}, \ \mathfrak{U} < \mathfrak{U}. \tag{4.5}$$

Each U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ extends, by (4.1) to a unique $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$,

$$f(\xi, \eta, \ldots) \to f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots). \tag{4.6}$$

To distinguish the latter from general $\boldsymbol{U}$-functions let us call $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *regular*, that is: a $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is regular if and only if it is the J-extension (4.1) of some U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$; such $f(\xi, \eta, \ldots)$ we then call an *antecedent* of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$.

Lemma 3. *A regular $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ has precisely one antecedent $f(\xi, \eta, \ldots)$; the latter is identical with the "regular part" of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$, i.e., the function resulting from the restriction of $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ to the kernel of $\boldsymbol{U}$.*

Proof. Let $f(\xi, \eta, \ldots)$ and $f'(\xi, \eta, \ldots)$ be antecedents of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$. Then

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \sum_{f(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}^{\times\bullet} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta \ldots = \sum_{f'(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}^{\times\bullet} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta \ldots, \qquad (\mu \in U). \tag{4.7}$$

Since the $[\boldsymbol{\xi}]_\alpha$ are pairwise disjoint, with $\sum_{\alpha\in U}^{\times\bullet} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha = 1$, and similarly for the $[\boldsymbol{\eta}]_\alpha, \ldots$ it follows from (4.7) that $f(\alpha, \beta, \ldots) = f'(\alpha, \beta, \ldots)$ in U. That is, the antecedent is unique. The rest of the theorem follows on inserting regular arguments in (4.7), as in the proof of Theorem 2.

There is thus a $1-1$ correspondence between the U- and the regular $\boldsymbol{U}$-functions.

Let $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi})$ be regular $\boldsymbol{U}$-functions. Their regular parts (antecedents) are $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta, \varphi)$. Consider the composition $f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}))$. That

this is a regular $\boldsymbol{U}$-function, with antecedent $f(\xi, g(\eta, \varphi, \tau))$ is seen by repeated used of (4.1); we have

$$[f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}))]_\mu = \sum_{f(\alpha, g(\beta, \gamma, \sigma)) = \mu}^{\times_\bullet} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta [\boldsymbol{\varphi}]_\gamma [\boldsymbol{\tau}]_\sigma, \qquad (\mu \in U).$$

Again $f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}))$ is a regular $\boldsymbol{U}$-function with antecedent $f(\xi, g(\xi, \eta, \varphi))$; by (4.1)

$$[f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}))]_\mu = \sum_{f(\alpha, g(\alpha, \beta, \gamma)) = \mu}^{\times_\bullet} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta [\boldsymbol{\varphi}]_\gamma, \qquad (\mu \in U).$$

In a similar fashion one proves, quite generally,

Lemma 4. *The* $1-1$ *correspondence between U- and regular* $\boldsymbol{U}$*-functions is preserved under compositions. In particular, any composition of regular* $\boldsymbol{U}$*-functions is a regular* $\boldsymbol{U}$*-function.*

A strict $\mathfrak{U}$-function is some composition of the primitive $\mathfrak{U}$-functions, and the latter are the extensions to U of the primitive $\mathfrak{U}$-functions. Lemma 4 then has the immediate corollary

Theorem 5. *The class of strict* $\mathfrak{U}$*-functions and the class of strict* $\mathfrak{U}$*-functions are in* $1-1$ *correspondence: if* $h(\xi, \eta, \ldots)$ *is a strict* $\mathfrak{U}$*-function its J-extension* $h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *is a strict* $\mathfrak{U}$*-function; conversely, if* $h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *is a strict* $\mathfrak{U}$*-function it is a* $\boldsymbol{U}$*-function whose antecedent (= regular part) is a strict* $\mathfrak{U}$*-function.*

For general (i.e., not necessarily strict) $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}$ functions one then readily obtains the further result,

Theorem 6. *There is a* $1-1$ *correspondence between the class of all* $\mathfrak{U}$ *functions and the subclass of all* $\mathfrak{U}$*-functions* (i) *whose constants (if any,—see § 2) are elements of the kernel* $\mathfrak{U}$ *of* $\mathfrak{U}$: *if* $f(\xi, \ldots)$ *is a* $\mathfrak{U}$*-function, its J-extension is a* $\mathfrak{U}$*-function (with the property (i)); conversely if* $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ *is a* $\mathfrak{U}$*-function with the property* (i) *it is the J-extension of a* $\mathfrak{U}$*-function.*

5. Imbedding of J in $\mathfrak{U}$. We have already identified the kernel $\mathfrak{U}$ with the regular subalgebra of its J extension, $\mathfrak{U}$, where the kernel may be taken as an arbitrary universal algebra. We now assume the kernel to be an f-algebra. In this case we shall establish a similar isomorphic identification of the ground Boolean algebra or core J,—not however as a sub*algebra*, but as a specific sub*frame* of $\mathfrak{U}$ (see § 2).

Let then $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ be an f-algebra, and let $\mathcal{U} = (U, \times, \wedge, \vee)$ be an arbitrary but fixed frame of $\mathfrak{U}$, which we also refer to as *the* frame of $\mathfrak{U}$. Let $J = (J, \times, {}^*)$ be a given Boolean algebra (= core) and let $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, \times, o, \ldots)$ and $\mathcal{U} = (\boldsymbol{U}, \times, \wedge, \vee)$ be the J-extensions of $\mathfrak{U}$ and $\mathcal{U}$ respectively.

By (4.1) we have, for $\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots]$, $\boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots]$, $\ldots$; $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \boldsymbol{U}$,

$$(5.1) \qquad \begin{cases} [\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}]_\mu = \sum_{\alpha\beta = \mu}^{\times_\bullet} x_\alpha y_\beta \\ [\boldsymbol{\xi}^\wedge]_\mu = \sum_{\alpha^\wedge = \mu}^{\times_\bullet} x_\alpha = x_{\mu^\vee} \\ [\boldsymbol{\xi}^\vee]_\mu = \sum_{\alpha^\vee = \mu}^{\times_\bullet} x_\alpha = x_{\mu^\wedge}. \end{cases}$$

Theorem 7. $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra and* $\mathfrak{U}$ *is a frame of* $\mathfrak{U}$.

Proof. That the extended operations $^\wedge, ^\vee$ are U-permutations follows from (5.1). Further $0^\wedge = 1$, $1^\wedge = 0$, since this is so in $\mathcal{U}$ and $\mathfrak{U}$ is an extension of $\mathcal{U}$. Finally $^\wedge$ and $^\vee$ may be expressed as $\mathfrak{U}$-functions; this follows from Theorem 6, since $^\wedge$ and $^\vee$ are expressible as $\mathfrak{U}$-functions. This proves the theorem. We shall call $\mathfrak{U}$ *the* frame of $\mathfrak{U}$.

A subframe T of $\mathfrak{U}$, or of $\mathfrak{U}$, has already been defined as a subalgebra of $\mathfrak{U}$ which contains the element 0; it will then also contain the element $1 = 0^\wedge$ and therefore $\Theta = \{0, 1\} =$ 2-element subframe,

$$\Theta \leqq T \leqq \mathfrak{U}. \tag{5.2}$$

In writing the elements of U let us agree to reserve the first two places for the 0 and 1 components,

$$\alpha = [\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots].$$

Let J' denote the class of all elements of U of the form

$$[a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots]. \tag{5.3}$$

Theorem 8. $(J', \times, ^\wedge, ^\vee)$ *is a subframe of* $\mathfrak{U}$. *It is a Boolean algebra with* $\times$ *as Boolean intersection and* $^\wedge = ^\vee$ *as Boolean complement. Via the* $1-1$ *correspondence*

$$J \leftrightarrow J', \quad a \leftrightarrow [a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots], \tag{5.4}$$

the Boolean algebra J' *is isomorphic with the ground algebra or core,* J,

$$J \cong J'.$$

Proof. From (5.1) one computes

$$\begin{cases} [a^*, a, 0, \ldots] \times [b^*, b, 0, \ldots] = [(a\,b)^*, a\,b, 0, \ldots] \\ [a^*, a, 0, \ldots]^\wedge = [a^*, a, 0, \ldots]^\vee = [a, a^*, 0, \ldots], \end{cases} \tag{5.5}$$

from which the theorem follows. We shall hereafter *identify* J with J' and shall refer to the *core of* $\mathfrak{U}$, or of $\mathfrak{U}$,

$$J = J', \qquad a = [a^*, a, o, \ldots], \qquad J \leqq \mathfrak{U}. \tag{5.6}$$

For core elements, then: $a^\wedge = a^\vee = a^*$, $a^{\wedge\wedge} = a^{\vee\vee} =$ etc. $= a$, $(a \in J)$. Furthermore with the identification of J as the core of $\mathfrak{U}$, our previous Boolean sum $\overset{\times_\bullet}{\sum}$ (union) may now be expressed as an operation in $\mathfrak{U}$,

$$\overset{\times_\bullet}{\sum} = \overset{\times_\wedge}{\sum}, \tag{5.7}$$

where $\times_\wedge$ is the $^\wedge$-transform of $\times$ (§ 2),

$$\xi \times_\wedge \eta = (\xi^\wedge \times \eta^\wedge)^\vee, \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{U}). \tag{5.8}$$

6. Fundamental identities; normal expansion theorem. The core elements of $\mathfrak{U}$ commute and associate,

$$\begin{cases} a\,b = b\,a \\ a\,(b\,c) = (a\,b)\,c = a\,b\,c \end{cases} \qquad (a, b, c \in J). \tag{6.1}$$

We list several additional basic identities as Theorem 9. These may all be directly verified by use of (5.1)–(5.8); they are however more readily proved as consequences of the subdirect sum representation for $\mathfrak{U}$ to be established in § 10–15.

Theorem 9. *Let $\mathfrak{U}$ be the J-extension of the f-algebra $\mathfrak{U}$, and identify J and $\mathfrak{U}$ with the core and kernel of $\mathfrak{U}$. Then*

For $\xi, \eta \in \mathfrak{U}$; $a, b \in J$,

$$\begin{cases} \xi\,a = a\,\xi \\ (\xi\,a)\,b = \xi\,(a\,b) = \xi\,a\,b \\ (\xi\,\eta)\,a = \xi\,(\eta\,a) = \xi\,\eta\,a. \end{cases} \tag{6.2}$$

For $\xi, \eta, \varphi \in \mathfrak{U}$; a, b, c *pairwise disjoint* $\in J$,

$$\begin{cases} a\,\xi \times_{\wedge} b\,\eta = b\,\eta \times_{\wedge} a\,\xi \\ (a\,\xi \times_{\wedge} b\,\eta) \times_{\wedge} c\,\varphi = a\,\xi \times_{\wedge} (b\,\eta \times_{\wedge} c\,\varphi) = a\,\xi \times_{\wedge} b\,\eta \times_{\wedge} c\,\varphi. \end{cases} \tag{6.3}$$

For $\xi, \eta, \sigma \in \mathfrak{U}$; a, b *disjoint* $\in J$,

$$\begin{cases} \sigma\,(a\,\xi \times_{\wedge} b\,\eta) = a\,\sigma\,\xi \times_{\wedge} b\,\sigma\,\eta \\ (a\,\xi \times_{\wedge} b\,\eta)\,\sigma = a\,\xi\,\sigma \times_{\wedge} b\,\eta\,\sigma. \end{cases} \tag{6.4}$$

Remark. In the important special case, as in a ring, where the core f-algebra $\mathfrak{U}$ is associative, $\alpha\,(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma$ and/or commutative $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$, $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{U})$ it follows easily from (5.1) that the same holds in $\mathfrak{U}$: $\alpha\,(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma$ and/or $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{U}$. Hence, in this special case, the proof of (6.2) is immediate. So also is that of (6.3), since $\times_{\wedge}$ is a transform of the operation $\times$, and therefore an isomorphic mapping. Hence the associativity and/or commutativity of $\times$ carries with it that of $\times_{\wedge}$,

$$\xi \times_{\wedge} (\eta \times_{\wedge} \varphi) = (\xi \times_{\wedge} \eta) \times_{\wedge} \varphi \quad \text{and/or} \quad \xi \times_{\wedge} \eta = \eta \times_{\wedge} \xi.$$

7. On general $\times_{\wedge}$-sums. The (limited) $\times_{\wedge}$-associativity and -distributivity properties (6.3) and (6.4) easily extend to finite $\times_{\wedge}$-sums,—where $a, b, c,$— are pairwise disjoint. The general (not necessarily finite) versions of these may be obtained in the following manner.

Let

$$\xi = [\ldots, x_{\mu}, \ldots], \qquad \eta = [\ldots, y_{\mu}, \ldots], \ldots$$

be $\in \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$. We define $\xi \sim \eta$ (read: ξ is *compatible* with η, and $\xi < \eta$ (read: ξ is *contained* in η) by:

(7.1) $\xi \sim \eta$ if and only if $x_\mu y_\nu = 0 \quad (\mu, \nu \neq 0;\ \mu, \nu \in U)$.

(7.2) $\xi < \eta$ if and only if $x_\mu < y_\mu \qquad (\mu \neq 0;\ \mu \in U)$.

From this one readily has that $<$ partially orders $\boldsymbol{U}$.

Theorem 10. *Let $E = \{\ldots, \xi^{(i)}, \ldots\}$ be a class of pairwise compatible elements of $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$. Let ξ be defined by the J-partition*

$$(7.3) \qquad \xi: \begin{cases} [\xi]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum\limits_{\xi^{(i)} \in E}} [\xi^{(i)}]_\mu, \\ [\xi]_0 = \left(\overset{\times\wedge}{\sum\limits_{\mu \in U,\ \mu \neq 0}} [\xi]_\mu \right)^\wedge \end{cases} \qquad (\mu \neq 0).$$

If (i) *E is a finite set, or if* (ii) *E is a set of arbitrary cardinality and J is complete, $\xi \in \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ and is the least upper bound of the $\xi^{(i)} \in E$: $\xi^{(i)} < \xi$, and if $\xi' \in U$ and if $\xi^{(i)} < \xi'$ for all $\xi^{(i)} \in E$, then $\xi < \xi'$. In the case* (i) *ξ is also given by*

$$(7.4) \qquad \xi = \overset{\times\wedge}{\sum_{\xi^{(i)} \in E}} \xi^{(i)},$$

while in case (ii) *the right of* (7.4) *is defined as ξ (given by* (7.3)*). In either case, for any $\sigma \in \boldsymbol{U}$, $\sigma E = \{\ldots, \sigma\xi^{(i)}, \ldots\}$ consists of pairwise compatible elements of $\boldsymbol{U}$ and the general distributive property holds,*

$$(7.5) \qquad \sigma\xi = \overset{\times\wedge}{\sum} \sigma\xi^{(i)}, \quad \xi\sigma = \overset{\times\wedge}{\sum} \xi^{(i)}\sigma.$$

We shall omit the proof, which is entirely straightforward.

8. The normal decomposition. We may now formulate

Theorem 11 (Normal decomposition theorem). *Let $\mathfrak{U}$ be the J-extension of the f-algebra $\mathfrak{U}$, let $\xi, \eta, \ldots$ be $\in \mathfrak{U}$, with (idempotent) components $[\xi]_\mu = x_\mu$, etc. Then each $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ possesses an expansion (= "normal decomposition"),*

$$(8.2) \qquad f(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}} f(\mu, \nu, \ldots)\, x_\mu y_\nu \ldots.$$

Proof. Note that the terms on the right of (8.2) are pairwise disjoint and therefore compatible. In case the kernel $\mathfrak{U}$ is infinite we have that J is complete (§ 3), and therefore the right of (8.2) always defines an element of $\mathfrak{U}$, by theorem 10.

We first show that (8.2) holds for the identity function, i.e., that

$$(8.3) \qquad \xi = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\, x_\mu.$$

Now by (3.6), (5.6) and (5.1), for $\alpha \in \mathfrak{U}$ one computes

$$(8.4) \qquad \alpha\,[\xi]_\alpha = \alpha\, x_\alpha = [x_\alpha^*, \ldots, 0, \ldots, x_\alpha, \ldots, 0, \ldots], \quad (x_\alpha \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}).$$

Similarly for $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ all different $\in \mathfrak{U}$, $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ are pairwise disjoint, and by (5.1) and (5.8) one computes

$$(8.5) \qquad \begin{cases} \alpha\, x_\alpha \times_\wedge \beta\, x_\beta \times_\wedge \gamma\, x_\gamma \times_\wedge \cdots \\ = [x_\alpha^*\, x_\beta^*\, x_\gamma^* \ldots, \ldots, 0, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\gamma, \ldots, 0, \ldots] \\ \qquad\qquad (x_\alpha \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}, \ x_\beta \text{ in } \beta^{\text{th}}, \ldots). \end{cases}$$

As μ runs through the kernel $\mathfrak{U}$ the identity (8.3) follows readily from (8.5)[4].

We now show that (8.2) holds for strict $\mathfrak{U}$-functions. Let $h(\xi, \eta, \ldots)$ be a strict $\mathfrak{U}$-function. By use of theorem 5 and (4.1) we have

$$(8.6) \qquad [h(\xi, \eta, \ldots)]_\sigma = \sum_{h(\mu, \nu, \ldots) = \sigma}^{\times_\wedge} [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \ldots.$$

Again, by (8.3),

$$(8.7) \qquad h(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \sigma\, [h(\xi, \eta, \ldots)]_\sigma.$$

Combining (8.6) and (8.7),

$$(8.8) \qquad h(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \sigma \Big(\sum_{h(\mu, \nu, \ldots) = \sigma} [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \ldots \Big) = \sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\mu, \nu, \ldots)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \ldots.$$

This is precisely the expansion (8.2) for the strict $\mathfrak{U}$-function $h(\xi, \eta, \ldots)$.

There remains to establish (8.2) for non-strict $\mathfrak{U}$-functions. If $f(\xi, \eta, \ldots)$ is such, then (see § 2) it is obtained from a suitable strict $\mathfrak{U}$-function h by the substitution of appropiate constants $\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}$,

$$(8.9) \qquad f(\xi, \eta, \ldots) = h(\xi, \eta, \ldots, \alpha, \beta, \ldots).$$

Consider the typical case

$$(8.10) \qquad f(\xi, \eta) = h(\xi, \eta, \alpha),$$

where $h(\xi, \eta, \alpha)$ is strict. We shall show that $f(\xi, \eta)$ satisfies (8.2). The proof of the general situation (8.9) is exactly parallel.

We must show that

$$(8.11) \qquad f(\xi, \eta) = \sum_{\mu, \nu \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} f(\mu, \nu)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu.$$

Since the strict $\mathfrak{U}$-function h has been shown to satisfy (8.2), by (8.10) we then have

$$(8.12) \qquad f(\mu, \nu) = h(\mu, \nu, \alpha) = \sum_{\sigma, \tau, \lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\sigma, \tau, \lambda)\, [\mu]_\sigma\, [\nu]_\tau\, [\alpha]_\lambda.$$

[4]) The proof also follows readily from the fundamental isomorphism, theorem 17.

Now $[\mu]_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \mu \\ 0 & \text{if } \sigma \neq \mu \end{cases}$, and similarly for $[\nu]_\sigma \dots$. Hence (8.12) reduces to

$$f(\mu, \nu) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\Lambda} h(\mu, \nu, \lambda)\, [\alpha]_\lambda . \tag{8.13}$$

By (8.11), (8.9) and (8.13) we are required thus to show that

$$h(\xi, \eta, \alpha) = \sum_{\mu, \nu, \lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\Lambda} h(\mu, \nu, \lambda)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu\, [\alpha]_\lambda . \tag{8.14}$$

This however is true, since it is the normal expansion of the (strict) $\mathfrak{U}$-function, h. Hence (8.11)—and in like manner the normal expansion of any $\mathfrak{U}$-function—is established. The proof of theorem 11 is now complete.

9. Abstract formulation. In terms of properties already established and largely selected from theorems 9–11, we shall now give an abstract characterization of the concept: Boolean extension of an f-algebra. We shall do this only for the case where the kernel is finite; for an infinite kernel the abstract formulation of the "convergence" of such $\times_\Lambda$-sums as in (3°) and (5°) below is somewhat involved, and will not here be attempted.

Theorem 12. *Let $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{V}$ be f-algebras of which the latter is finite. For $\mathfrak{B}$ to be (isomorphic with) a Boolean extension of $\mathfrak{V}$ it is necessary and sufficient that $\mathfrak{B}$ possess a subalgebra isomorphic with (and here again denoted by) $\mathfrak{V}$, and a subframe J, such that*

(1°) *J is a Boolean algebra.*

(2°) *$\mathfrak{B}$, J satisfy* (6.2), (6.3) *and* (6.4) *of theorem* 9—*with $\mathfrak{U}$ replaced by $\mathfrak{V}$.*

(3°) *Each $\xi \in \mathfrak{B}$ may be expressed in the form*

$$\xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{V}}^{\times_\Lambda} \mu\, x_\mu ,$$

in which the x_μ satisfy

$$x_\mu \in J , \qquad x_\mu x_\nu = 0 \,(\mu \neq \nu) , \qquad \sum^{\times_\Lambda} x_\mu = 1 .$$

(4°) *For each $\xi \in \mathfrak{B}$, the x_μ determined by* (3°) *are unique.*

(5°) *For each primitive operation o of the algebra $\mathfrak{B}$*

$$o(\xi, \eta, \dots) = \sum_{\mu, \nu, \dots \in \mathfrak{V}}^{\times_\Lambda} o(\mu, \nu, \dots)\, x_\mu\, y_\nu \dots ,$$

where the x_μ, y_ν, ... are determined from ξ, η, ... by (3°) *and* (4°).

Proof. The necessity of the conditions follows directly from theorems 2, 8, 9 and 11. To prove sufficiency, choose $\mathfrak{V}$ as kernel and J as core and construct $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'_{[J]}$, the J-extension of $\mathfrak{V}$. Establish the correspondence

$$\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}: \quad \xi' = [\dots, x_\mu, \dots] \to \xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{V}}^{\times_\Lambda} \mu\, x_\mu . \tag{9.1}$$

By virtue of (4°) this correspondence is $1-1$, $\mathfrak{B}' \leftrightarrow \mathfrak{B}$. Let $\xi' \to \xi$, $\eta' \to \eta$, ... be in correspondence under (9.1), and let o be any primitive operation of the algebra $\mathfrak{B}$. We have

$$(9.2)\qquad \begin{cases} o(\xi, \eta, \ldots) = \in \mathfrak{B} = \overset{\times\wedge}{\sum_{\alpha,\beta,\ldots \in \mathfrak{V}}} o(\alpha, \beta, \ldots)\, x_\alpha\, y_\beta \ldots \\ o(\xi', \eta', \ldots) = \in \mathfrak{B}', \quad \text{with} \quad [o(\xi', \eta', \ldots)]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum_{o(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}} x_\alpha\, y_\beta \ldots . \end{cases}$$

The sufficiency part of theorem 12 will be proved if we establish that

$$(9.3)\qquad o(\xi', \eta', \ldots) \to o(\xi, \eta, \ldots), \text{ under } (9.1).$$

Now the image of $o(\xi', \eta', \ldots)$ under (9.1) is

$$\overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{V}}} \mu\, [o(\xi', \eta', \ldots)]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{V}}} \mu \left(\overset{\times\wedge}{\sum_{o(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}} (x_\alpha\, y_\beta \ldots) \right)$$

which, on use of condition (2°)—especially part (6.4)—may be written simply

$$\overset{\times\wedge}{\sum_{\alpha,\beta,\ldots \in \mathfrak{V}}} o(\alpha, \beta, \ldots)\, x_\alpha\, y_\beta \ldots .$$

This however is seen to be $o(\xi, \eta, \ldots)$ and therefore (9.3), and with it theorem 12 is established.

Remark. In proving theorem 12 the condition (2°) was used only in the weaker form

(2°)′ (6.2)–(6.4) *of theorem* 9 *are satisfied, with* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *of theorem* 9 *replaced by* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *of* $\mathfrak{B}$.

Furthermore it is easily seen that the uniqueness condition (4°) may be replaced by simpler conditions, e.g., by

$$(4°)'\qquad \begin{cases} \textit{for}\ \ \mu, \nu \in \mathfrak{V};\ \ a \in J,\ a \neq 0\colon\ \ \mu a = \nu a\ \ \textit{implies}\ \ \mu = \nu. \\ \textit{for}\ \ \mu \in \mathfrak{V},\ \mu \neq 0;\ \ a, b \in J\colon\ \ \mu a = \mu b\ \ \textit{implies}\ \ a = b. \end{cases}$$

B. Subdirect Sums. Relation to Boolean Extensions.

10. Normal subdirect sums. Let $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \times \ldots$ be the $\mathfrak{N}^{\text{th}}$ direct sum[5]) of the l-algebra $\mathfrak{U}$, where, in a familiar way, $\mathfrak{N}$ may be chosen of arbitrary cardinality. Let $\mathfrak{A}$ (boldface) be a subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ and let

$$(10.1)\qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{N})$$

be $\in \mathfrak{A}$[6]). In anticipation of an eventual fundamental isomorphism we shall employ the same notation, $\mathfrak{A}$ and α, as in the Boolean extension considerations of part A. However, as above, we use round brackets (,) in connection with

[5]) A more accurate term would be "direct multiple" or "-power".

[6]) Despite the notation in (10.1), neither denumerability nor well ordering is required. See McCoy [6].

subpowers, as opposed to square brackets [,] in the Boolean extension theory. Whenever necessary to avoid ambiguity we shall moreover write

$$(10.2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = (\mathfrak{a}); \quad \mathfrak{A} = (\mathfrak{A}), & \text{(subalgebra of direct sum).} \\ \mathfrak{a} = [\mathfrak{a}]; \quad \mathfrak{A} = [\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}_{[J]} & \text{(Boolean extension).} \end{cases}$$

As heretofore Greek letters (now bold face) continue to denote elements of the ground f-algebra or kernel, $\mathfrak{U}$.

For given $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\mathfrak{a})$, called the μth *projection* of $\mathfrak{a}$, is defined as the direct (Cartesian) vector, $\mathfrak{b}$, determined by

$$P_\mu(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mathfrak{N}})$$
$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta_i = \mu \\ 0 & \text{if} \quad \beta_i \neq \mu \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}).$$

In general of course $P_\mu(\mathfrak{a}) \notin \mathfrak{A}$ for $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ = subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

In preparation for a subsequent dovetailing with the condition on J (§ 3), we shall define the concept *normal subdirect sum* in two parts:

Definition. (i) If $\mathfrak{U}$ is a finite f-algebra, a subalgebra $\mathfrak{A}$ of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is called *normal*, or, more correctly, a *normal subdirect sum* of $\mathfrak{U}$, if (1°) $\mathfrak{A}$ contains all "scalars", i.e., elements of the form $(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu)$, $\mu \in \mathfrak{U}$ and (2°) for $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ and for $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{A}$.

(ii) If $\mathfrak{U}$ is an infinite f-algebra a subalgebra $\mathfrak{A}$ of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is called *normal* if and only if it is a direct sum, $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. [In this case, (ii), (1°) and (2°) above are obviously satisfied.]

While $\mathfrak{U}$ is a special case of a subdirect sum of $\mathfrak{U}$ (with $\mathfrak{N} = 1$), on account of (1°) no proper subalgebra of $\mathfrak{U}$ is a *normal* subdirect sum of $\mathfrak{U}$.

11. (Direct) imbedding of $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A}$; (direct) extension of functions. Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of a direct sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$. It follows from the pertinent definitions that each *strict* $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ *(directly) extends* to a $\mathfrak{A}$-function $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$; here, if $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mathfrak{N}})$, $\mathfrak{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\mathfrak{N}}), \ldots$ are variables over $\mathfrak{A}$,

$$(11.1)\qquad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = \text{def.} = \big(f(\xi_1, \eta_1, \ldots),\ f(\xi_2, \eta_2, \ldots), \ldots\big).$$

In case $\mathfrak{A}$ satisfies (1°) of § 10—in particular, if $\mathfrak{A}$ is normal—then the class $\mathfrak{U}_1$ of all scalars $(\mu, \mu, \ldots, \mu)$ forms a subalgebra of $\mathfrak{A}$ which is isomorphic with the kernel $\mathfrak{U}$. We call $\mathfrak{U}_1$ the *(direct) regular* subalgebra, or the *(direct) kernel* of $\mathfrak{A}$ and shall hereafter *identify* it with $\mathfrak{U}$,

$$(11.2)\qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 = \text{kernel of } \mathfrak{A},\ \mu = (\mu, \mu, \ldots, \mu),\ \mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}.$$

From this and the definition of $\mathfrak{U}$-function follows

Theorem 13. *If $\mathfrak{A}$ is a normal subdirect sum of the f-algebra, $\mathfrak{U}$, then $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ and the (direct) extension of each $\mathfrak{U}$-function is a $\mathfrak{A}$-function.*

For instance if $\mathfrak{A}$ is normal, the $\mathfrak{U}$-function $\beta(\xi\,\eta)$, (β = constant), extends to $\beta(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = (\beta, \beta, \ldots, \beta)\ (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$.

12. The regular Boolean subalgebra. With reference to Theorem 13 it is further evident that a $0\leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$ permutation, $^\wedge$, (directly) extends to a $0\leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation. We then have

Theorem 14. *Let* $\mathfrak{U}=(U,\times,o,\ldots)$, $\mathfrak{U}=(U,\times,o,\ldots)$ *be as in Theorem* 13, *and let* $\mathcal{U}=(U,\times,{}^\wedge,{}^\vee)$ *be a frame of* $\mathfrak{U}$. *Then* $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra, with* $\mathfrak{U}=(\mathbf{U},\times,{}^\wedge,{}^\vee)$ *as a frame.*

Let us call an arbitrary but fixed frame $\mathcal{U}$ *the* frame of $\mathfrak{U}$, and its direct extension $\mathfrak{U}$ (Theorem 14) *the* frame of $\mathfrak{U}$. As elsewhere, a subalgebra of $\mathfrak{U}$ we call a sub*frame* of $\mathfrak{U}$, or of $\mathfrak{U}$.

Let now $J=J(\mathfrak{U})$ denote the class of all 0- or -1 elements of $\mathfrak{U}$: $a\in J$ if and only if $a\in\mathfrak{U}$ and

$$a=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mathfrak{R}),\quad\text{where}\quad\theta_i=0\text{ or }1,\quad(i=1,2,\ldots,\mathfrak{R}).$$

Theorem 15. $(J,\times,{}^\wedge,{}^\vee)$ *is a Boolean algebra,—a subframe of* $\mathfrak{U}$, *with* $a\times b$ *as Boolean intersection and* $a^\wedge=a^\vee$ *as Boolean complement,* $(a,b\in J)$.

Proof. From the definition of J, J is clearly closed with respect to the operations $\times$ and $^\wedge$, and hence also with respect to $\times_\wedge$, (5.8). Furthermore, the following definitive Boolean properties are easily verified: for $a,b,c\in J$,

$$\begin{aligned}
&ab=ba,\qquad a(bc)=(ab)c\\
&a^2=a,\qquad a^\wedge=a^\vee,\qquad a^{\wedge\wedge}=a\\
&a\times_\wedge b=b\times_\wedge a,\qquad(a\times_\wedge b)\times_\wedge c=a\times_\wedge(b\times_\wedge c)\\
&c(a\times_\wedge b)=ca\times_\wedge cb\\
&c\times_\wedge ab=(c\times_\wedge a)(c\times_\wedge b)\\
&0,1\in J,\qquad 0^\wedge=1.
\end{aligned}$$

This proves the theorem.

We further observe that the Boolean algebra J is *absolute* in the sense: if $^{\wedge'}$ is any other $0\leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation and if $\mathcal{U}'=(U,\times,{}^{\wedge'},{}^{\vee'})$, $\mathfrak{U}'=(\mathbf{U},\times,{}^{\wedge'},{}^{\vee'})$ are the corresponding frames and $J'=(J',\times,{}^{\wedge'})$ the corresponding Boolean sub-frame, then the Boolean algebras are identical, $J=J'$, $a^\wedge=a^{\wedge'}$, $(a\in J=J')$. We call $(J,\times,{}^\wedge)$ the *(direct) regular sub-frame*, also the *regular (sub-) Boolean algebra*, or the *(direct) core* of $\mathfrak{U}$. In particular we note that the regular Boolean algebra of $\mathfrak{U}$ (*qua* normal subdirect sum of itself) is simply the 2-element algebra $\{0,1\}$.

Summarizing, we have proved

Theorem 16. *[(Direct) regular imbedding theorem.] A normal subdirect sum* $\mathfrak{U}$ *of an f-algebra* $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra in which* $\mathfrak{U}$ *is (isomorphically) imbedded as the regular subalgebra, and in which the regular Boolean algebra* $J=J(\mathfrak{U})$ *is a sub-frame.*

13. The fundamental equivalence. We shall now prove that the Boolean extension- and the normal subdirect sum-theories are mathematically equivalent.

Theorem 17. *Fundamental equivalence theorem. The class of all Boolean extensions of an f-algebra, $\mathfrak{U}$, is coextensive, up to isomorphisms, with the class of all normal subdirect sums of $\mathfrak{U}$.*

Proof. We must establish (I): Given an f-algebra, $\mathfrak{U}$, and a Boolean algebra, J, there exists a normal subdirect sum $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A}_{[J]} \cong \mathfrak{A}$, and conversely, (II): Given a normal subdirect sum, $\mathfrak{A}$, there exists a Boolean algebra, J, such that $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_{[J]}$.

Proof of (I). J may always be imbedded in a complete Boolean algebra J', $J \leqq J'$, where J and J' have the same null and universe elements. Let J' possess $\mathfrak{N}$ atoms $e_1, e_2, \ldots, e_{\mathfrak{N}}$[7]). We consider a mapping of the elements of $\mathfrak{A}_{[J]}$ onto a subset of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$,

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \to \mathfrak{a} = (\mathfrak{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}}), \tag{13.1}$$

where the components of $(\mathfrak{a})$ are defined by:

$$\alpha_i = \mu \quad \text{if} \quad e_i < a_\mu, \qquad (1 \leqq i \leqq \mathfrak{N}). \tag{13.1}$$

In words: α_i is that index $\mu\,(\in \mathfrak{U})$ such that a_μ includes the atom e_i.

Let (13.1) be called the *fundamental* mapping, and let $\mathfrak{A}$ denote the class of all images under the mapping,

$$\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}.$$

We shall establish that $\mathfrak{A}$ has the properties required in (I).

Lemma 1. *The fundamental mapping* (13.1) *is* $1-1$ *between* $\mathfrak{A}_{[J]}$ *and* $\mathfrak{A}$.

Proof. Let $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$, $[\mathfrak{b}] \to (\mathfrak{b})$ under (13.1). Then for each $\mu \in \mathfrak{U}$, a_μ and b_μ include precisely the same atoms of J'. Since J' is complete this implies $a_\mu = b_\mu$ and hence $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}]$. This establishes the Lemma.

Let now $o = o(\xi, \eta, \ldots)$ be any primitive operation of the algebra $\mathfrak{U}$, $o(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$—also written $o([\mathfrak{x}], [\mathfrak{y}], \ldots)$—its J-extension, and $o(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$—also written $o((\mathfrak{x}), (\mathfrak{y}), \ldots)$—its direct extension to $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

Lemma 2. *The fundamental mapping is preserved under all primitive operations o of $\mathfrak{U}$: under* (13.1), *if* $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$, $[\mathfrak{b}] \to (\mathfrak{b})$, ... *then*

$$o([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}], \ldots) \to o((\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), \ldots). \tag{13.2}$$

Proof. $o([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}], \ldots) \in \mathfrak{A}_{[J]}$, and under (13.1) let

$$o([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}], \ldots) \to (\mathfrak{t}) = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_{\mathfrak{N}}). \tag{13.3}$$

Here for each index i, $(1 \leqq i \leqq \mathfrak{N})$, the ith components of $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, ... and $(\mathfrak{t})$ are given by

$$\alpha_i = \mu, \quad \text{where} \quad e_i < a_\mu \tag{13.4}$$

$$\begin{cases} \beta_i = \nu & \text{where} \quad e_i < b_\nu \\ \vdots & \\ \tau_i = \sigma & \text{where} \quad e_i < \overset{\times\Lambda}{\sum\limits_{o(\xi,\eta,\ldots)=\sigma}} (a_\xi b_\eta \ldots). \end{cases} \tag{13.5}$$

[7]) As earlier, in connection with direct sums, despite the notation, $\mathfrak{N}$ may be of arbitrary cardinality; moreover no well ordering of the set $\{I_i\}$ of atoms is required.

For given i the atom e_i is included in exactly one of the components of $[\alpha]$, say a_μ, and in exactly one of the components of $[\beta]$, say $b_\nu, \ldots$ and hence in their intersection $a_\mu b_\nu \ldots$. We may then rewrite (13.5) in the form

(13.5)′ $\qquad \tau_i = \sigma, \quad$ where $\quad \sigma = o(\mu, \nu, \ldots) \quad$ and $\quad e_i < a_\mu b_\nu \ldots .$

Consider now the ith (direct) component of $o((\alpha), (\beta), \ldots)$,

(13.6). $\qquad o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = o(\alpha_i, \beta_i, \ldots).$

By (13.4) we have

(13.7) $$\begin{cases} o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = o(\mu, \nu, \ldots), & \text{where} \quad e_i < a_\mu \\ & \qquad\quad e_i < b_\nu \\ & \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

A companion of (13.5)′ and (13.7) then establishes that

(13.8) $$o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = \tau_i$$

which, with (13.3), is the desired result (13.2). This proves the Lemma.

One has the immediate

Corollary. $\mathfrak{U}$, *the image subset of* $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ *under the fundamental mapping* (13.1), *is a subalgebra of* $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

We further establish

Lemma 3. *The image set,* $\mathfrak{U}$, *under* (13.1) *is a normal subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

Proof. We first show that for all $\alpha \in \mathfrak{U}$ and for all $\mu \in \mathfrak{U}$,

(13.9) $$P_\mu(\alpha) \in \mathfrak{U},$$

where $P_\mu(\alpha)$ is the μth projection of $\alpha = (\alpha)$. Let $(\alpha) \in \mathfrak{U}$ and let $[\alpha]$ be its preimage under (13.1); $[\alpha]$ is unique by Lemma 1,

$$[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \leftrightarrow (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}}).$$

Choose $\mu \in \mathfrak{U}$. Suppose (case 1) some i exists such that $\alpha_i = \mu$. By (13.1) we have

(13.10) $$\begin{cases} e_i < a_\mu \\ e_{i'} < a_\mu \quad \text{if and only if} \quad \alpha_i = \alpha_{i'}. \end{cases}$$

From (13.10), for the element $[a_\mu^*, a_\mu, 0, \ldots, 0, \ldots]$ of $\mathfrak{U}_{[J]}$,

$$[a_\mu^*, a_\mu, 0, \ldots, 0, \ldots] \to P_\mu(\alpha).$$

Hence $P_\mu(\alpha) \in \mathfrak{U}$. If (case 2) no i exists such that $\alpha_i = \mu$, then, from the definition of projection we have

$$P_\mu(\alpha) = 0 \qquad (= (0, 0, \ldots, 0, \ldots)).$$

But in this case, by forward reference to (13.10′) below, $P_\mu(\alpha)$ is again $\in \mathfrak{U}$. Hence, in any event, we have established (13.9).

Secondly we observe that all scalars, i.e., elements of the form $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ are $\in \mathfrak{U}$, since $\mathfrak{l}_\alpha = [0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots]$, ($\alpha^{\text{th}}$ component $= 1$) is $\in \mathfrak{U}_{[J]}$, and clearly, under (13.1)

$$\mathfrak{l}_\alpha \to (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha). \tag{13.10'}$$

For the case where the ground algebra or kernel, $\mathfrak{U}$, is finite, the proof of Lemma 3 is now complete; for the case where $\mathfrak{U}$ is an infinite algebra the proof is complete by forward reference to

Lemma 4. *If $\mathfrak{U}$ is an infinite f-algebra its image set, $\mathfrak{A}$, under the fundamental mapping (13.1) is a direct sum, $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.*

Proof. If $\mathfrak{U}$ is infinite, from the definition of $\mathfrak{A}_{[J]}$, J must be a complete Boolean algebra (§ 3). Let $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{N})$ be any element of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. We shall exhibit an $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}] = \in \mathfrak{A}_{[J]}$ such that $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$ under (13.1).

In the foregoing terminology (with $J = J'$, since J is now already complete), let $[\mathfrak{a}] = [\ldots, a_\mu, \ldots]$ be defined by

$$a_\mu = \sum_{\mathfrak{a}_i = \mu}^{\times\wedge} e_i, \tag{13.11}$$

that is: a_μ is the union of all atoms e_i of J for which $\mathfrak{a}_i = \mu$. Here $a_\mu \in J$, since J is complete. Moreover the a_μ of (13.11) are pairwise disjoint and cover J,

$$a_\mu a_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} a_\mu = 1. \tag{13.12}$$

Hence these a_μ define an $\in \mathfrak{A}_{[J]}$ and, as apparent, $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$ under (13.1). This proves Lemma 4, and with it also completes the proof of part I of Theorem 17.

Proof of part II of Theorem 17. Let now $\mathfrak{A}$ be a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ and let $J = J(\mathfrak{A})$ be its regular Boolean subalgebra § 12. With this choice of J we show that

$$\mathfrak{A}_{[J]} \cong \mathfrak{A}. \tag{13.13}$$

With each $\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}) \in \mathfrak{A}$, let correspond an $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}] \in \mathfrak{A}_{[J]}$ defined by

$$\begin{cases} (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{N}) \to [\mathfrak{a}] = [\ldots, a_\mu, \ldots] \\ \qquad \text{where } a_\mu = P_\mu\big((\mathfrak{a})\big),\ \mu \in \mathfrak{U}. \end{cases} \tag{13.14}$$

These a_μ clearly define a J-partition vector $[\mathfrak{a}]$, since the a_μ are seen to satisfy (13.12). (Note that $\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} a_\mu$ always exists since, in case $\mathfrak{U}$ is infinite, $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, by Lemma 4, from which follows that $J = J(\mathfrak{A})$ is complete.)

The correspondence (13.14) is $1-1$ between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}_{[J]}$ where (bearing in mind that each $a \in J$ is also a particular $\in \mathfrak{A}$) the inverse of (13.14) is seen to be

$$\begin{cases} [\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a}), \quad \text{where } \mathfrak{a}_i = \sigma, \\ \text{with } \sigma \text{ determined by } P_\sigma\big((\mathfrak{a})\big) = a_\sigma, \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}). \end{cases} \tag{13.15}$$

There remains to establish that the 1 — 1 correspondence (13.14) is operation preserving, namely that: for each primitive operation o of $\mathfrak{U}$, if under (13.14)

$$(\alpha) \to [\alpha], \quad (\beta) \to [\beta], \ldots$$

then also $o((\alpha), (\beta), \ldots) \to o([\alpha], [\beta], \ldots)$. The proof of this is similar to the corresponding one of Lemma 1 and will here be omitted. This completes the proof of part II, and with it the proof of Theorem 17.

In proving Theorem 17 we have also demonstrated

Theorem 18. *In the fundamental isomorphism $\mathfrak{U}_{[J]} \cong \mathfrak{U}$ given by Theorem 17, if $[\alpha] = [\ldots, a_\mu, \ldots] \leftrightarrow (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{R})$, then*

$$a_\mu \leftrightarrow P_\mu((\alpha)). \tag{13.16}$$

In particular the regular sub Boolean algebras (J-extension—and direct—) are in fundamental correspondence, and similarly for the regular subalgebras,

$$\begin{cases} J \cong J(\mathfrak{U}) \\ 1_\alpha \leftrightarrow (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha). \end{cases} \tag{13.17}$$

14. Immediate Consequences. By means of Theorems 17 and 18 we may translate all results of the J-extension theory to normal subdirect form and conversely. For instance, in connection with Theorem 11 we have

Theorem 19. *Let $\mathfrak{U}$ be a normal subdirect sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$, and let $f(\xi, \eta, \ldots)$ be any $\mathfrak{U}$-function. Then, with $^\wedge$, $\times_\wedge$ referring to any $\mathfrak{U}$-frame,*

$$P_\mu(f(\xi, \eta, \ldots)) = \sum_{f(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}^{\times_\wedge} P_\alpha(\xi)\, P_\beta(\eta) \ldots$$

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha,\beta,\ldots \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, P_\alpha(\xi)\, P_\beta(\eta) \ldots$$

($\mathfrak{U}$ = *regular subalgebra* of $\mathfrak{U}$).

Again Theorem 9 is easily restated in normal subdirect form.

Theorem 20. *Let $\mathfrak{U}$ be a normal subdirect sum of the f-algebra, $\mathfrak{U}$, and identify J and $\mathfrak{U}$ with the (direct) core (§ 12) and (direct) kernel of $\mathfrak{U}$ (§ 11). Then (6.2), (6.3), (6.4 of Theorem 9 hold.*

Theorem 21. *Let $\mathfrak{U}$ be a normal subdirect sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$. A necessary and sufficient condition for $\mathfrak{U}$ to be a direct sum of $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{R})}$, is that the Boolean core of $\mathfrak{U}$ be complete.*

Proof. The necessity is obvious. The sufficiency follows, since if J is complete $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\mathfrak{R}) \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{R})}$, then $P_\mu(\eta) \in \mathfrak{U}$. Hence $\eta = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \mu\, P_\mu(\eta) \in \mathfrak{U}$.

Since a finite Boolean algebra is necessary complete, we have

Corollary 22. *If $\mathfrak{U}$ is a finite and normal subdirect sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$, then $\mathfrak{U}$ is (isomorphic with) a direct sum of $\mathfrak{U}$. The order of $\mathfrak{U}$ is a power of the order of $\mathfrak{U}$.*

Again, corresponding to the abstract formulation of Theorem 12,

Theorem 23. *Let* $\mathfrak{B}$ *and* $\mathfrak{V}$ *be* f*-algebras. For* $\mathfrak{B}$ *to be a normal subdirect sum of* $\mathfrak{V}$ *it is necessary and sufficient ... etc. as in Theorem* 12.

Related stronger results will be obtained in § 18 for the case of a functionally complete finite kernel.

Remark on Corollary 22. The following example points up the importance of the concept f-algebra as opposed to the broader one of binary algebra. Consider the binary algebra (group with) null $\mathfrak{Z}=(F,\times)=\{0,1,2\}$ belonging to $(F,\times,+)$, the field of 3 elements. Let

$$\boldsymbol{F}=\{(0,0),(1,1),(2,2),(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\}.$$

It is seen that $\mathfrak{Z}=(\boldsymbol{F},\times)$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{Z}$, i.e., it contains all elements of the form (μ,μ), and with α,β it contains $\alpha\times\beta$ and all $P_\mu(\alpha)$. The Boolean core of $\mathfrak{Z}$ is of course complete. But (compare with Corollary 22) $\mathfrak{Z}$ is not a direct sum of $\mathfrak{Z}$. Since $\mathfrak{Z}$ is not an f-algebra this example shows that Corollary 22 need not be true if $\mathfrak{U}$ is merely a binary algebra. [If we replace $\mathfrak{Z}$ by the f-algebra $(F_3,\times,+)$ or by $(F_3,\times,\wedge)$, it is seen that the set $\boldsymbol{F}$ is no longer a normal subdirect sum of (either of) the latter.]

C. $\times_\cap$-sums vs. $\times_\wedge$-sums.

15. $0\to1$ permutations. Let $\mathfrak{U}$ be an f-algebra and let $^\cap$ be a $0\to1$ permutation of U, i.e., one such that $0^\cap=1$. Let $^\cup$ be the inverse of $^\cap$, whence, in particular, $1^\cup=0$. If $\mathfrak{V}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$, or, what is equivalent, a Boolean extension of $\mathfrak{U}$, consider the operations $^\cap$, $^\cup$ extended to $\mathfrak{V}$. By (4.1)

$$(15.1)\qquad \begin{cases} [\xi^\cap]_\mu=\overset{\times_\wedge}{\sum\limits_{\alpha^\cap=\mu}} x_\alpha=x_{\mu^\cup} \\ [\xi^\cup]_\mu=\overset{\times_\wedge}{\sum\limits_{\alpha^\cup=\mu}} x_\alpha=x_{\mu^\cap}. \end{cases}$$

From these, $^\cap$, $^\cup$ are obviously permutations of $\boldsymbol{U}$.

Let $\times_\cap$ be the $^\cap$-transform of $\times$, that is, by (4.1),

$$(15.2)\qquad \xi\times_\cap\eta=(\xi^\cap\times\eta^\cap)^\cup.$$

In particular one has

$$(15.3)\qquad 0\times_\cap\eta=\eta\times_\cap0=0\times_\wedge\eta=\eta\times_\wedge0=\eta.$$

While $\times_\cap$ and $\times_\wedge$ are in general quite unrelated operations, (15.3) is an instance of the following important special case in which these are interchangeable.

Theorem 24. *If* ξ,η *are any* $\in\mathfrak{V}$ *and if* a,b *are disjoint* $\in J$ (= *core of* $\mathfrak{V}$), *then*

$$a\xi\times_\cap b\eta=b\eta\times_\cap a\xi=a\xi\times_\wedge b\eta=b\eta\times_\wedge a\xi.$$

Proof. Using the normal subdirect sum version, let

$$a\,\xi(=\xi\,a)=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i,\ldots)$$
$$b\,\eta(=\eta\,b)=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_i,\ldots).$$

Since $a\,b=0$ it follows that:

(15.4) for each i, either γ_i or $\tau_i=0$.

For such γ_i, τ_i evidently

$$\gamma_i\times_{\cap}\tau_i=(\gamma_i^{\cap}\tau_i^{\cap})^{\cup}=\gamma_i\times_{\wedge}\tau_i=(\gamma_i^{\wedge}\tau_i^{\wedge})^{\vee}.$$

Sin ce

$$a\,\xi\times_{\cap}b\,\eta=((\gamma_1^{\cap}\tau_1^{\cap})^{\cup},\ldots-(\gamma_i^{\cap}\tau_i^{\cap})^{\cup},\ldots)$$

the proof of Theorem 24 is complete.

In view of this we may replace $\times_{\wedge}$ by $\times_{\cap}$ in a normal expansion. That is,

Theorem 25. *If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$, if $f(\xi,\eta,\ldots)$ is any $\mathfrak{U}$-function and if $^{\wedge}$, $^{\cap}$ are the extensions to $\mathfrak{U}$ of a $0\leftrightarrow 1$ respectively of a $0\to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, then*

$$(15.5)\quad f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times^{\wedge}} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times^{\cap}} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots.$$

Remark. An important application of the above Theorem occurs when a binary $\mathfrak{U}$-function, $+$, exists, such that $\mathfrak{U}=(U,\times,+)$ is a ring[8]). By choosing $\xi^{\cap}=1+\xi$ we have

$$(15.6)\qquad \alpha\times_{\cap}\beta=(\alpha^{\cap}\beta^{\cap})^{\cup}=\alpha+\beta-\alpha\,\beta.$$

In particular, if $\alpha\,\beta=0$,

$$(15.7)\qquad \alpha\times_{\cap}\beta=\alpha+\beta.$$

Hence, in this case, we may replace (15.5) by

$$(15.8)\qquad f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{+} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots.$$

This is the situation, for instance, in the case of p-rings, and in p^R-rings (see [11], [12]).

D. Functional Completeness.

16. Characteristic functions. Let $\mathfrak{U}=(U,\dot{\times},o,\ldots)$ be a binary algebra. For $\mu\in\mathfrak{U}$, the μth *characteristic function* $\delta_{\mu}=\delta_{\mu}(\xi)$ and the μth *alternate characteristic function* $\Delta_{\mu}=\Delta_{\mu}(\xi)$ are the U-functions defined by

$$(16.1)\qquad \begin{cases} \delta_{\mu}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi=\mu\\ 0 & \text{if } \xi\neq\mu\end{cases}\\ \Delta_{\mu}(\xi)=\begin{cases}0 & \text{if } \xi=\mu\\ 1 & \text{if } \xi\neq\mu\end{cases}\end{cases}\qquad(\xi\in\mathfrak{U}).$$

[8]) Actually somewhat less is required. We use only that $+$ is associative and commutative, that $\times$ distributes over $+$, that $1+\xi$ is a permutation of U and that $0+\xi=\xi$.

For $\mu = 0$ we write

$$(16.2) \qquad \begin{cases} \delta(\xi) = \delta_0(\xi) = \xi^{\delta} = \text{principal characteristic function} \\ \Delta(\xi) = \Delta_0(\xi) = \xi^{\Delta} = \text{principal alternate function} \end{cases}$$

Let $^{\frown} = \xi^{\frown}$ be a $0 \to 1$ U-permutation (§ 15) and let $^{\smile} = \xi^{\smile}$ denote the inverse permutation.

Theorem 26. *In a binary algebra each principal characteristic function is expressible in terms of the other by the formulas*

$$(16.3) \qquad \xi^{\Delta} = (0^{\smile}\,\xi^{\iota})^{\frown}; \qquad \xi^{\delta} = (0^{\smile}\,\xi^{\Delta})^{\frown}.$$

More generally

$$(16.4) \qquad \Delta_{\mu}(\xi) = (0^{\smile}\,\delta_{\mu}(\xi))^{\frown}; \qquad {}^{\bullet}\delta_{\mu}(\xi) = (0^{\smile}\,\Delta_{\mu}(\xi))^{\frown}.$$

The formulas above are easily verified by (16.1).

By § 2 the $^{\frown}$ and $^{\smile}$ transforms of $\times$ are given by

$$(16.5) \qquad \xi \times_{\frown} \eta = (\xi^{\frown}\,\eta^{\frown})^{\smile}; \qquad \xi \times_{\smile} \eta = (\xi^{\smile}\,\eta^{\smile})^{\frown}.$$

With $^{\frown}$ as a $0 \to 1$ permutation one then has

$$(16.6) \qquad \begin{cases} 0 \times_{\frown} \eta = \eta \times_{\frown} 0 = \eta \\ 1 \times_{\smile} \eta = \eta \times_{\smile} 1 = 1. \end{cases}$$

We shall require the obvious extension of (16.6),

Lemma 5. *If $\sigma, \tau, \ldots$ are $\in \mathfrak{U}$ of which all except possibly one is 0, then the set is completely $\times_{\frown}$-commutative and associative, and we may unambiguously write $\sigma \times_{\frown} \tau \times_{\frown} \ldots$. Similarly if all except possibly one term is 1, the set is $\times$-commutative and completely associative, and we may unambiguously write $\sigma \times \tau \times \ldots$.*

17. Functional completeness. Let $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ now be a finite binary algebra of order $n\,(n \geq 2)$—see § 2. We note, if $\mathfrak{U}$ possesses a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\frown}$, then its inverse, $^{\smile}$, is also such. For, since $\mathfrak{U}$ is finite, for some fixed k, $f^{\frown k} = \xi$, whence $\xi^{\smile} = \xi^{\frown k-1}$. Here $\xi^{\frown k} = (\ldots((\xi^{\frown})^{\frown})\ldots)$, k iterations.

A $0 \to 1$ U-permutation, $^{\frown}$, is called *transitive* if for given $\alpha, \beta \in \mathfrak{U}$ there exists an r such that $\alpha^{\frown r} = \beta$, or, otherwise stated, if for all $\xi \in \mathfrak{U}$: $\xi^{\frown n} = \xi$, $\xi^{\frown n'} \neq \xi$ for $n' < n =$ order of $\mathfrak{U}$.

Theorem 27. *Let $\mathfrak{U}$ be a finite binary algebra. Each of the following conditions is sufficient (and obviously necessary) to insure that $\mathfrak{U}$ is functionally complete:*

(1°) *Each $\delta_{\mu}(\xi)$, $(\mu \in \mathfrak{U})$, be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\frown}$.*

(2°) *Each $\Delta_{\mu}(\xi)$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\frown}$.*

(3°) *$\delta(\xi)$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation.*

(4°) *$\Delta(\xi$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation.*

Proof. Consider (1°). We have the identity

$$f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times\cap} f(\alpha,\beta,\ldots)\,(\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots), \tag{17.1}$$

where $f(\xi,\eta,\ldots)$ is any U-function, and where Lemma 5 is employed. Under the hypothesis of (1°) the right of (16.1) is a $\mathfrak{U}$-function, and (1°) is proved.

(2°) follows by application of (16.4) to (17.1). Finally we have, if $\cap$ is a transitive $0\to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation,

$$\begin{cases}\delta_\mu(\xi)=\delta(\xi^{\cap r})\\ \Delta_\mu(\xi)=\Delta(\xi^{\cap r})\end{cases} \tag{17.2}$$

where r is determined by

$$\mu^{\cap r}=0.$$

Hence (3°) and (4°) follow on application of (17.2) to (1°) and (2°). This proves Theorem 27.

Theorem 28. *Let $\mathfrak{U}$ be a finite binary algebra. If $\delta(\xi)$, or if $\Delta(\xi)$ is expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and if there exists a strict transitive $0\to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $\cap$, then $\mathfrak{U}$ is functionally strictly complete.*

Proof. Let $\mathfrak{U}$ be of order n. For an $\cap$ as postulated,

$$\left(\ldots\left(\left(\left(\xi\,\xi^{\cap}\right)\xi^{\cap 2}\right)\xi^{\cap 3}\right)\ldots\xi^{\cap n-1}\right)=0,\qquad(\xi\in\mathfrak{U}). \tag{17.3}$$

Since $0, 0^{\cap}(=1), 0^{\cap 2},\ldots, 0^{\cap n-1}$ are the elements of $\mathfrak{U}$ (in some order), it follows that any fixed element α of $\mathfrak{U}$ can be represented by a strict $\mathfrak{U}$-function, $f(\xi)=\alpha$. Therefore; in particular, $\delta(\xi)$ and $\Delta(\xi)$ can also be represented as strict $\mathfrak{U}$-functions, simply by replacing any constant which might occur in the $\mathfrak{U}$-function expressions by corresponding strict $\mathfrak{U}$-functions. The proof is then complete, by Theorem 27.

18. Special complete binary algebras. By a *group with null*, $(G,\times)$, we mean simply a group augmented by a null-element, 0, satisfying $0\times g=g\times 0=0$, $(g\in G)$. If $(G,\times)$ is finite, of order n, the "corresponding" group $(=G$ less $0)$ is of order $n-1$. A group with null is of couse a special type of binary algebra.

Theorem 29. *Let $(G,\times)$ be a group with null of order n, and let*

$$0, 1, g_2, g_3,\ldots, g_{n-1} \tag{18.1}$$

be any arrangement of its elements. If the (transitive $0\to 1$) G-permutation, $\cap$, is defined accordingly, i.e.,

$$0^{\cap}=1,\quad 1^{\cap}=g_2,\quad g_2^{\cap}=g_3,\ldots,g_{n-1}^{\cap}=0$$

then $\mathcal{G}=(G,\times)$, is strictly complete.

Proof. We have

$$\Delta(g)=g^{n-1},\qquad(g\in\mathcal{G}). \tag{18.2}$$

Since this is a strict $\mathcal{G}$-function, and since $\cap$ is also strict, the proof follows from Theorem 28.

We supply proof of the following two familiar theorems on fields:

Theorem 30. $\mathfrak{J}_p = (F_p, \times, +)$, *the field of residues mod* p, *is functionally complete.*

Proof. $(F_p, \times)$ is here a group with null, and since a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{J}_p$-permutation exists, for instance

$$\chi^\frown = 1 + \chi, \tag{18.3}$$

the Theorem follows from Theorem 27 and (18.2).

Theorem 31. $\mathfrak{J}_{p^k} = (F_{p^k}, +, \times)$, *the Galois field of* p^k *elements, is functionally complete.*

Proof. $(F_{p^k}, \times)$ is again a group with null. Let λ be a multiplicative generator. Then

$$0, 1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p^k-2} \tag{18.4}$$

are the elements of $\mathfrak{J}_{p^k}$, in some order. The cyclic permutation

$$0^\frown = 1, \quad 1^\frown = \lambda, \ldots, (\lambda^{p^k-2})^\frown = 0 \tag{18.5}$$

corresponding to (18.4) is of course transitive and $0 \to 1$, and is expressible as an $\mathfrak{J}_{p^k}$-function by (compare with [*12*]),

$$\chi^\frown = \lambda\chi + 1 + \lambda\chi + \lambda^2\chi^2 + \lambda^3\chi^3 + \cdots + \lambda^{p^k-2}\chi^{p^k-2}, \qquad (\chi \in \mathfrak{J}_{p^k}). \tag{18.6}$$

The proof then follows, again by Theorem 27 and (18.2).

Remark. While $\mathfrak{J}_p = (F_p, \times, +)$ is functionally complete it is not *strictly* complete, since it may be shown that the constant 1 cannot be expressed as a strict $\times, +$ function. In $\mathfrak{J}_{p^k}$ a similar remark applies to the generator λ. With $\times, ^\frown$ taken as primitive operations, both $(F_p, \times, ^\frown)$ and $(F_{p^k}, \times, ^\frown)$ are strictly complete.

It is further noteworthy (see [*12*]) that (18.6) and (18.3) are rivals, even when $k = 1$; exceptions are $p = 2$ and $p = 3$, in which cases—with $k = 1$—(18.6) reduces to (18.3).

The system $(F_{p^k}, \times, ^\frown)$, with $^\frown$ now *defined* as the cyclic permutation (18.5) rather than by (18.6), leads to a strictly multiplicative theory of (finite) fields. This is further related to the theory of ring-logics etc., for which [*12*] and the references there cited may be consulted.

The p^k-field (= Galois field) may be extended in a natural manner to an "n-field". Let n $(n \geq 2)$ be any integer, and let $F_n, \times)$ be the cyclic group with null, of order n (i.e., with the cyclic group of order $n-1$ as corresponding group). Let λ be a generator, whence the elements of F_n, in same order, are given by

$$0, 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{n-2} \qquad (\lambda^{n-1} = 1). \tag{18.7}$$

Let $\frown = \frown(\lambda)$ be defined correspondingly,

$$0^\frown = 1, \quad 1^\frown = \lambda, \ldots, (\lambda^{n-2})^\frown = 0. \tag{18.8}$$

By analogy with $(F_{p^k}, \times^{\frown},)$ let us call $(F_n, \times, ^{\frown})$ the *n-field*. From Theorem 29 we then have

Theorem 32. *The n-field* $(F_n, \times, ^{\frown})$ *is a strictly complete binary algebra.*

A study of n-fields is hardly germane to the trend of the present paper and is reserved for a subsequent communication.

Theorem 33. *Let* $(A, \times)$ *be a finite binary algebra in which the product of its non-null elements, in some order and association,* $\neq 0$. *Then there exists a transitive* $0 \to 1$ *permutation,* $^{\frown}$, *of* A *such that* $\mathfrak{A} = (A, \times, ^{\frown})$ *is a strictly complete binary algebra.*

Proof. Let

$$0, 1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1} \tag{18.9}$$

be the elements of A. We shall prove the theorem under the assumption that the following association $\neq 0$,

$$\left(\ldots\left(\left(\left(1 \times b_2\right) b_3\right) b_4\right) \ldots b_{n-1}\right) = b_k \neq 0. \tag{18.10}$$

The argument below may be modified in an obvious way in case the product of $1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ in some other association $\neq 0$.

Case 1, $b_k = 1$. Let $^{\frown}$ be defined by the ordering (18.9), i.e., let

$$0^{\frown} = 1, \qquad 1^{\frown} = b_2, \ldots, b_{n-1}^{\frown} = 0. \tag{18.11}$$

One then verifies the identity,

$$\left(\ldots\left(\left(x^{\frown} x^{\frown 2}\right) x^{\frown 3}\right) \ldots\right) x^{\frown n-1} = \delta(x),$$

from which the theorem follows, by Theorem 28.

Case 2, $b_k \neq 1$. Let $^{\frown}$ now be defined by the ordering

$$0, 1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{n-1}, b_k. \tag{18.12}$$

That is, let

$$0^{\frown} = 1, 1^{\frown} = b_2, \ldots, b_{k-1}^{\frown} = b_{k+1}, \ldots, b_{n-1}^{\frown} = b_k, b_k^{\frown} = 0. \tag{18.13}$$

Here one verifies the identity,

$$\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\ldots\left(\left(x^{\frown} x^{\frown 2}\right) x^{\frown 3}\right) \ldots x^{\frown k-1}\right) x^{\frown n-1}\right) x^{\frown k}\right) x^{\frown k+1}\right) \ldots\right) x^{\frown n-2}\right)^{\frown} = \Delta(x). \tag{18.14}$$

The theorem then again follows, from Theorem 28.

As in the case of rings, $a \neq 0$ and $b \neq 0$ such that $a\,b = 0$ are called 0-divisors of $(A, \times)$. Theorem 11 has the immediate

Corollary 34. *Let* $(A, \times)$ *be a binary algebra without 0-divisors. Then there exists a* $0 \to 1$ *A-permutation,* $^{\frown}$, *such that* $(A, \times, ^{\frown})$ *is functionally strictly complete.*

We shall conclude this section with a proof of the completeness of the basic Post algebra (compare with [14]). Let P_n be a class of $n\,(\geq 2)$ elements

which we order sequentially with the "least" being denoted by 0 and the "greatest" by 1,

$$0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_3, a_2, 1. \tag{18.15}$$

Let $x \times y \,(= x\,y) = \min(x, y)$ the minimum of x, y, and let $^\frown$ be defined by

$$0^\frown = 1, 1^\frown = a_2, a_2^\frown = a_3, \ldots, a_{n-1}^\frown = 0, \tag{18.16}$$

or, if one prefers, by

$$a_i^\frown = a_{i+1 (\mathrm{mod}\, n)}, \qquad (\text{with } 0 = a_0, 1 = a_1). \tag{18.16}$$

Let us call the binary algebra

$$(P_n, \times, ^\frown)$$

the *basic Post algebra* of order n. We give a proof of the familiar

Theorem 35. *The basic Post algebra $(P_n, \times, ^\frown)$ is functionally strictly complete.*

Proof. The $\times$ of the algebra is associative. One may verify the identity

$$\Delta(x) = (x^\frown x^{\frown 2} x^{\frown 3} \ldots x^{\frown n-1})^\frown, \qquad (x \in P_n),$$

from which the Theorem follows by Theorem 28.

E. Identities.

19. The fundamental theorem on identities. If $\mathfrak{B}$, with elements $\{\ldots, \xi, \ldots\}$ is a universal algebra and $\mathfrak{A}$, with elements $\{\ldots, \xi, \ldots\}$ is a subalgebra there of, then each $\mathfrak{A}$-function $f(\xi, \ldots)$ extends to a $\mathfrak{B}$-function $f(\xi, \ldots)$. While the converse is not generally true, each *strict* $\mathfrak{B}$-function descends, in $\mathfrak{A}$, to a corresponding $\mathfrak{A}$-function.

Further, if

$$f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots) \tag{19.1}$$

is an $\mathfrak{A}$-identity (§ 2) and if $f(\xi, \ldots)$ and $g(\xi, \ldots)$ are the extensions to $\mathfrak{B}$ of the two members of (19.1), then

$$f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots) \tag{19.2}$$

is in general *not* a $\mathfrak{B}$-identity. If however (19.2) is a $\mathfrak{B}$-identity we say that the $\mathfrak{A}$-identity (19.1) *extends* to $\mathfrak{B}$.

Theorem 36. *Let $\mathfrak{B} = (B, \times, o, \ldots) = \{\ldots, \xi, \ldots\}$ be a binary algebra and $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ a subalgebra such that*

(1°) *the 0 and 1 of $\mathfrak{B}$ are $\in \mathfrak{U}$.*

(2°) *$\mathfrak{U}$ is finite and functionally complete.*

(3°) *every $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{B}$.*

Then $\mathfrak{U}$ is an $\mathfrak{f}$-algebra and $\mathfrak{B}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$.

Proof. That $\mathfrak{U}$ is an f-algebra is clear since every functionally complete binary algebra is obviously such,—though not generally conversely. Using (2°), let each of the characteristic functions $\delta(\xi)=\delta_0(\xi)$, $\delta_1(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi), \ldots$ of $\mathfrak{U}$ ($\mu \in \mathfrak{U}$), be expressed in an arbitrary but fixed way as a $\mathfrak{U}$-function; also select an arbitrary but fixed $0 \rightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $\xi^\wedge$, and an arbitrary but fixed transitive $\mathfrak{U}$-permutation, $\xi^\frown$. Let $\delta(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi)$, $\xi^\wedge, \xi^\frown$ be the corresponding $\mathfrak{B}$-functions, i.e., the extensions of $\delta(\xi)$, etc. to $\mathfrak{B}$.

Definition. Let $J=J(\mathfrak{B})$ denote the range of $\delta(\xi)$, i.e.,

$$a \in J \Longleftrightarrow a=\delta(\alpha) \quad \text{for some} \quad \alpha \in \mathfrak{B}. \tag{19.3}$$

Of course $J \subseteqq \mathfrak{B}$.

Lemma 6. *0 and 1 are $\in J$ and $(J, \times, ^\wedge)$ is a Boolean algebra with $\times, ^\wedge$ as intersection and complement.*

Proof. We have

$$0=\delta(1), \qquad 1=\delta(0)$$

whence $0, 1 \in J$. Consider the $\mathfrak{U}$-identities

$$\delta^\wedge(\xi)=\delta(\delta(\xi)) \tag{19.4}$$

$$\delta(\xi)\,\delta(\eta)=\delta(\{\delta(\xi)\,\delta(\eta)\}^\wedge). \tag{19.5}$$

Using (3°), the extension of (19.4) to $\mathfrak{B}$, i.e.,

$$\delta^\wedge(\mathfrak{x})=\delta(\delta(\mathfrak{x}))$$

says that J is closed with respect to $^\wedge$: $a \in J$ implies $a^\wedge \in J$. The extension of (19.5) to $\mathfrak{B}$ then says the same for $\times$: $a, b \in J$ implies $a\,b \in J$. Consider the further $\mathfrak{U}$-identities

$$\begin{cases} \delta(\xi)\,\delta(\eta)=\delta(\eta)\,\delta(\xi) \\ \delta(\xi)\,(\delta(\eta)\,\delta(\varphi))=(\delta(\xi)\,\delta(\eta))\,\delta(\varphi) \\ \delta^{\wedge\wedge}(\xi)=\delta(\xi). \end{cases} \tag{19.6}$$

For $\times_\wedge$, namely

$$\xi \times_\wedge \eta=(\xi^\wedge \eta^\wedge)^\vee$$

we then have the additional $\mathfrak{U}$-identities:

$$\begin{cases} \delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta)=\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi) \\ (\delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta)) \times_\wedge \delta(\varphi)=\delta(\xi) \times_\wedge (\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\varphi)) \\ \delta(\xi)\,(\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\varphi))=\delta(\xi)\,\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi)\,\delta(\varphi). \end{cases} \tag{19.7}$$

The extension of all these to $\mathfrak{B}$ are then $\mathfrak{B}$-identities, by (3°), and these are well known to be definitive for a Boolean algebra. $(J, \times, ^\wedge)$ is then a Boolean algebra, which completes the Lemma.

Lemma 7. *For given $\mu \in \mathfrak{U}$, J is identical with the range of $\delta_\mu(\mathfrak{x})$.*

Proof. We have the $\mathfrak{U}$-identities

$$\begin{cases} \delta(\xi)=\delta_\mu(\xi^{\frown r}) \\ \delta_\mu(\xi)=\delta(\xi^{\frown s}). \end{cases} \tag{19.8}$$

Here r and s are fixed by

$$\mu = 0^{\frown r}$$
$$\mu^{\frown s} = 0.$$

These yield corresponding $\mathfrak{B}$-identities which are readily seen to prove the Lemma.

Let us call $(J, \times, \hat{})$ the *Boolean algebra of* $\mathfrak{B}$ *(determined by* $\mathfrak{U}$*)*.

We list, as Lemma 8, a number of $\mathfrak{B}$-identities obtained from evident corresponding $\mathfrak{U}$-identities, by condition (3°).

Lemma 8.

$$\xi\,\delta(\eta) = \delta(\eta)\,\xi, \quad \textit{equiv.} \quad \xi\,a = a\,\xi \quad (a \in J;\ \xi \in \mathfrak{B}).$$
$$\xi\,\{\delta(\eta)\,\delta(\varphi)\} = \{\xi\,\delta(\eta)\}\,\delta(\varphi), \quad \textit{equiv.} \quad \xi\,(a\,b) = (\xi\,a)\,b, \quad (a, b \in J;\ \xi \in \mathfrak{B}).$$
$$\xi\,(\eta\,\delta(\varphi)) = (\xi\,\eta)\,\delta(\varphi), \quad \textit{equiv.} \quad \xi(\eta\,a) = (\xi\,\eta)\,a, \quad (a \in J;\ \xi, \eta \in \mathfrak{B}).$$

$$(19.9) \qquad \begin{cases} \delta_\alpha(\xi)\,\delta_\alpha(\xi) = \delta_\alpha(\xi) \\ \delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\xi) = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \\ \overset{\times_\wedge}{\sum_{\alpha \in \mathfrak{U}}} \delta_\alpha(\xi) = 1. \end{cases}$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \times_\vee \beta\,\delta_\beta(\xi) = \beta\,\delta_\beta(\xi) \times_\wedge \alpha\,\delta_\alpha(\xi), \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{U};\ \alpha \neq \beta).$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \times_\wedge (\beta\,\delta_\beta(\xi) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\xi)) = (\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \times_\wedge \beta\,\delta_\beta(\xi)) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\xi),$$
$$(\alpha, \beta, \gamma \textit{ all different} \in \mathfrak{U}).$$

Employing the last identity of Lemma 8 we have the further identities, each obtained from condition (3°) and the evident corresponding $\mathfrak{U}$-identity.

Lemma 9.

$$\xi = \overset{\times_\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\,\delta_\mu(\xi).$$

For a strict $\mathfrak{B}$*-function,* o*, in particular, for a primitive operation of the algebra* $\mathfrak{B}$*,*

$$(19.10) \qquad \begin{cases} \delta_\mu(o(\xi, \eta, \ldots)) = \overset{\times_\wedge}{\sum_{o(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}} (\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots), \quad (\mu \in \mathfrak{U}). \\ o(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times_\wedge}{\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}} o(\alpha, \beta, \ldots)\,\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots. \end{cases}$$

Let us now conceive the algebra $\mathfrak{U}$ and the Boolean algebra J of $\mathfrak{B}$ abstractly, and synthesize $\mathfrak{U}_{[J]}$. The elements of $\mathfrak{U}_{[J]}$ are the J-partition vectors

$$[\alpha] = \alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots],$$
$$a_\mu a_\nu = 0\ (\mu \neq \nu), \quad \overset{\times_\wedge}{\sum} a_\mu = 1,$$

and the $\mathfrak{U}$-function, o, extended to $\mathfrak{U}_{[J]}$ has the idempotent components

$$[o(\alpha, \beta, \ldots)]_\mu = \overset{\times_\wedge}{\sum_{o(\sigma, \tau, \ldots) = \mu}} (a_\sigma b_\tau \ldots).$$

We establish the following *basic mapping* of the set $\mathfrak{B}$ into the set $\mathfrak{U}_{[J]}$:

$$(19.11)\qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}_{[J]}\colon\ \xi \to [\xi] = [\delta_0(\xi), \delta_1(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi), \ldots],\quad (\mu \in \mathfrak{U}).$$

By Lemma 8 the $[\delta_0(\xi), \ldots]$ on the right is seen to be $\in \mathfrak{U}_{[J]}$. We next prove

Lemma 10. *The basic mapping* (19.11) *is a homomorphism from the algebra* $\mathfrak{B}$ *onto the algebra* $\mathfrak{U}_{[J]}$.

Proof. We must show that if $\xi \to [\xi]$, $\eta \to [\eta]$, ... under (19.11) then also for each strict function o,

$$o(\xi, \eta, \ldots) \to o([\xi], [\eta], \ldots).$$

This is equivalent to establishing that

$$\delta_\mu(o(\xi, \eta, \ldots)) = \sum_{o(\alpha, \beta, \ldots) \in \mu}^{\times\wedge} \delta_\alpha(\xi)\, \delta_\beta(\eta) \ldots.$$

But this is precisely a result of Lemma 9, and Lemma 10 is established.

Lemma 11. *Let* $[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ *be an element of* $\mathfrak{U}_{[J]}$. *There exists one and only one* $\alpha \in \mathfrak{B}$ *such that* $\alpha \to [\alpha]$ *under* (19.11), *and the basic mapping is an isomorphism* $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{U}_{[J]}$ *between the corresponding algebras. The element* α *is given by*

$$(19.12)\qquad \alpha = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\wedge\wedge} \mu\, a_\mu,$$

and

$$a_\mu = \delta_\mu(\alpha).$$

Proof. Consider first $a = \delta(\alpha) = \in J$, and its image $a \to ?$ under (19.11). By (19.11),

$$(19.13)\qquad a \to [\delta_0(a), \delta_1(a), \ldots, \delta_\mu(a), \ldots] = [\delta_0(\delta(\alpha)), \ldots, \delta_\mu(\delta(\alpha))].$$

Now by extension to $\mathfrak{B}$ of evident corresponding $\mathfrak{U}$-identities we have the $\mathfrak{B}$ identities

$$(19.14)\qquad \begin{cases} \delta(\delta(\xi)) = \delta^\wedge(\xi) \\ \delta_1(\delta(\xi)) = \delta(\xi) \\ \delta_\mu(\delta(\xi)) = 0 \quad (\mu \neq 0, \neq 1). \end{cases}$$

From these and (19.13) it follows that, under (19.11),

$$(19.15)\qquad a\,(= \delta(\alpha)) \to [a^\wedge, a, 0, 0, \ldots].$$

Secondly, under (19.11) for $\alpha \in \mathfrak{U}$ we have

$$\alpha \to [\delta_0(\alpha), \delta_1(\alpha), \ldots, \delta_\mu(\alpha), \ldots],$$

that is,

$$(19.16)\qquad \alpha \to \mathfrak{l}_\alpha = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots], \qquad (1 \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}).$$

Let now $[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ be an arbitrary $\in \mathfrak{U}_{[J]}$. For each a_μ, *qua* $\in \mathfrak{B}$, and for each $\mu \in \mathfrak{U}$, *qua* $\in \mathfrak{B}$, we have shown: under (19.11)

$$a_\mu \to [a_\mu^\wedge, a_\mu, 0, 0, \ldots]; \qquad \mu \to [\ldots, 0, 1, 0, \ldots] = \mathbf{1}_\mu. \tag{19.17}$$

For the element α of $\mathfrak{B}$ given by

$$\alpha = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\, a_\mu \tag{19.18}$$

we thus have from (19.17), (19.18) and Lemma 10: under (19.11)

$$\alpha \to \overset{\times\wedge}{\sum} \mathbf{1}_\mu \times [a_\mu^\wedge, a_\mu, 0, 0, \ldots]. \tag{19.19}$$

The $\overset{\times\wedge}{\sum}$ on the right of (19.19), computed by § 5, reduces simply to $[a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$. Therefore, under (19.11)

$$\alpha \to [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]. \tag{19.20}$$

From the definition of (19.11) it then follows that

$$a_\mu = \delta_\mu(\alpha). \tag{19.21}$$

That α is unique we see as follows. Suppose β to be another $\in \mathfrak{B}$ such that $\beta \to [\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ under (19.11). Then, repeating the above argument for β instead of α, we have

$$\delta_\mu(\beta) = \delta_\mu(\alpha) = a_\mu. \tag{19.22}$$

But from Lemma 9,

$$\beta = \sum \mu\, \delta_\mu(\beta) = \sum \mu\, \delta_\mu(\alpha) = \alpha. \tag{19.23}$$

This completes the proof of Lemma 10.

Since $\mathfrak{U}_{[J]}$ is isomorphic with a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ (Theorem 17), the proof of Theorem 36 is now immediate from Lemma 10.

Remark. If we attempt to weaken the hypothesis of Theorem 36 by omitting the expression "functionally complete" from condition (2°) of the Theorem, one can (in general) no longer conclude that $\mathfrak{B}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$,—indeed one cannot even conclude that $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$. Such counterexamples are readily found, but will not here be exhibited.

A portion of Lemma 11 together with Theorem 36 yields

Theorem 37. *Let* $\mathfrak{B}$ *be a normal subdirect sum (or, equivalently, a Boolean extension) of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *and let*

$$\xi = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\, a_\mu \tag{19.24}$$

be the normal expansion Theorem 11, or (13.16) *of* $\xi \in \mathfrak{B}$. *In case the binary algebra (= kernel)* $\mathfrak{U}$ *is finite and functionally complete, each normal component,* a_μ, *may itself be expressed as a* $\mathfrak{B}$*-function of* ξ,

$$a_\mu = \delta_\mu(\xi). \tag{19.25}$$

Here the $\mathfrak{U}$-function $\delta_\mu(\xi)$ is simply the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ of $\mathfrak{U}$, i.e., express $\delta_\mu(\xi)$ as a $\mathfrak{U}$-function, and then replace ξ by ξ. By § 15 we may further replace $\times_\Lambda$ by $\times_\cap$ in the normal expansion of ξ or of any $\mathfrak{U}$-function, f,

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times_\cap}{\sum} f(\alpha, \beta, \ldots)\, \delta_\alpha(\xi)\, \delta_\beta(\eta) \ldots . \tag{19.26}$$

Bibliography.

[1] STONE, M. H.: The theory of representations of Boolean algebras. Trans Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936). — [2] BIRKHOFF, G.: Subdirect unions in universal algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 764—768 (1944). — [3] McCOY, N. H.: Subrings of direct sums. Amer. J. Math. **60**, 374—382 (1938). — [4] McCOY, N. H.: Subrings of infinite direct sums. Duke Math. J. **4**, 486—494 (1938). — [5] McCOY, N. H.: Subdirectly irreducible commutative rings. Duke Math. J. **12**, 381—387 (1945). — [6] McCOY, N. H.: Subdirect sums of rings. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 856—877 (1947). — [7] McCOY, N. H., and DEANE MONTGOMERY: A representation of generalized Boolean rings. Duke Math. J. **3**, 455—459 (1937). — [8] FOSTER, A. L.: On n-ality theories in rings and their logical algebras, including tri-ality principle in three-valued logics. Amer. J. Math. **72**, 101—123 (1950). — [9] FOSTER, A. L.: The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra; ring duality and transformation theory. Duke Math. J. **12**, 143—152 (1945). — [10] FOSTER, A. L.: p-rings and their Boolean-vector representation. Acta math., Stockh. **84**, 231—261 (1950). — [11] FOSTER, A. L.: p-rings and ring-logics. Univ. Calif. Publ. **1**, 385—396 (1951). — [12] FOSTER, A. L.: p^k-rings and ring logics. Ann. Scu. Norm. Pisa **5**, 279—300 (1951). — [13] FOSTER, A. L.: The theory of Boolean-like rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 166—187 (1946). — [14] WADE, L. I.: Post algebras and rings. Duke Math. J. **12**, 389—395 (1945). — [15] KRULL, W.: Subdirekte Summendarstellung von Integritatsbereichen. Math. Z. **52** (1950).

University of California, Berkeley, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 16. September 1952.)

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 337—357 (1953)

Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern.

Von
GÜNTER HELLWIG.

Einleitung.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$D[u] \equiv B u + k(x)\{r_1 u_{yy} + r_2 u_y + r_3 u\} = k(x) f(x, y) \tag{1}$$

mit dem Differentialoperator $Bu = -(p(x) u_x)_x + q(x) u$ und machen die folgende

Voraussetzung (I). *y laufe im Intervall $0 \leq y < \infty$. $p(x)$, $\frac{dp(x)}{dx}$, $q(x)$, $k(x)$ reell und stetig; $p > 0$, $k > 0$; alles im Intervall $l \leq x \leq m$. r_1, r_2, r_3; l, m seien irgendwelche Zahlen mit $l < m$, $r_1 > 0$.*

Über $f(x, y)$ werden später Voraussetzungen angegeben.

Die Charakteristiken von (1) werden durch die Differentialgleichung

$$-p(x)\dot{y}^2 + r_1 k(x)\dot{x}^2 = 0, \tag{2}$$

die charakteristischen Richtungen durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{r_1}\sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} \tag{3}$$

gegeben. Wir nennen (1) in einem Punkt (x, y) aus $l \leq x \leq m$, $0 \leq y < \infty$ von *hyperbolischem* bzw. *parabolischem* Typus, wenn dieser Punkt Träger genau zweier verschiedener, reeller charakteristischer Richtungen bzw. Träger genau einer charakteristischen Richtung (3) ist. Nach Voraussetzung (I) ist (1) in $l \leq x \leq m$, $0 \leq y < \infty$ hyperbolisch [1]).

Wir stellen zu (1) noch geeignete Anfangsbedingungen (4) und Randbedingungen (5):

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = u_0(x), \qquad \lim_{y \to 0} u_y(x, y) = u_1(x) \text{ [2]}; \tag{4}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to l} u(x, y) \cos\delta + \lim\limits_{x \to l} u_x(x, y) \sin\delta = 0, \\ \lim\limits_{x \to m} u(x, y) \cos\vartheta + \lim\limits_{x \to m} u_x(x, y) \sin\vartheta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

mit $0 \leq \delta, \vartheta < \pi$.

[1]) Wenn $r_1 = 0$ und $r_2 > 0$ vorausgesetzt wird, so ist (1) in $l \leq x \leq m$, $0 \leq y < \infty$ parabolisch. Dieser Fall kann ebenfalls immer in unseren Betrachtungen zugelassen werden.

[2]) Bei [1]) fällt die zweite Anfangsbedingung weg.

Man sucht nun solche $u(x, y)$, die in $l<x<m$, $0<y<\infty$ zweimal stetig differenzierbar sind, (1) befriedigen und im Sinne eindimensionaler Konvergenz die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllen (vgl. [5][3]), S. 341—42). Solche Problemstellungen enthalten viele Ausgleichsprobleme der mathematischen Physik. Für Existenzfragen ist oft die *Laplace-Transformation* als Hilfsmittel benutzt worden. Für diese Richtung erwähnen wir vor allem G. DOETSCH ([5], Teil V, hier auch vollständiges Literaturverzeichnis bis zum Jahre 1937), sowie R. V. CHURCHILL [2], [3], R. COURANT [4], M. PICONE, M. PLANCHEREL. Verläßt man diese allgemeine Fragestellung und fordert etwa noch, daß die Anfangswerte $u_0(x), u_1(x)$ als Funktionen von x noch die Randbedingungen (5) befriedigen, so sind vollständige Existenzsätze von W. MÄCHLER [8] gegeben worden.

Sobald man die Voraussetzungen (I) verläßt, erheben sich eine Anzahl von offenen Fragen.

Voraussetzung (II). *Es sei* $0 \leq y < \infty$. $p(x), \frac{dp(x)}{dx}, q(x), k(x)$ *reell und stetig*; $p>0, k>0$; *alles im offenen Intervall* $l<x<m$. *Dabei ist* $l=-\infty$ *oder* $m=+\infty$ *oder beides zugleich zugelassen.* r_1, r_2, r_3 *genügen den Voraussetzungen* (*I*).

Unter den Voraussetzungen (II) ist (1) in $0 \leq y < \infty$, $l<x<m$ hyperbolisch. Von Bedeutung erweisen sich die Limites $\lim\limits_{x \to l} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}}$ bzw. $\lim\limits_{x \to m} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}}$, die die charakteristischen Richtungen (3) auf den Rändern festlegen. Existieren sie (der Wert $+\infty$ wird als existierend gezählt), so sind auch auf den Rändern $x=l$, $x=m$ (dabei ist $l=-\infty$ und $m=+\infty$ zugelassen) charakteristische Richtungen vorhanden.

Definition. $x=l$ *heißt ein hyperbolischer Rand, wenn* $\lim\limits_{x \to l} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} = \varkappa$, $0<\varkappa<\infty$; $x=l$ *heißt ein parabolischer Rand, wenn*

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to l} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b)} \quad \lim_{x \to l} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} = \infty$$

ist[4]). *Ist* a) *erfüllt, so nennen wir* $x=l$ *parabolischen Rand und Träger der charakteristischen Spitzen, ist* b) *erfüllt parabolischen Rand und Einhüllende der Charakteristiken. Analoges für* $x=m$.

Aus der großen Anzahl von offenen Fragen wollen wir hier in der Einleitung nur drei besonders wichtige herausgreifen. Wie müssen Rand- und Anfangsbedingungen zu (1) formuliert werden, wenn unter den Voraussetzungen (II) eines der folgenden Vorkommnisse auftritt?

α) Es sei etwa $m=+\infty$ ein hyperbolischer Rand $\left(\text{d.h. } \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} = \varkappa, \; 0<\varkappa<\infty\right)$. Analoges bei den Verhältnissen in [1]). (Diese offene Frage auch

[3]) Durch [ ] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit verwiesen.

[4]) Gleichbedeutend damit ist: Alle Punkte $x=l$, $0 \leq y$ sind Träger genau einer charakteristischen Richtung.

bei G. DOETSCH [5], S. 361.) Bei physikalischen Betrachtungen wird meist als Randbedingung angenommen, daß $u(x, y) \to 0$ für $x \to \infty$. Jedoch wird diese Bedingung oft aus physikalischen Überlegungen gewonnen und ihr mitunter kein präziser Sinn beigelegt.

β) Es sei $x = l$ ein parabolischer Rand. Die Fälle a) und b) werden die zu stellenden Bedingungen ebenfalls beeinflussen.

γ) Auf $x = l$ seien charakteristische Richtungen nicht vorhanden.

Durch eine Voraussetzungsgruppe (IV) werden wir dafür Sorge tragen, daß charakteristische Richtungen auf den Rändern stets vorhanden sind.

Da im voraus nicht abzusehen ist, wie die aufgezählten Vorkommnisse die Formulierung von Rand- und Anfangsbedingungen zu (1) beeinflussen, müssen wir uns einen Weg verschaffen, der uns gestattet, solche „zulässigen" Bedingungen zu formulieren[4a]). Die Gewinnung von Existenzsätzen ist unsere zweite Aufgabe. Dazu dient uns die *Laplace-Transformation*. Für die Existenzsätze werden wir die Überlegungen von W. MÄCHLER [8] verallgemeinern.

Abschnitt I: Formulierung von Rand- und Anfangsbedingungen.

§ 1. Zulässige Rand- und Anfangsbedingungen.

Es sei $s = \xi + i\eta$ ein komplexer Parameter und $u(x, y)$ bei festgehaltenem x eine Funktion von y, für die $\int_0^\infty e^{-sy} u(x, y)\, dy = v(x, s)$ für $s = s_0$ konvergiert. Wir sagen dann, daß v durch Anwendung des *Laplaceschen Operators* $\int_0^\infty e^{-sy}\{\}\, dy$ aus u entstanden ist und schreiben $L\,u = v$. Unter diesen Voraussetzungen folgt bereits, daß $v(x, s)$ in der rechten Halbebene $\xi > \xi_0$ (ξ_0 Realteil von s_0) in s analytisch ist ([5] S. 43, [6] S. 144). Bei entsprechenden Voraussetzungen über u_y, u_{yy} ([5] S. 152, [6] S. 98) gelten dann die Beziehungen

$$L\,u_y = s\,v - \lim_{y \to 0} u(x, y),$$

$$L\,u_{yy} = s^2 v - s \lim_{y \to 0} u(x, y) - \lim_{y \to 0} u_y(x, y)$$

bei festgehaltenem x. Bei geeigneten Voraussetzungen über $v(x, s)$ gewinnt man u aus v durch

$$u = L^{-1} v \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} v(x, s)\, ds, \qquad \xi_1 > \xi_0 \tag{6}$$

zurück ([5] S. 105, [6] S. 259). Dabei muß jedenfalls $v(x, s)$ in einer rechten Halbebene $\xi > \xi_0 > 0$ analytisch in s sein.

Wenden wir die Laplace-Transformation formal auf (1) an und vertauschen die Operatoren L und B, so erhalten wir, wenn wir noch $L\,f = g$ setzen und annehmen, daß $L\,f = g$ sinnvoll ist:

$$\left\{ \begin{aligned} & B\,v + k(x)\{r_1 s^2 + r_2 s + r_3\} v \\ & \quad = k(x)\left\{(r_1 s + r_2) \lim_{y \to 0} u(x, y) + r_1 \lim_{y \to 0} u_y(x, y)\right\} + k(x)\, g(x, s). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

[4a]) *Anmerkung bei der Korrektur:* Vergl. auch die kürzlich erschienene Arbeit von W. FELLER [20].

Die rechte Seite ist uns bekannt, wenn wir die Anfangsbedingungen (4) als gestellt annehmen. Tun wir dies und führen wir die Abkürzungen

$$(8) \qquad -(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) = \lambda, \qquad h = (r_1 s + r_2) u_0(x) + r_1 u_1(x)$$

mit $\lambda = \varrho + i\mu$, sowie den neuen Operator

$$(9) \qquad A v \equiv \frac{1}{k(x)} B v = \frac{1}{k(x)} \{-(p(x) v')' + q(x) v\}, \qquad v' \equiv \frac{dv}{dx},$$

ein, so erhalten wir aus (7)

$$(10) \qquad A v = \lambda v + h + g.$$

Wir nennen die Gesamtheit aller komplexwertigen Funktionen $v(x)$, für die im Sinne von LEBESGUE $\int_l^m |v(x)|^2 k(x)\, dx < \infty$ ausfällt den *Hilbertschen Raum* $\mathfrak{H}$ mit dem inneren Produkt $(v, w) = \int_l^m \overline{v}(x) w(x) k(x)\, dx$ und der Norm $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. $A v = \lambda v$ in (10) stellt ein Eigenwertproblem in $\mathfrak{H}$ dar. Nun ist A nur in einem Teilraum $\mathfrak{W}_\mathrm{I}$ [bei den Voraussetzungen (I)] bzw. $\mathfrak{W}_\mathrm{II}$ [bei (II)] aus $\mathfrak{H}$ erklärbar[5]).

Es ist die Gesamtheit aller $v(x)$ mit

I.) v, v', v'' stetig in $l \leq x \leq m$ (l, m endlich) der Teilraum $\mathfrak{W}_\mathrm{I}$;

II.) v, v', v'' stetig in $l < x < m$ ($l = -\infty$, $m = +\infty$ zugelassen), $\|v\|^2 < \infty$, $\|A v\|^2 < \infty$ der Teilraum $\mathfrak{W}_\mathrm{II}$.

Setzen wir in (10) $g = h = 0$, so können wir sofort für die Funktion $L u = v$ „zulässige Randbedingungen" (Bezeichnung nach K. FRIEDRICHS [7]) angeben: A soll in einem geeigneten Teilraum von $\mathfrak{H}$ genau eine Spektralzerlegung besitzen. Dies ist gewiß der Fall, wenn A in $\widehat{\mathfrak{A}}$ selbstadjungiert ist und dazu genügt, daß A in $\mathfrak{A} < \widehat{\mathfrak{A}}$ wesentlich selbstadjungiert ist. Solche Teilräume $\mathfrak{A}_\mathrm{I}, \mathfrak{A}_\mathrm{II}$ können unter den Voraussetzungen (I), (II) bekanntlich stets angegeben werden [11].

$\mathfrak{A}_\mathrm{I}$: $v \in \mathfrak{W}_\mathrm{I}$ mit $v(l)\cos\delta + v'(l)\sin\delta = 0$, $v(m)\cos\vartheta + v'(m)\sin\vartheta = 0$.

$\mathfrak{A}_\mathrm{II}$: 1. Wenn bei $x = l$, $x = m$ der Grenzpunktfall[6]) vorliegt, so ist $\mathfrak{A}_\mathrm{II} \equiv \mathfrak{W}_\mathrm{II}$.

2. $x = l$, $x = m$, Grenzkreisfall. Wir setzen

$$[w, v]_x = p(x)\{\overline{w}'(x) v(x) - \overline{w}(x) v'(x)\} \quad \text{und} \quad [w, v]_l = \lim_{x \to l} [w, v]_x.$$

---

[5]) Die folgenden Bezeichnungen nach F. RELLICH [11].

[6]) Man sagt nach H. WEYL [15]: Bei $x = l$ liegt der Grenzpunktfall vor, wenn es für jedes reelle oder komplexe λ eine Lösung von $A v = \lambda v$ mit $\int_l^r |v|^2 k\, dx = \infty$ ($l < r < m$) gibt. Bei $x = l$ liegt der Grenzkreisfall vor, wenn für jedes reelle oder komplexe λ alle Lösungen von $A v = \lambda v$ die Eigenschaft haben, daß $\int_l^r |v|^2 k\, dx < \infty$ ist.

$\alpha(x), \beta(x)$ seien nicht identisch verschwindende Lösungen von $Az = iz$ mit $[\alpha, \alpha]_l = 0$, $[\beta, \beta]_m = 0$, $p(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 1$. Es ist dann $\mathfrak{A}_{II}$:

$$v \in \mathfrak{W}_{II} \quad \text{mit} \quad [\alpha, v]_l = 0, \quad [\beta, v]_m = 0.$$

3. $x = l$ Grenzkreisfall, $x = m$ Grenzpunktfall. α sei Lösung von $Az = iz$ mit $[\alpha, \alpha]_l = 0$. $\mathfrak{A}_{II}$; $v \in \mathfrak{W}_{II}$ mit $[\alpha, v]_l = 0$.

Wir schreiten zur Auflösung der Gl. (10) und setzen $A - \lambda I \equiv A_\lambda$. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichung $A_\lambda v = j$. Die Gesamtheit aller in $l \leq x \leq m$ (l, m endlich) stetigen Funktionen $j(x)$ sei $\mathfrak{H}'_I$, die Gesamtheit aller in $l < x < m$ ($l = -\infty$, $m = +\infty$ zugelassen) stetigen Funktionen mit $\|j\|^2 < \infty$ sei $\mathfrak{H}'_{II}$. Jedes $v \in \mathfrak{A}_{I,II}$ erlaubt die Darstellung $v = A_\lambda^{-1} j$ mit $j \in \mathfrak{H}'_{I,II}$, wenn $\lambda \in R(\lambda)$ ist. Dabei ist A_λ^{-1} der zu A_λ reziproke Operator. Er existiert und ist ein beschränkter Operator dann und nur dann, wenn $\lambda \in R(\lambda)$. $R(\lambda)$ ist die Resolventenmenge von A, die aus allen Punkten der komplexen λ-Ebene besteht, die nicht zum Spektrum von A gehören (Spektrum = Punktspektrum + kontinuierliches Spektrum + Häufungsspektrum; vgl. [13] S. 129ff.). Für solche λ ist A_λ^{-1} in Form eines Integraloperators, nämlich als Greensche Resolvente darstellbar: $A_\lambda^{-1} j = \int_l^m G(x, t, \lambda)\, k(t)\, j(t)\, dt$. ([13], Kap. X, §3). Ferner ist $v = A_\lambda^{-1} j$ in λ für $\lambda \in R(\lambda)$ analytisch ([13] S. 141, [12] S. 405ff.). Wir machen für das folgende noch die notwendige

Voraussetzung (III). *Es sei A in $\mathfrak{A}_{II}$ halbbeschränkt mit der Schranke a, d.h. $\frac{(v, Av)}{(v, v)} > a$ mit fester Zahl a für alle $v \not\equiv 0$ aus $\mathfrak{A}_{II}$.* Eine gleichbedeutende Formulierung wäre: Das Spektrum von A bleibt oberhalb a[7]).

Da A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert ist, liegt das Spektrum auf der reellen φ-Achse. Nach (III) können höchstens die Punkte $\varphi > a$ der $\lambda = \varphi + i\mu$-Ebene zum Spektrum gehören. Wir ersetzen wieder λ durch $-(r_1 s^2 + r_2 s + r_3)$ [vgl. (8)] und bezeichnen mit A_s^{-1} die Reziproke von $(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) I) v = j$ mit $v \in \mathfrak{A}$. Da $Lu = v$ gesetzt war, so müssen wir nachweisen, wenn die Anwendung der Laplace-Transformation überhaupt sinnvoll sein soll, daß $v(x, s)$ in einer rechten Halbebene analytisch ist. Dazu ist hinreichend, daß alle Punkte $\varphi > a$ der reellen φ-Achse in der $s = \xi + i\eta$-Ebene nicht in eine geeignete rechte Halbebene $\xi > \xi_0$ eindringen. Wir haben

$$(11) \qquad \varphi = -(r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3), \qquad \mu = -\eta (r_2 + 2 \xi r_1).$$

Es ist $\mu = 0$ für $\eta = 0$ oder für $\xi = -\frac{r_2}{2 r_1}$. Durch geeignete Wahl von ξ_0 kann der zweite Fall ausgeschlossen werden. Nun ist $\varphi = -(r_1 \xi^2 + r_2 \xi + r_3)$. Indem wir ξ_0 hinreichend groß wählen, folgt wegen $r_1 > 0$, daß $\varphi < a$ ist. Damit ist

[7]) A in $\mathfrak{A}_I$ ist stets halbbeschränkt.

gezeigt, daß $v(x,s)=A_s^{-1}j$ in einer rechten Halbebene $\xi>\xi_0>0$ analytisch in s ist und A_s^{-1} dort existiert und ein beschränkter Operator ist[8]).

Setzen wir zunächst $g\equiv 0$ in (10) [d.h. $f(x,y)\equiv 0$ in (1)] und $j=h$, so folgt die Bedingung $h\in\mathfrak{H}'_{I,II}$. Dies liefert uns mit (8) sofort

zulässige Anfangsbedingungen für (I): $u_0(x)$, $u_1(x)$ in $l\leq x\leq m$ stetig bei Voraussetzung (I). $u_0(x)$, $u_1(x)$ stetig in $l<x<m$ und $\|u_0(x)\|^2<\infty$, $\|u_1(x)\|^2<\infty$ bei Voraussetzung (II).

Zulässige Randbedingungen zu (1) nennen wir solche, die nach formaler Anwendung der Laplace-Transformation in solche des Teilraumes $\mathfrak{A}$ übergehen. Dabei ist es günstig, daß sich die Randbedingungen nur auf die Variable x beziehen, die ohnehin bei der L-Transformation die Rolle eines Parameters spielt.

Zulässige Randbedingungen für (I):

a) Unter Voraussetzung (I): Randbedingungen der Form (5),

b) unter Voraussetzung (II): 1. $x=l$, $x=m$ Grenzpunktfall[9]*): keine Randbedingungen, 2. $x=l$, $x=m$ Grenzkreisfall: $[\alpha,u]_l=0$, $[\beta,u]_m=0$, 3. $x=l$ Grenzkreisfall, $x=m$ Grenzpunktfall: $[\alpha,u]_l=0$.*

Die Randbedingungen unter der Voraussetzung (II) können noch durch eine weitere Bedingung ergänzt werden. In allen Fällen wird uns formal durch

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}e^{sy}v(x,s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}e^{sy}(A_s^{-1}h)\,ds$$

eine Lösung von (1) mit $f\equiv 0$ unter den obigen Rand- und Anfangsbedingungen gegeben. Nun ist $\|v\|^2<\infty$ in allen Fällen. Wir wollen daher festsetzen, daß die zulässigen Randbedingungen unter Voraussetzung (II) stets durch die weitere zulässige Bedingung $\int_l^m|u(x,y)|^2k(x)\,dx<\infty$ ergänzt werden können. Daß diese Ergänzung durchaus im Wesen der Sache liegt, kann erst in Abschnitt II gezeigt werden.

§ 2. Diskussion der zulässigen Randbedingungen.

Nur wenn auf einen oder beiden Rändern der Grenzkreisfall vorliegt, ist eine Diskussion der zulässigen Randbedingungen notwendig. Es genügt, die Diskussion an einem Ende, etwa $l=0$, durchzuführen. Wir machen die

[8]) Hiermit ist auch die Notwendigkeit für die Voraussetzung (III) dargetan. Sobald das Spektrum von A in der λ-Ebene nach $-\infty$ reicht, gibt es im allgemeinen keine Halbebene mehr, in der $v(x,s)$ analytisch ist. Für den parabolischen Fall ($r_1=0$, $r_2>0$) gilt ganz Analoges. Gleichzeitig erkennen wir, daß es bei elliptischen Differentialgleichungen der Form (1) (dies bedeutet $r_1<0$) im allgemeinen keine rechte Halbebene gibt, in der $v(x,s)$ analytisch ist, auch dann nicht, wenn A halbbeschränkt ist. Wie man auch dann noch, allerdings in sehr einfachen Fällen, die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation erzwingen kann, dazu vgl. man G. DOETSCH [5] S. 378.

[9]) Wir sagen, daß für (1) bei $x=l$ der Grenzkreis- oder Grenzpunktfall vorliegt, wenn in den transformierten Eigenwertproblemen $Av=\lambda v$ der Grenzkreis- oder Grenzpunktfall vorliegt.

Voraussetzung (IV). *Es liegen die Voraussetzungen (II) in* $0<x<m$ *vor und* $l=0$ *sei eine Stelle der Bestimmtheit für alle* λ *bezüglich der Gleichung* $Av=\lambda v$. *Bei* $l=0$ *liege der Grenzkreisfall vor.*

Man hat dann (vgl. [10]) $p(x)=x^{\sigma}(p_0+p_1x+\cdots)$, $q(x)=x^{\sigma-2}(q_0+q_1x+\cdots)$, $k(x)=x^{\sigma-2}(k_0+k_1x+\cdots)$, alles in einer hinreichend kleinen Umgebung um den Punkt $x=0$ mit reellem σ; $p_0\neq 0$, $p_1, p_2, \ldots$; $q_0, q_1, \ldots$; $k_0, k_1, \ldots$. Es gibt sicher eine Zahl ν_0 so, daß $k_\nu\neq 0$ und $k_\nu=0$ für $\nu<\nu_0$. Mit dem Ansatz $v=x^{\varrho}+\cdots$ ergibt sich aus $Av=\lambda v$ die charakteristische Gleichung

$$\varrho^2+(\sigma-1)\varrho+\lambda\frac{k_0}{p_0}-\frac{q_0}{p_0}=0 \tag{12}$$

mit den Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 (Realteil $\varrho_1=r_1$, Realteil $\varrho_2=r_2$, $r_1\geq r_2$). Wenn bei $x=0$ der Grenzkreisfall vorliegt, muß nach F. Rellich $\nu_0>r_1-r_2\geq 0$ sein ([10] S. 707). Die Randbedingungen $[\alpha, v]_0=0$ gehen unter Voraussetzung (IV) über in

$$\begin{cases} v_0\cos\delta+v_1\sin\delta=0, & 0\leq\delta<\pi \quad \text{wenn} \quad \varrho_1, \varrho_2 \quad \text{reell} \\ v_0e^{i\delta}+v_1e^{-i\delta}=0, & 0\leq\delta<\pi \quad \text{wenn} \quad \varrho_1, \varrho_2 \quad \text{nicht reell.} \end{cases} \tag{13}$$

Dabei sind v_0, v_1 die Rellichschen Anfangszahlen ([10] S. 710—712). Aus der Darstellung von v_0, v_1 in [10] kann man überdies zeigen, daß $v_0=v(0)$, $v_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{v(x)-v(0)}{x}=v'(0)$ dann und nur dann eintritt, wenn $\sigma=q_0=q_1=0$ ist. Den Beweis werden wir im Anhang erbringen. Wir erhalten den folgenden

Satz: a) *Wird (I) unter den Voraussetzungen (IV) betrachtet, so gehen die auf dem linken Rand zu stellenden zulässigen Randbedingungen* $[\alpha, u]_0$ *dann und nur dann in die Gesamtheit der Randbedingungen (5) über, wenn* $\sigma=q_0=q_1=0$ *ist.*

b) $x=0$ *ist genau dann ein hyperbolischer Rand wenn* $\nu_0=2$, *ein parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen wenn* $\nu_0>2$, *ein parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken wenn* $\nu_0<2$ *ist.*

c) *Im letzten Fall gehen die Randbedingungen* $[\alpha, u]_0=0$ niemals *in die Gesamtheit der Randbedingungen (5) über:*

Beweis. b) Es ist $\sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{k_0+k_1x+\cdots}{p_0+p_1x+\cdots}}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung um $x=0$.

c) Da bei $x=0$ der Grenzkreisfall vorliegt muß $\nu_0>r_1-r_2=1$ sein, was im Widerspruch zu $\nu_0<2$ steht.

Beispiel: $-u_{xx}+x^q\{r_1u_{yy}+r_2u_y+r_3u\}=0$; $0<y<\infty$, $0<x\leq 1$; $q=0, \pm 1 \pm 2+\cdots$. $x=0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit, parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen für $q=1, 2, 3, \ldots$. Für $x=0$ liegt ferner der Grenzkreisfall vor. Die zulässigen Randbedingungen nehmen die einfache Form $\lim\limits_{x\to 0}u(x, y)\cos\delta+\lim\limits_{x\to 0}u_x(x, y)\sin\delta=0$ an. Eine bemerkenswerte Auszeichnung dieses Beispieles liegt darin, daß bei $x=0$ der Grenzpunktfall dann und nur dann vorliegt, wenn $x=0$ parabolischer Rand und

Einhüllende der Charakteristiken ist. Der Spezialfall

$$-u_{xx}+x\,u_{yy}=0$$

ist in der Gasdynamik der schnallnahen Strömung von Interesse und mehrfach untersucht worden. So lösen S. BERGMANN [16], L. BERS [17], P. GERMAIN und R. BADER [18], M. H. PROTTER [19] für diese und allgemeinere Gleichungen das CAUCHYsche Problem für einen hyperbolischen Bereich mit vorgegebenen Daten auf der parabolischen Anfangskurve, die stets Träger der Spitzen der Charakteristiken ist. Ferner wird in [17], [18], [19] das Randwertproblem für ein hyperbolisch-parabolisches Gebiet betrachtet mit vorgeschriebenen Daten längs einer Charakteristik und einer parabolischen Anfangskurve (Träger der Spitzen).

Abschnitt II: Ein Existenzsatz.

Für die Anwendungen erweist sich nun der Fall, daß unter den Voraussetzungen (II) bei $x=l$ und bei $x=m$ der Grenzpunktfall vorliegt, sowie der Fall, daß auf einem Rand der Grenzpunktfall, auf dem anderen Rande dagegen die Voraussetzungen (I) erfüllt sind und somit dort die Randbedingung (5) gestellt werden kann, als besonders wichtig. Wir geben für den ersten Existenzsätze. Die Diskussion der damit in der mathematischen Physik erfaßten Probleme wird auf S. 356 durchgeführt. Der andere Fall erledigt sich analog.

§ 1. Die homogene Differentialgleichung (1).

Satz 1. *Vorgegeben sei die homogene Differentialgleichung (1) $(f(x,y)\equiv 0)$ unter den Voraussetzungen (II) und (III). Bei $x=l$, $x=m$ liege der Grenzpunktfall vor.*

Es werden die Anfangsbedingungen (4) gestellt mit $u_0(x)$ dreimal, $u_1(x)$ zweimal stetig differenzierbar in $l<x<m$. $\frac{d}{dx}A\,u_0$ sei stetig in $l<x<m$. Ferner sei $\|u_0\|^2<\infty$, $\|u_1\|^2<\infty$, $\|A\,u_0\|^2<\infty$, $\|A\,u_1\|^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}u_0\right\|^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}u_1\right\|^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}A\,u_0\right\|^2<\infty$. Randbedingungen sind nicht vorhanden[10]).

Für A_s^{-1} sollen die folgenden Abschätzungen für $|s|>R_0$ und $\xi>\xi_0$ bei geeignet großem R_0 und ξ_0 gelten:

$$|A_s^{-1}j|\le\frac{M_1}{|s|},\qquad \left|\frac{d}{dx}A_s^{-1}j\right|\le M_2, \tag{14}$$

wenn $j(x)$ in $l<x<m$ stetig und $\|j\|^2<\infty$ ist;

$$|A_s^{-1}j|\le\frac{M_3}{|s|^2},\qquad \left|\frac{d}{dx}A_s^{-1}j\right|\le\frac{M_4}{|s|}, \tag{15}$$

[10]) Die Ergänzung der Randbedingung durch die Bedingung $\int_l^m|u(x,y)|^2\,k(x)\,dx<\infty$ wird in § 2 untersucht.

wenn $j(x)$ in $l<x<m$ stetig differenzierbar und $\|j\|^2, \left\|\frac{dj}{dx}\right\|^2 < \infty$. Dabei sind $M_1 \dots M_4$ von x und s unabhängige Zahlen[11]).

Behauptung:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} (A_s^{-1} h)\, ds \tag{16}$$

mit $h = (r_1 s + r_2)\, u_0(x) + r_1 u_1(x)$ [vgl. (8)] ist fast überall eine Lösung von (1) und erfüllt die Anfangsbedingungen (4). Dabei ist $\xi_1 > \xi_0$ und ξ_0 so gewählt, daß die obigen Abschätzungen für $\xi > \xi_0$ und $|s| > R_0$ gelten und $A_s^{-1} h$ in der Halbebene $\xi > \xi_0$ analytisch in s ist[12]).

Bemerkungen. Dem Integral in (16) wird im Beweis ein präziser Sinn beigelegt. Die geforderten Abschätzungen (14), (15) sind unter den Voraussetzungen (I) stets erfüllt. Es folgt dies aus dem bekannten asymptotischen Verhalten der Lösungen von $\left(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) I\right) v = 0$ in bezug auf dem komplexen Parameter s durch die Sätze von G. D. Birkhoff und H. Tamarkin [*14*], indem man die Greensche Resolvente auf ihr asymptotisches Verhalten in s untersucht [*8*]. Unter den wesentlich allgemeineren Voraussetzungen (II) sind solche allgemeine, zu den von Birkhoff und Tamarkin analoge Sätze nicht bekannt. Man zeigt unter anderem leicht, daß die geforderten Abschätzungen (14), (15) erfüllt sind, wenn die Koeffizienten in (1) konstant sind und $l = -\infty$, $m = +\infty$ ist. (Es liegt dann der Grenzpunktfall vor.)

Beweis. Nach S. 341 existiert A_s^{-1} in der Halbebene $\xi > \xi_0$ und ist analytisch in s. Die Anfangsbedingungen $u_i(x)$, $i = 0, 1$ sind Lösungen von

$$\left(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) I\right) v = A u_i + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) u_i, \qquad i = 0, 1.$$

Es ist nach unseren Voraussetzungen $u_i \in \mathfrak{A}_{II}$. Daher gilt die Darstellung

$$u_i(x) = A_s^{-1} A u_i + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) A_s^{-1} u_i. \tag{17}$$

Aus (17) folgt

$$(r_1 s + r_2) A_s^{-1} u_0 = \frac{u_0}{s} - \frac{1}{s} A_s^{-1} (A u_0 + r_3 u_0),$$

$$r_1 A_s^{-1} u_1 = \frac{u_1}{s^2} - \frac{1}{s^2} A_s^{-1} \left(A u_1 + (r_2 s + r_3) u_1\right).$$

Damit wird aber bei Beachtung von $v = A_s^{-1} h$ [vgl. (8)]

$$v(x,s) = \frac{u_0(x)}{s} + \frac{u_1(x)}{s^2} + w(x,s) \tag{18}$$

---

[11]) Die getrennte Aufzählung der Abschätzungen soll angeben, daß (15) aus (14) im allgemeinen durch partielle Integration gewonnen werden kann. Es genügt, wenn die Abschätzungen (14), (15) nur gelten für ein abgeschlossenes Intervall $l_1 \leq x \leq m_1$ mit $l_1 > l$, $m_1 < m$. Ferner können die Abschätzungen noch durch etwas schwächere ersetzt werden.

[12]) Nach S. 341 ist ein solches ξ_0 unter der notwendigen Voraussetzung (III) stets zu bestimmen.

mit den Abkürzungen

$$(19)\quad w(x,s) = -\frac{1}{s}A_s^{-1}z \quad \text{und} \quad z(x,s) = A u_0 + \frac{1}{s}A u_1 + r_3 u_0 + \left(r_2 + \frac{r_3}{s}\right)u_1 .$$

Es ist H.W. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\frac{e^{sy}}{s}\,ds = 1$ für $y>0$ ([5] S. 105) und das Integral konvergiert gleichmäßig in y für $0<\varepsilon\leq y\leq y_0<\infty$. Ferner ist $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\frac{e^{sy}}{s^2}\,ds = y$ für $y\geq 0$ und das Integral konvergiert gleichmäßig für $0\leq y\leq y_0<\infty$.

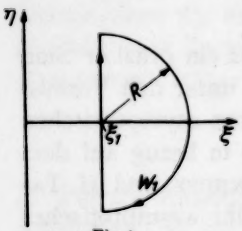

Fig. 1.

Wir wollen nun dem Integral (16) einen präzisen Sinn beilegen. Mit (18) definieren wir die Funktion $u(x,y)$ durch

$$(20)\quad u(x,y) = u_0(x) + u_1(x)\,y + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy} w(x,s)\,ds$$

und verwenden die symbolische Schreibweise (16) lediglich als Abkürzung für (20). Das letzte Integral ist gleichmäßig konvergent in x und y ($l<x<m$ und $0\leq y\leq y_0<\infty$) für $|s|>R_0$, denn der Integrand hat die Ordnung $1/|s|^2$. Weiter ergibt sich $\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} w(x,s)\,ds = 0$ nach dem Cauchyschen Satz und unseren Abschätzungen, indem man das Integral

$$\int\limits_{W} w(x,s)\,ds = \int\limits_{\xi_1-iR}^{\xi_1+iR} w(x,s)\,ds + \int\limits_{W_1} w(x,s)\,ds$$

betrachtet für $R\to\infty$. Aus (20) folgt daher: $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = u_0(x)$. Wir bemerken ferner, daß sich mit den schärferen Abschätzungen (15) die gleichmäßige Konvergenz in x und y der Integrale

$$\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,e^{sy} w(x,s)\,ds \quad \text{und} \quad \int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy} w'(x,s)\,ds, \qquad w' \equiv \frac{dw(x,s)}{dx},$$

ergibt für $|s|>R_0$. Wie oben folgt ebenfalls $\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,w(x,s)\,ds = 0$. Aus (20) ergibt sich daher das Erfülltsein auch der zweiten Anfangsbedingung $\lim\limits_{y\to 0} u_y(x,y) = u_1(x)$. Wir zeigen nun, daß (20) die integrierte Gl. (1) erfüllt. Mit $l<n<m$ haben wir

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \int_n^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy \equiv & -\int_0^y \{p(x)u_x - (p(x)u_x)|_{x=n}\}\,dy + \\ & + \int_n^x \left\{(q(x)+r_3 k(x))\int_0^y u\,dy\right\}dx + \\ & + \int_n^x k(x)\,\{r_1(u_y - u_y|_{y=0}) + r_2(u-u|_{y=0})\}\,dx . \end{aligned}\right.$$

Indem wir (20) nach y integrieren finden wir

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^y u(x,y)\,dy = u_0(x)\,y + u_1(x)\,\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,w(x,s)\int_0^y e^{sy}\,dy \\ \qquad\qquad = u_0(x)\,y + u_1(x)\,\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,w(x,s)\,ds, \\ \displaystyle\int_0^y u_x(x,y)\,dy = u_0'(x)\,y + u_1'(x)\,\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,w'(x,s)\,ds. \end{cases}$$

Ersetzen wir nun u, u_x, u_y durch die sich aus (20) ergebenden Ausdrücke und $\int_0^y u\,dy$, $\int_0^y u_x\,dy$ durch (22), so wird (21)

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_n^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy = y\Big\{-p(x)\,u_0'(x) + \big(p(x)\,u_0'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ \displaystyle + \int_n^x \big(q(x)\,u_0(x) + k(x)\,(r_2\,u_0(x) + r_3\,u_1(x))\big)\,dx\Big\} + \\ \displaystyle + \frac{y^2}{2}\Big\{-p(x)\,u_1'(x) + \big(p(x)\,u_1'(x)\big)\big|_{x=n} + \int_n^x \big(q(x) + r_3\,k(x)\big)\,u_1(x)\,dx\Big\} + \\ \displaystyle + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\Big\{-p(x)\,w'(x,s) + \big(p(x)\,w'(x,s)\big)\big|_{x=n} + \\ \displaystyle + \int_n^x \big(k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x)\big)\,w(x,s)\,dx\Big\}\,ds. \end{cases}$$

Die Vertauschung der Integrationsfolge ist legitim wegen der gleichmäßigen Konvergenz. Nun genügt $v(x,s) = \frac{u_0(x)}{s} + \frac{u_1(x)}{s^2} + w(x,s)$ der Gleichung

$$(24)\quad Bv + k(x)\,\{r_1 s^2 + r_2 s + r_3\}\,v - k(x)\,\{(r_1 s + r_2)\,u_0(x) + r_1\,u_1(x)\} = 0.$$

Indem man die Darstellung von v in (24) einsetzt und einmal nach x partiell integriert, folgt:

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{s}\Big\{-p(x)\,u_0'(x) + \big(p(x)\,u_0'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ \displaystyle + \int_n^x \big(q(x)\,u_0(x) + k(x)\,(r_3\,u_0(x) + r_2\,u_1(x))\big)\,dx\Big\} \\ \displaystyle + \frac{1}{s^2}\Big\{-p(x)\,u_1'(x) + \big(p(x)\,u_1'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ \displaystyle + \int_n^x \big(q(x) + r_3\,k(x)\big)\,u_1(x)\,dx\Big\} \\ \displaystyle - p(x)\,w'(x,s) + \big(p(x)\,w'(x,s)\big)\big|_{x=n} + \\ \displaystyle + \int_n^x \big(k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x)\big)\,w(x,s)\,dx = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man (25) mit $\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{sy}}{s}$ und integriert nach s von $\xi_1 - i\infty$ bis $\xi_1 + i\infty$, so folgt daraus, daß in (23) $\int_\eta^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy = 0$ ist, d.h. unser durch (20) dargestelltes u erfüllt die integrierte Gleichung. Daher ist in (21) die rechte Seite Null. Wir ordnen diese rechte Seite um und erhalten

$$(26)\qquad \begin{cases} -\int_0^y p(x)\,u_x\,dy + r_1\int_\eta^x k(x)\,u_y\,dx \\ \quad = -\int_0^y (p(x)\,u_x)|_{x=\eta}\,dy - \int_\eta^x \left\{(q(x) + r_3 k(x))\int_0^y u\,dy\right\}dx - \\ \quad\quad -\int_\eta^x k(x)\{-r_1 u_1(x) + r_2(u - u_0(x))\}\,dx. \end{cases}$$

Da die rechte Seite von (26) nach x und y differenzierbar ist, ist es auch die linke und man hat

$$(27)\qquad \begin{cases} \left(\left(-\int_0^y p(x)\,u_x\,dy\right)_x + r_1 k(x)\,u_y\right)_y + q(x)\,u + k(x)\{r_2 u_y + r_3 u\} = 0, \\ \left(-p(x)\,u_x + r_1\left(\int_\eta^x k(x)\,u_y\,dx\right)_y\right)_x + q(x)\,u + k(x)\{r_2 u_y + r_3 u\} = 0. \end{cases}$$

Würde man in (20) u_{yy} durch zweimaliges Differenzieren unter dem Integral bilden, so tritt das Integral $\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} s^2 e^{sy} w(x,s)\,ds$ auf. Setzt man $s^2 w(x,s) = W(x,s)$, so hat $W(x,s)$ nach (19) und (15) die Ordnung $\frac{1}{|s|}$, d.h. das Integral

$$(28)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |W(x, \xi_1 + i\eta)|^2\,d\eta$$

existiert. Daraus schließt man mit [9] wie bei W. MÄCHLER [8], daß $\left(\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} w(x,s)\,ds\right)_{yy}$ fast überall existiert und daß fast überall

$$(29)\qquad -(p(x)\,u_x)_x + q(x)\,u + k(x)\{r_1 u_{yy} + r_2 u_y + r_3 u\} = 0$$

ist.

§ 2. Die zulässige Bedingung $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$.

Jetzt sollen die im Abschnitt I, § 1 unter den Voraussetzungen (II) als zulässig erkannten Randbedingungen durch die Forderung $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$ ergänzt werden. Diese Betrachtungen von S. 342 sollen hier durch einen Existenzsatz gerechtfertigt werden.

Hilfssatz 1. (M. H. STONE [13], S. 142–143): *Es sei A in $\mathfrak{A}$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator und $\mu \neq 0$ ($\lambda = \varphi + i\mu$), dann existiert A_λ^{-1} und ist ein beschränkter, linearer Operator, der der Ungleichung $\|A_\lambda^{-1} f\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{|\mu|^2}$ für jedes $f \in \mathfrak{A}_\lambda^{-1}$ genügt.*

Beweis. Es ist $\lambda \in R(\lambda)$. Daher existiert A_λ^{-1}. Ist $j \in \mathfrak{A}_\lambda^{-1}$, so ist $A_\lambda^{-1} j \in \mathfrak{A}$ und es ist

$$(A A_\lambda^{-1} j,\ A_\lambda^{-1} j) = (A_\lambda^{-1} j,\ A A_\lambda^{-1} j).$$

Nun ist

$$A A_\lambda^{-1} j = A v = \lambda v + j = j + \lambda A_\lambda^{-1} j,$$

also:

$$(j + \lambda A_\lambda^{-1} j,\ A_\lambda^{-1} j) = (A_\lambda^{-1} j,\ j + \lambda A_\lambda^{-1} j),$$

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\, \| A_\lambda^{-1} j \|^2 = (A_\lambda^{-1} j, j) - (j, A_\lambda^{-1} j),$$

$$2|\mu|\, \| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq 2 \| j \|\, \| A_\lambda^{-1} j \|,$$

$$\| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{|\mu|^2}.$$

Hilfssatz 2. *Sei A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert und halbbeschränkt: $(v, Av) \geq a(v,v)$. Ferner: $\varphi \leq 0$, $\varphi \leq a$. Dann existiert A_λ^{-1} und es ist*

$$\| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{|\lambda|^2 - 2\varphi a}, \qquad \text{wenn } |\lambda|^2 - 2\varphi a > 0 \text{ ist.}$$

Beweis. Es ist $\lambda \in R(\lambda)$. Man hat

$$\begin{aligned} (j, j) &= (A v - \lambda v, A v - \lambda v) \\ &= (A v, A v) - 2\varphi (v, A v) + |\lambda|^2 (v, v) \\ &\geq (|\lambda|^2 - 2\varphi a)\, (v, v). \end{aligned}$$

Setzt man nun $v = A_\lambda^{-1} j$, so folgt die Behauptung.

Wir übertragen diese Abschätzungen auf unser $A_s^{-1} j$ und untersuchen sie in einer geeigneten rechten Halbebene: $\xi > \xi_0 > 0$ der s-Ebene. $\mu \neq 0$ in Hilfssatz 1 ist nach (11) erfüllt, wenn $\eta \neq 0$ in der $s = \xi + i\eta$-Ebene ist. Wir haben daher

$$\| A_s^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{\eta^2 (r_2 + 2\xi r_1)^2} \quad \text{für} \quad \xi > \xi_0 > 0, \qquad \eta \neq 0. \tag{30}$$

Es ist nach (11) $\varphi = -(r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3)$. Beschränken wir η auf das Intervall $-\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein, so folgt für alle $\xi > \xi_0$ $\varphi \leq 0$ und $\leq a$ und überdies

$$\left\{ \begin{aligned} |\lambda|^2 - 2\varphi a = {} & (r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3)^2 + \eta^2 (r_2 + 2\xi r_1)^2 \\ & + 2a (r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3) \equiv \varrho(\xi, \eta) > 0 \end{aligned} \right. \tag{31}$$

für passende Wahl von ξ_0. Es ist daher für $-\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon$, $\xi > \xi_0 > 0$ nach Hilfssatz 2

$$\| A_s^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{\varrho(\xi, \eta)}. \tag{32}$$

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen (II) und (III) sei die homogene Differentialgleichung (I) $(f(x, y) \equiv 0)$ vorgegeben. Bei $x = l$, $x = m$ liege der Grenzpunktfall vor. In den Anfangsbedingungen (4) sei $u_0(x)$, $u_1(x)$ zweimal stetig*

differenzierbar in $l<x<m$ *und es sei* $\|u_0\|^2$, $\|u_1\|^2$, $\|Au_0\|^2$, $\|Au_1\|^2<\infty$. *Dann ist* $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx<\infty$ *für jedes* y *aus* $0\leq y\leq y_0<\infty$, *wobei* $u(x,y)$ *durch* (20)

$$u(x,y)=u_0(x)+u_1(x)\,y+\frac{1}{2\pi}e^{\xi_1 y}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta \tag{33}$$

gegeben ist.

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind hier wesentlich schwächere als in Satz 1. Da die Abschätzungen (14), (15) nicht benötigt werden, genügt es, diese in Satz 1 nur für ein abgeschlossenes Intervall zu fordern[11]).

Beweis. Mit leichten Abschätzungen wird für $0\leq y\leq y_0<\infty$

$$\begin{cases}\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx\\ \leq 3\left\{\|u_0\|^2+\|u_1\|^2 y_0^2+\frac{e^{2\xi_1 y_0}}{4\pi^2}\int_l^m\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta\right|^2 k(x)\,dx\right\}.\end{cases} \tag{34}$$

Nun ist nach (19) $w(x,s)=-\frac{1}{s}A_s^{-1}z$. Man hat

$$\begin{cases}\int_l^m\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta\right|^2 k(x)\,dx\\ \qquad\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\xi_1^2+\eta^2}\int_l^m\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A^{-1}_{\xi_1+i\eta}z|^2\,d\eta\right)k(x)\,dx\end{cases} \tag{35}$$

mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung. Die Existenz von $\int_l^m |A^{-1}_{\xi_1+i\eta}z|^2 k(x)\,dx$ folgt aus unseren Hilfssätzen. Zunächst ist mit (19)

$$\|z(x,\xi_1+i\eta)\|^2\leq M,$$

$$M=4\left\{\|Au_0\|^2+\frac{1}{\xi_1^2}\|Au_1\|^2+r_3^2\|u_0\|^2+2\left(r_2^2+\frac{r_3^2}{\xi_1^2}\right)\|u_1\|^2\right\}. \tag{36}$$

Wir schätzen nun $\varrho(\xi_1,\eta)$ aus (31) ab. Dabei sei stets η auf das Intervall $-\varepsilon\leq\eta\leq+\varepsilon$ beschränkt. Ist $a>0$, so wird

$$\varrho(\xi_1,\eta)\geq 2a(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2-\beta^2\eta^2$$

mit $2a(r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2$, $2a\,r_1=\beta^2$. Dabei ist α^2 gewiß positiv, wenn nur ξ_1 hinreichend groß gewählt ist. Ist $a=0$, so wird

$$\varrho(\xi_1,\eta)\geq(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)^2\geq(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2-\beta^2\eta^2$$

mit $\alpha^2=r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3$, $\beta^2=r_1$ für hinreichend großes ξ_1. Für $a<0$ erhält man $\varrho(\xi_1,\eta)\geq(\gamma_1^2-\delta_1^2\eta^2)^2-\gamma_2^2+\delta_2^2\eta^2$ mit

$$\gamma_1^2=r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3,\quad \delta_1^2=r_1,\quad \gamma_2^2=-2a(r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3),\quad \delta_2^2=-2a\,r_1.$$

Indem wir ϱ weiter abschätzen folgt:

$$\varrho(\xi_1, \eta) \geq \gamma_1^4 - 2\gamma_1^2 \delta_1^2 \eta^2 - \gamma_2^2.$$

Nun ist $\gamma_1^4 - \gamma_2^2 = \alpha^2$ für hinreichend großes ξ_1 eine positive Größe. Wir setzen $\beta^2 = 2\gamma_1^2 \delta_1^2$ und erhalten für alle a $\varrho(\xi_1, \eta) \geq \alpha^2 - \beta^2 \eta^2$. Dabei ist ε so klein zu wählen, daß $\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon \leq p < 1$ ist. Mit (30) und (32) erhalten wir daher

$$\int_l^m |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \leq \begin{cases} \dfrac{M_\eta}{\alpha^2 - \beta^2\eta^2} \leq \dfrac{M}{\alpha^2 - \beta^2\varepsilon^2} & \text{für} \quad -\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon \\ \dfrac{M}{\eta^2(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \leq \dfrac{M}{\varepsilon^2(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} & \text{für} \quad \begin{cases} -\infty < \eta \leq -\varepsilon, \\ \varepsilon \leq \eta < +\infty. \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist die Existenz nachgewiesen. Wir zeigen nun, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z\|^2 d\eta \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta \tag{37}$$

ebenfalls existiert. Wir zerlegen das Integral (37) in $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}$ und erhalten mit (30), (32) und unseren Abschätzungen für $\varrho(\xi_1, \eta)$ und $\|z\|^2$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \|A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z\|^2 d\eta \leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{M}{\alpha^2 - \beta^2\eta^2} d\eta \leq \frac{2M\varepsilon}{\alpha^2 - \beta^2\varepsilon^2} \quad \text{für} \quad \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon \leq p < 1,$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \|A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z\|^2 d\eta \leq \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\int_{+\varepsilon}^{+\infty} \|A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z\|^2 d\eta \leq \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Aus der Existenz von

$$\int_l^m |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta$$

als LEBESGUEsche Integrale folgt nach dem Satz von FUBINI, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta = \int_l^m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |A_{\xi_1+i\eta}^{-1} z|^2 d\eta \right) k(x)\, dx$$

ist. Mit der Existenz des letzten Integrals ist unser Satz bewiesen, wie die Gln. (34) und (35) zeigen.

§ 3. Die inhomogene Differentialgleichung.

Jetzt sei in unserer Ausgangsdifferentialgleichung (1) $f(x, y) \not\equiv 0$.

Satz 3. *Es werde* (1) *unter den Voraussetzungen* (*II*) *und* (*III*) *betrachtet. Bei* $x = l$, $x = m$ *liege der Grenzpunktfall vor. Die Anfangsbedingungen* (4) *sind*

$u_0(x) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$. *Die Funktionen* $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ *seien in* $l < x < m$, $0 \leq y < \infty$ *stetig, die Integrale*

$$(38) \quad \int_0^\infty |f(x,y)|\,dy, \qquad \int_0^\infty e^{-\xi_0 y}|f_y(x,y)|\,dy, \qquad \int_0^\infty e^{-\xi_0 y}|f_{yy}(x,y)|\,dy$$

in $l < x < m$ *gleichmäßig konvergent in* x. *Ferner sei*

$$(39) \quad \|f(x,0)\|^2, \quad \|f_x(x,0)\|^2, \quad \|f_y(x,0)\|^2, \quad \left\| \int_0^\infty e^{-\xi_0 y}|f_{yy}(x,y)|\,dy \right\|^2 < \infty .$$

Bestehen die Abschätzungen (14) *und* (15), *so ist fast überall*

$$(40) \quad \tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy}(A_s^{-1} g)\,ds \quad \text{mit} \quad g(x,s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(x,y)\,dy$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1).

$\xi_1 > \xi_0$ ist so gewählt, daß die Abschätzungen (14), (15) für $|s| > R_0$ in der rechten Halbebene $\xi > \xi_0 > 0$ gelten.

Bemerkung. Sind die obigen Voraussetzungen für $f(x, y)$ nicht erfüllt, so bleibt die Lösung (40) in $0 \leq y \leq y_1 < \infty$ weiterhin bestehen, wenn man $f(x, y)$ abschneidet, d.h. $f(x, y) = 0$ für $y > y_1$ setzt.

Beweis. Unter der Voraussetzung (38) ist $|g(x,s)| < \int_0^\infty |f(x,y)|\,dy$, wobei das Integral gleichmäßig in x konvergiert. Daher ist $g(x, s)$ für $\xi > 0$ analytisch in $s = \xi + i\eta$ und stetig in x. Durch partielle Integration haben wir

$$(41) \quad g(x,s) = \frac{1}{s} f(x,0) + \frac{1}{s^2} f_y(x,0) + \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}(x,y)\,dy .$$

In Analogie zu (19) führen wir die Abkürzungen

$$(42) \quad \tilde{v}(x,s) = \frac{1}{s} A_s^{-1}\tilde{z} \quad \text{mit} \quad \tilde{z}(x,s) = f(x,0) + \frac{1}{s} f_y(x,0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}\,dy$$

ein. Schreiben wir (42) in der Form

$$\tilde{v}(x,s) = \frac{1}{s} A_s^{-1} f|_{y=0} + \frac{1}{s^2} A_s^{-1} f_y|_{y=0} + \frac{1}{s^2} A_s^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}\,dy\right),$$

so sind wegen $\|f(x,0)\|^2 < \infty$ usw. die Voraussetzungen für die Ungleichungen (14) erfüllt. Daher konvergiert (40) gleichmäßig in $l < x < m$ und $0 \leq y \leq y_0 < \infty$. Insbesondere ist

$$(43) \quad \lim_{y \to 0} \tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} (A_s^{-1} g)\,ds = 0 ,$$

wie die Anwendung des Cauchyschen Satzes (vgl. S. 346) zeigt, da $A_s^{-1}g$ für $\xi > \xi_0$ analytisch in s ist. Betrachten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,e^{sy}\,\tilde{v}(x,s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\left\{A_s^{-1}f|_{y=0} + \frac{1}{s}A_s^{-1}f_y|_{y=0} + \cdots\right\}ds,$$

so können wir bei $A_s^{-1}f|_{y=0}$ wegen $\|f_x(x,0)\|^2 < \infty$ von der schärferen Ungleichung (15) Gebrauch machen. Mithin konvergiert dieses Integral in $l < x < m$, $0 \leq y \leq y_0 < \infty$ gleichmäßig und wir haben

$$\tilde{u}_y(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,e^{sy}(A_s^{-1}g)\,ds \quad \text{mit} \quad \lim_{y\to 0}\tilde{u}_y(x,y) = 0. \tag{44}$$

Damit sind auch die Anfangsbedingungen von $\tilde{u}$ erfüllt. Analoge Darstellung folgt für $\tilde{u}_x(x,y)$. Wir zeigen nun, daß (40) die integrierte Gl. (1) erfüllt. Mit $l < n < m$ erhalten wir

$$\int_n^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy = \int_n^x\int_0^y k(x)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{45}$$

Setzen wir $\tilde{v}(x,s) = A_s^{-1}g$, so ist:

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\,\tilde{v}(x,s)\,ds,\\
&\int_0^y \tilde{u}(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,\tilde{v}(x,s)\,ds,\\
&\int_0^y \tilde{u}_x(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,\tilde{v}'(x,s)\,ds,\\
&\lim_{y\to 0}\tilde{u}(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\tilde{u}_y(x,y) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

Indem wir analog zu (21) die linke Seite in (45) weiter ausrechnen und von (46) Gebrauch machen, folgt

$$\left\{\begin{aligned}
\int_n^x\int_0^y D[\tilde{u}]\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\Big\{&-p(x)\,\tilde{v}' + (p(x)\,\tilde{v}')|_{x=n} +\\
&+\int_n^x (k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x))\,\tilde{v}\,dx\Big\}ds.
\end{aligned}\right. \tag{47}$$

Nun genügt $\tilde{v}$ der Gleichung $B\,\tilde{v} + k(x)\{r_1 s^2 + r_2 s + r_3\}\,\tilde{v} = k(x)\,g(x,s)$. Indem wir diese nach x integrieren und in (47) berücksichtigen, so erkennen wir,

daß für $u = \tilde{u}$ die integrierte Gl. (45) erfüllt ist, wenn

$$(48) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_{x}^{x} k(x)\,g(x,s)\,dx = \int_{x}^{x}\int_{0}^{y} k(x)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

ist. Man zeigt dies mit W. MÄCHLER so: Zunächst ist

$$\int_{x}^{x} d\tau\,k(\tau)\int_{0}^{\infty}|f(\tau,y)|\,dy = \int_{0}^{\infty} dy\int_{x}^{x} k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau,$$

da $\int_0^\infty |f(x,y)|\,dy$ in $l<x<m$ gleichmäßig konvergiert. Ferner wird

$$\left|\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_0^y dt\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau\right| \le \lim_{A\to\infty}\int_0^A dy\,e^{-\xi y}\int_0^y dt\int_x^x k(\tau)\,|f(\tau,t)|\,d\tau$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left\{-\frac{e^{-\xi y}}{\xi}\int_0^y dt\int_x^x k(\tau)\,|f(\tau,t)|\,d\tau\Big|_{y=0}^{y=A} + \frac{1}{\xi}\int_0^A dy\,e^{-\xi y}\int_x^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi}\int_0^\infty dy\,e^{-\xi y}\int_x^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau \le \frac{1}{\xi}\int_0^\infty dy\int_x^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau<\infty$$

für Realteil $s=\xi>0$. Wir haben daher

$$\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_0^y dt\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau = \frac{1}{s}\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,y)\,d\tau.$$

Die Konvergenz ist eine absolute in der Halbebene $\xi>0$. Die letzte Gleichung wird nun mit $\frac{e^{sy}}{2\pi i}$ multipliziert und über $\xi_1-i\infty$ bis $\xi_1+i\infty$ integriert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,e^{sy}\int_0^\infty dz\,e^{-sz}\int_0^z dt\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_0^\infty dt\,e^{-st}\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau.$$

Nach unserer Bezeichnung aus I, §1 steht links $L^{-1}L\int_0^x dt\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau$. Wir haben unter unseren Voraussetzungen:

$$\int_0^y dt\int_x^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_x^x d\tau\int_0^\infty e^{-st}\,k(\tau)\,f(\tau,t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_x^x k(\tau)\,g(\tau,s)\,d\tau.$$

Damit ist gezeigt, daß $\tilde{u}$ die integrierte Gl. (45) befriedigt. Durch Differentiation folgt:

$$\left(\left(-\int_0^y p(x)\,\tilde{u}_x\,dy\right)_x + r_1 k(x)\,\tilde{u}_y\right)_y + q(x)\,\tilde{u} + k(x)\{r_2\tilde{u}_y + r_3\tilde{u}\} = k(x)\,f(x,y),$$

$$\left(-p(x)\,\tilde{u}_x + r_1\left(\int_n^x k(x)\,\tilde{u}_y\,dx\right)_y\right)_x + q(x)\,\tilde{u} + k(x)\{r_2\tilde{u}_y + r_3\tilde{u}\} = k(x)\,f(x,y),$$

und wie im § 1 erschließt man daraus, daß $\tilde{u}$ fast überall eine Lösung von (1) ist.

§ 4. Die zulässige Bedingung $\int_l^m |\tilde{u}(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$.

Satz 4. *Wir betrachten* (1) *unter den Voraussetzungen* (*II*) *und* (*III*). *Bei* $x=l$, $x=m$ *liege der Grenzpunktfall vor. Die Anfangswerte und die Voraussetzungen über* $f(x,y)$ *seien dieselben wie in Satz 3. Dann ist* $\int_l^m |\tilde{u}(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$ *für jedes* y *aus* $0 \le y \le y_0 < \infty$, *wobei* $\tilde{u}(x,y)$ *durch* (40)

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{\xi_1 y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y} (A^{-1}_{\xi_1+i\eta} g)\,d\eta$$

gegeben ist.

Beweis. Vergleiche die Bemerkungen zu Satz 3 und 2, die auch hier gültig bleiben. Die Bezeichnungen sind im Beweis zu Satz 3 so gewählt, daß der Beweis von Satz 2 hier unmittelbar übertragen werden kann.

Eine Zusammenfassung der §§ 1 bis 4 zeigt, daß durch

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy} A_s^{-1}(h+g)\,ds = u_0(x) + u_1(x)\,y -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s} A_s^{-1}\left(A u_0 + \frac{1}{s} A u_1 + r_3 u_0 + \left(r_2 + \frac{r_3}{s}\right) u_1 - s g\right) ds$$

eine Lösung von (1) unter den gestellten Anfangsbedingungen und der Bedingung $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$ gegeben wird, wenn für $x=l$, $x=m$ der Grenzpunktfall vorliegt.

Anhang: Eine Bemerkung über die RELLICHschen Anfangszahlen.

Wir behalten die Bezeichnungen von I, § 2 bei und beweisen den

Satz: $-(p(x)\,v')' + q(x)\,v = \lambda k(x)\,v$ *werde unter den Voraussetzungen* (*IV*) *betrachtet. Die Gesamtheit der bei* $x=0$ *zu stellenden* WEYL-STONEschen *Randbedingungen* $[\alpha, v]_0 = 0$ *geht dann und nur dann in die Gesamtheit der* STURM-LIOUVILLEschen *Randbedingungen* $v(0)\cos\delta + v'(0)\sin\delta = 0$ $(0 \le \delta < \pi)$ *über, wenn* $\sigma = q_0 = q_1 = 0$ *ist.*

Beweis. Ein Fundamentalsystem unserer Gleichung hat die Form

$$\omega(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots), \qquad \omega_0 = 1,$$
$$\psi(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots) + c\,\omega(x)\log x,$$

mit $\psi_0 = 1$, $c = 0$ wenn $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz; $\psi_0 = 0$, $c = 1$ wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$; $\psi_0 = 1$, $\psi_n = 0$ wenn n ganz positiv ist. Mit den Abkürzungen $\Omega_{\nu_0}(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \cdots \omega_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1})$, $\Psi_{\nu_0}(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \cdots \psi_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1}) + c\,\Omega_{\nu_0}(x)\log x$ gehen die Randbedingungen $[\alpha, v]_0 = 0$ nach [*10*] in (13) über mit

$$v_0 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x)}{x^{\varrho_1}}, \qquad v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v_0 \Psi_{\nu_0}(x)}{x^{\varrho_1}} \quad \text{für} \quad \varrho_1 \neq \varrho_2 \quad \text{und reell},$$

$$v_0 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x)}{x^{\varrho_1}\log x}, \qquad v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v_0 \Psi_{\nu_0}(x)}{x^{\varrho_1}} \quad \text{für} \quad \varrho_1 = \varrho_2.$$

Hinreichend: Man hat $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$, also $v_0 = v(0)$. Weiter ergibt sich $k_0 = k_1 = 0$, da doch $\nu_0 > 1$ sein muß. c bestimmt sich aus der Gleichung $\lambda k_1 - q_1 + c\,p_0 = 0$. Also $c = 0$. Nun ist $\Psi_{\nu_0}(x) = 1 + \widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x)$ mit $\widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x) = \psi_2 x^2 + \cdots \psi_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1}$. Daher wird

$$v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v(0)}{x} - \lim_{x\to 0} v(0) \frac{\widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x)}{x} = v'(0).$$

Notwendig: Ersichtlich ist $\varrho_1 = \varrho_2$ auszuschließen. Wenn $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist, dann muß $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$ sein. Aus (12) folgt $\sigma = q_0 = 0$, da doch $k_0 = k_1 = 0$ ist, weil bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vorliegt. Wir haben $v_0 = v(0)$. Die Forderung $v_1 = v'(0)$ bedingt $\lim_{x\to 0} \frac{\Psi_{\nu_0}(x) - 1}{x} = 0$. Dies ist genau dann erfüllbar, wenn $c = 0$ ist und dies tritt genau dann ein, wenn $q_1 = 0$ ist. Bei Beachtung von (13) ist unser Satz bewiesen.

Schlußbemerkung.

Ist unter den Voraussetzungen (II) und (III) $\int_l^m \sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}}\,dx = \infty$, so liegt bei $x = l$ der Grenzpunktfall vor ([*11*] S. 353). Ist $x = l$ parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken, so werden wir also im allgemeinen mit dem Vorliegen des Grenzpunktfalles auf $x = l$ rechnen müssen. Wir wissen bereits (Abschnitt I, § 2), daß bezüglich der Stellbarkeit der einfachen Randbedingung (5), heuristisch gesprochen, ein parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen einem hyperbolischen Rand unter den Voraussetzungen (I) wesentlich näher steht, als ein parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken. Sind die Koeffizienten in (1) konstant, $m = +\infty$, so ist Voraussetzung (III) erfüllt und nach dem obigen RELLICHschen Kriterium liegt bei $x = m$ der Grenzpunktfall vor. Eine Durchsicht derjenigen Probleme der mathematischen Physik, in denen die Randbedingung $u \to 0$ für $x \to +\infty$ gestellt wird, zeigt, daß vom mathematischen Stand-

punkt nicht ein physikalischer Sachverhalt, sondern das Vorliegen des Grenzpunktfalles für die Bedingung $\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < \infty$ verantwortlich ist.

Existenzsätze für den Grenzkreisfall, sowie der Nachweis, daß weite Klassen von Problemen die Abschätzungen (14) und (15) erfüllen, sollen später gegeben werden.

Literatur.

[1] Bromwich, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series, 2. Aufl., S. 504. London 1926. — [2] Churchill, R. V.: The solution of linear boundary-value problems in physics by mean of the Laplace-Transformation. Part I: A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Ann. **114**, 591—613 (1937). — [3] Churchill, R. V.: Modern operational mathematics in engineering. New York 1944. — [4] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II, S. 202—222. Berlin 1937. — [5] Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937. — [6] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I: Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950. — [7] Friedrichs, K.: Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **112**, 1—23 (1935). — [8] Mächler, W.: Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Comm. Math. Helv. **5**, 256—304 (1933). — [9] Plancherel, M.: Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel. Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925). — [10] Rellich, F.: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.) Math. Z. **49**, 702—723 (1943/44). — [11] Rellich, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1950/51). — [12] Riesz, F., u. B. Sz. Nagy: Lecons d'analyse fonctionelle. Budapest 1952. — [13] Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. New York 1932. — [14] Tamarkin, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations etc. Math. Z. **27**, 1—54 (1927). — [15] Weyl, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220—269 (1909). — [16] Bergmann, S.: On solutions of linear partial differential equations of mixed type. Amer. J. Math. **74**, 444—474 (1952). — [17] Bers, L.: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. N. A. C. A. Technical Note No. 2058. 1950. — [18] Germain, P., et R. Bader: Sur quelques problèmes aux limites singuliers pour une équation hyperbolique. C. R. Acad. Sci., Paris **231**, 268 (1950). — [19] Protter, M. H.: A boundary value problem for an equation of mixed type. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 416—429 (1951). — [20] Feller, W.: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. Ann. of Math. **55**, 468—519 (1952).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.

(Eingegangen am 20. Dezember 1952.)

BARTHEL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 358—375 (1953)

Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie.

Von
WOLDEMAR BARTHEL.

In der vorliegenden Arbeit soll eine wesentlich auf dem Inhaltbegriff begründete Geometrie der Minkowskischen Räume untersucht werden. Hierzu ist nötig, zuerst eine geeignete Inhaltsdefinition zu geben. Da die Geometrie im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht, gehen wir auf maßtheoretische Gesichtspunkte nicht näher ein.

Nachdem man sich lange vergeblich um eine Inhaltsdefinition in Minkowskischen Räumen bemüht hatte, führte als erster BUSEMANN eine systematische Behandlung dieses Problems durch (vgl. [2], [4] und [5]). Er löste es in folgender Weise: M sei ein Stück einer p-dimensionalen Ebene V_p des Minkowskischen Raumes. In einem zugeordneten euklidischen Raum bezeichne $|M|_p^E$ den p-dimensionalen euklidischen Inhalt von M. Weiter sei $U(V_p)$ die Menge, in welcher V_p die volle Minkowskische Einheitskugel schneidet, deren Mittelpunkt auf V_p liegt. Setzt man dann

$$\sigma(V_p) = \frac{\omega^{(p)}}{|U(V_p)|_p^E}, \qquad \text{wo} \qquad \omega^{(p)} = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)},$$

so wird der p-dimensionale Minkowskische Inhalt von M durch

$$|M|_p = \sigma(V_p)\,|M|_p^E$$

erklärt. Mit anderen Worten, der Minkowskische Inhalt ist dem euklidischen proportional, wobei als Faktor das Verhältnis der euklidischen Inhalte der euklidischen und Minkowskischen Einheitskugel in jener p-dimensionalen Ebene benutzt wird. Für den Minkowskischen Inhalt eines beliebigen p-dimensionalen Flächenstückes $x^i(u^1, \ldots, u^p)$ ergibt sich dann bei rechtwinkligen Koordinaten

$$\int \sigma(V_p(u)) \sqrt{\sum \left(\frac{\partial(x^{i_1} \ldots x^{i_p})}{\partial(u^1 \ldots u^p)}\right)^2}\, du^1 \ldots du^p.$$

Natürlich ist der Flächeninhalt unabhängig von der speziellen Wahl des assoziierten euklidischen Raumes.

An dieser Inhaltsdefinition ist verschiedentlich kritisiert worden, daß sie euklidische Hilfsmittel benutzt, welche in der Minkowskischen Problemstellung völlig fremd erscheinen. Außerdem ist man versucht einzuwenden, daß mit dieser Darstellung nicht gerechnet werden kann.

In unseren Untersuchungen soll nun eine andere Formulierung des Busemannschen Inhaltsbegriffes gegeben werden, die von einem euklidischen

Hintergrund frei ist und nützliche Rechenregeln abzuleiten gestattet. Von dieser Grundlage aus wird dann eine analytische Geometrie der Minkowskischen Räume entwickelt sowie die Krümmung von Kurven und Hyperflächen diskutiert. Dabei lassen wir uns von dem Grundgedanken leiten, daß man zu einer befriedigenden Darstellung der Minkowskischen Geometrie nur gelangen kann, wenn das *Inhalts*maß neben der *Längen*messung gleichberechtigt benutzt wird. Hierin unterscheiden sich diese Untersuchungen gegenüber den Arbeiten von Herrn Rund [7], in denen die Minkowskische Geometrie allein auf dem Längenmaß begründet wird. Jene Notwendigkeit, den Vorrang des Längenbegriffes vor der Inhaltsmessung aufzuheben, wird in den Finslerschen, d.h. lokal-Minkowskischen Räumen noch viel deutlicher zutage treten. Wir haben die Absicht, darüber in einer anderen Arbeit zu berichten.

1. Definition des Minkowskischen Raumes.

Ein *Minkowskischer Raum* $\mathfrak{M}_n$ ist ein n-dimensionaler affiner Raum, in dem zwei Punkte $a=(a^1, \ldots, a^n)$ und $b=(b^1, \ldots, b^n)$ den Abstand

$$L(b-a)$$

besitzen. Dabei setzen wir von der Funktion $L(X)=L(X^1, \ldots, X^n)$ folgende Eigenschaften voraus:

I. $L(X)>0$ für $X \neq 0$.
II. $L(X)=L(-X)$.
III. $L(\lambda X)=\lambda L(X)$ für $\lambda>0$.
IV. $L(X)+L(Y)>L(X+Y)$ für linear unabhängige Vektoren X, Y.
V. $L(X)$ ist dreimal stetig differenzierbar.

Geometrisch bedeutet dies, daß der Abstand stets positiv und von der Reihenfolge beider Punkte unabhängig ist, sowie daß das λ-fache eines Vektors auch die λ-fache Länge besitzt. Für eine glatte Kurve $x(t)$ erhalten wir mit dem üblichen Grenzprozeß die Länge

$$\int L(\dot{x})\, dt,$$

welche nach III von der Parameterwahl unabhängig ist. Die Dreiecksungleichung in der strengen Form hat zur Folge, daß zwischen zwei Punkten genau eine kürzeste Verbindung existiert, nämlich ihre geradlinige Verbindungsstrecke.

Wir nennen den Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt a konstanten Abstand r haben,

$$L(x-a)=r,$$

Minkowskische Kugel $\mathfrak{c}(a, r)$. Diese sind alle homothetisch und wegen der Dreiecksungleichung IV streng konvex. Als Einheitskugel $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}(a, 1)$ tritt hier also die Indikatrix des von der Grundfunktion definierten Variationsproblems auf. Die Vollkugel

$$L(x-a) \leq r$$

soll mit $\mathfrak{C}(a, r)$ bezeichnet werden.

2. Inhaltsdefinition im $\mathfrak{M}_n$.

Das erste Problem der Minkowskischen Geometrie ist die Definition des Volumens und Flächeninhaltes. Wir gehen dabei zunächst wie in der analytischen Geometrie des euklidischen Raumes vor (vgl. [8] § 10). Wird ein Parallelotop durch die Vektoren $A_1, \ldots, A_n$ aufgespannt, so besitze sein Rauminhalt $J(A_1, \ldots, A_n)$ die Eigenschaften:

I. $J(A_1, \ldots, A_n) \geq 0$.

II. $J(A_1, \ldots, A_i + A_k, \ldots, A_n) = J(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ für $i \neq k$.

III. $J(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n) = |\lambda| J(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$.

Nach einem bekannten Satz (s. [8] S. 124 und S. 118) existiert bis auf einen konstanten Faktor genau eine Funktion mit diesen drei Eigenschaften, nämlich

$$J(A_1, \ldots, A_n) = \mathfrak{F}^{(n)} |\| A_1 \ldots A_n \||, \qquad \mathfrak{F}^{(n)} \geq 0.$$

Für das Volumen eines n-dimensionalen Gebietes $\mathfrak{G}$ erhalten wir mit dem üblichen Grenzprozeß bei positiver Orientierung des Integralelementes

$$J(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}^{(n)} \int_{\mathfrak{G}} dx^1 \ldots dx^n. \tag{2.1}$$

Die noch willkürliche Konstante $\mathfrak{F}^{(n)}$ bestimmen wir nun durch die weitere Forderung:

IV. Die n-dimensionale Einheitskugel $\mathfrak{C}_1$ besitzt in allen Minkowskischen Räumen dasselbe Volumen.

Da im n-dimensionalen euklidischen Raum das Volumen der Einheitskugel den Wert

$$\omega^{(n)} \equiv \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

besitzt, besagt die vierte Eigenschaft

$$J(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{F}^{(n)} \int_{L(X) \leq 1} dX^1 \ldots dX^n = \omega^{(n)}.$$

Damit ergibt sich für die festzulegende Konstante

$$\mathfrak{F}^{(n)} = \frac{\omega^{(n)}}{\int_{L(X) \leq 1} dX^1 \ldots dX^n}. \tag{2.2}$$

Nunmehr ist das Volumen in Minkowskischen Räumen durch die vier genannten Postulate eindeutig bestimmt.

Zur Definition des Flächeninhaltes schlagen wir folgenden Weg ein. Die Metrik des $\mathfrak{M}_n$ induziert in jeder p-Ebene

$$x^i = x^i_\varrho U^\varrho + a^i \qquad (\varrho = 1, \ldots, p;\ 0 < p < n)$$

die Minkowskische Maßbestimmung

$$\overline{L}(U^\varrho) = L(x^i_\varrho U^\varrho).$$

Die Kugeln dieses induzierten $\mathfrak{M}_p$ entstehen daher als Schnitt der p-Ebene mit jenen Kugeln des $\mathfrak{M}_n$, deren Mittelpunkt auf dieser Ebene liegt. Den Inhalt einer Ebene definieren wir nun durch das Prinzip, daß er eine *innere* Eigenschaft darstellen soll:

Der p-Flächeninhalt einer p-Ebene des $\mathfrak{M}_n$ sei gleich dem p-Volumen des in dieser Ebene induzierten $\mathfrak{M}_p$.

Natürlich wird jetzt der innerhalb der Ebene konstante Faktor $\mathfrak{F}^{(p)} \equiv F^{(p)}(x_\varrho^i)$ von der Ebenenstellung im $\mathfrak{M}_n$ abhängig. Wir erhalten also für ein Ebenenstück $\mathfrak{G}$ den Flächeninhalt

$$J^{(p)} = F^{(p)}(x_\varrho^i) \int_{\mathfrak{G}} du^1 \dots du^p$$

mit

$$F^{(p)}(x_\varrho^i) = \frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(x_\varrho^i U^\varrho) \leq 1} dU^1 \dots dU^p}. \tag{2.3}$$

Hier zeigt sich erst der wesentliche Kern der vierten Volumeneigenschaft, daß der Inhalt der Einheitskugel für *alle* $\mathfrak{M}_p$ eine (dimensionsabhängige) *Konstante* sein soll. Sie führt nämlich zu der entscheidenden Inhaltsfunktion $F^{(p)}(x_\varrho^i)$. Die besondere Wahl jener Konstanten ist ganz unwesentlich und sichert nur bei Spezialisierung auf euklidische Räume den Anschluß an die dort übliche Konvention.

Um den Inhalt einer beliebigen Fläche zu gewinnen, benutzen wir als zweites Prinzip:

Das Element des p-Inhaltes einer p-Fläche des $\mathfrak{M}_n$ sei in jedem Punkt gleich dem p-Inhaltselement der p-dimensionalen Minkowskischen Tangentialebene.

Die Fläche $x^i = x^i(u^\varrho)$ mit den Tangentialräumen

$$\dot{x}^i = x_\varrho^i(u)\,\dot{u}^\varrho, \quad \text{wo} \quad x_\varrho^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho},$$

besitzt also den Inhalt

$$J^{(p)} = \int_{\mathfrak{G}} F^{(p)}\left(x_\varrho^i(u)\right) du^1 \dots du^p. \tag{2.4}$$

Nunmehr ist leicht zu sehen, daß diese Inhaltsdefinition für $p = 1$ mit der Minkowskischen Längenmessung identisch ist. Durch Integration ergibt sich nämlich wegen der Symmetrie der Indikatrix

$$\int\limits_{L(x_1^i U) \leq 1} dU = 2U \Big|_0^{\frac{U}{L(x_1^i U)}} = \frac{2}{L(x_1^i)},$$

also mit $\omega^{(1)} = 2$

$$J^{(1)} = \int L\left(x_1^i(u)\right) du.$$

Dies ist übrigens die einzige Stelle, an der die zweite Eigenschaft unserer Grundfunktion $L(X)$ wesentlich ist.

Ganz entsprechend, wie sich die Länge eines Vektors A und das Volumen eines Parallelotops $A_1, \ldots, A_n$ durch die Ausdrücke

$$J^{(1)} = F^{(1)}(A) = L(A)$$

bzw.

$$J^{(n)} = F^{(n)}(A_k) \equiv \mathfrak{F}^{(n)} |\| A_1 \ldots A_n \|\|$$

darstellt, läßt sich auch der p-Inhalt eines von $A_1, \ldots, A_p$ aufgespannten p-dimensionalen Parallelotops des $\mathfrak{M}_n$ berechnen:

$$J^{(p)} = F^{(p)}(A_\varrho).$$

Diese Funktion ist ursprünglich nur für linear unabhängige Kantenvektoren erklärt. Wir erweitern jedoch ihren Definitionsbereich auf linear abhängige A_ϱ, indem wir sie dort Null setzen.

Eigenschaften der Inhaltsfunktion. Die allgemeine Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_\varrho)$ besitzt eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, die beim späteren Gebrauch unentbehrlich sind. Sie sollen jetzt abgeleitet werden.

I. $F^{(p)}(X_\varrho) > 0$ für linear unabhängige X_ϱ.

II. Bei affiner Transformation der Vektoren X_ϱ,

$$X_\varrho = X_{\varrho'} U^{\varrho'}_\varrho \quad \text{mit} \quad \Delta = \|U^{\varrho'}_\varrho\| \neq 0,$$

verhält sich $F^{(p)}(X_\varrho)$ wie eine p-Dichte vom Gewicht $+1$

$$F^{(p)\prime}(X_{\varrho'}) = |\Delta|^{-1} F^{(p)}(X_\varrho).$$

III. $F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots X_\sigma \ldots) = F^{(p)}(\ldots X_\sigma \ldots X_\varrho \ldots)$.

IV. $F^{(p)}(\ldots X_\varrho + \lambda X_\sigma \ldots) = F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots)$ für $\sigma \neq \varrho$.

V. $F^{(p)}(\ldots \lambda X_\varrho \ldots) = |\lambda| F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots)$.

VI. $F^{(p)}(X_\varrho)$ ist ebenso oft stetig differenzierbar wie die Grundfunktion $L(X)$.

VII. $\dfrac{\partial F^{(p)}}{\partial X^i_\varrho} X^i_\sigma = F^{(p)} \delta^\varrho_\sigma$.

Die Positivität folgt aus der Definition (2.3), da dort auch der Nenner eine positive Größe ist.

Zur Bestimmung der Transformationsweise führen wir in (2.3) neue Integrationsvariable

$$U^{\varrho'} = U^{\varrho'}_\varrho U^\varrho$$

ein. Dann ist

$$X_{\varrho'} U^{\varrho'} = X_\varrho U^\varrho$$

und, weil das Integralelement stets positiv sein soll,

$$dU^{1'} \ldots dU^{p'} = |\Delta| \, dU^1 \ldots dU^p.$$

Wir erhalten also

$$\frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(X_{\varrho'} U^{\varrho'}) \leq 1} dU^{1'} \ldots dU^{p'}} = |\Delta|^{-1} \frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(X_\varrho U^\varrho) \leq 1} dU^1 \ldots dU^p}.$$

Die nächsten drei Eigenschaften sind einfache Folgen dieser Transformationsweise. Man braucht nur die Transformationen

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho, \sigma$$
$$X_\varrho = X_{\sigma'}$$
$$X_\sigma = X_{\varrho'}$$

oder

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho$$
$$X_\varrho = X_{\varrho'} + \lambda X_{\sigma'}$$

oder

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho$$
$$X_\varrho = \lambda X_{\varrho'}$$

durchzuführen, für die $|\Delta|$ jeweils 1, 1 und $|\lambda|$ beträgt.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit ist zunächst eine Umformung von

$$\int_{L(X_\varrho U^\varrho) \leq 1} dU^1 \dots dU^p$$

notwendig. Hat die Oberfläche der p-Indikatrix $L(X_\varrho U^\varrho) = 1$ die Parameterdarstellung

$$U^\alpha = U^\alpha(w^2, \dots, w^p),$$

so können die Punkte der vollen p-Indikatrix $L(X_\varrho U^\varrho) \leq 1$ durch

$$U^\alpha = w^1 U^\alpha(w^2, \dots, w^p) \quad \text{mit} \quad 0 \leq w^1 \leq 1$$

dargestellt werden. Wegen

$$\frac{\partial(U^1, \dots, U^p)}{\partial(w^1, \dots, w^p)} = \left\| U^\alpha, w^1 \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2}, \dots, w^1 \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^p} \right\|$$
$$= (w^1)^{p-1} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^p} \right\|$$

erhalten wir, wenn diese Determinante stets positiv gewählt wird,

$$\int_{L \leq 1} dU^1 \dots dU^p = \int_{L \leq 1} (w^1)^{p-1} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \right\| dw^1 \dots dw^p$$
$$= \oint_{L=1} \frac{(w^1)^p}{p} \Big|_0^1 \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \right\| dw^2 \dots dw^p$$
$$= \frac{1}{p} \oint_{L=1} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \right\| dw^2 \dots dw^p.$$

Setzen wir im Integranden für U^α den Einheitsvektor $\frac{U^\alpha}{L(X_\varrho U^\varrho)}$, so können wir statt über die Indikatrixfläche über eine beliebige geschlossene Fläche $U^\alpha = U^\alpha(w^2, \dots, w^p)$ integrieren, die von jedem Strahl durch $U^\alpha = 0$ nur einmal

getroffen wird. Dann erhalten wir nämlich

$$(2.5)\qquad \int\limits_{L(X_\varrho U^\varrho)\leq 1} dU^1 \dots dU^p = \frac{1}{p}\oint \frac{1}{L^p(X_\varrho U^\varrho)} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \right\| dw^2 \dots dw^p,$$

wobei das Integrationsgebiet des Randintegrals nicht mehr von den Variablen X_ϱ abhängt. Wir können daher die Differentiation mit der Randintegration vertauschen, womit die Eigenschaft VI bestätigt wird.

Aus Gl. IV folgt durch Differentiation nach λ, wenn nachträglich $\lambda = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\sigma^i = 0 \qquad (\varrho \neq \sigma).$$

Ebenso differenziert man Gl. V nach λ und setzt dann $\lambda = 1$,

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\varrho^i = F^{(p)} \quad \text{(über } \varrho \text{ nicht summieren)}.$$

Beide Resultate zusammen ergeben aber gerade die Eigenschaft VII.

Die Oberflächenfunktion $f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$. Führt man die zur Hyperebenenrichtung $x_1^i, \dots, x_{n-1}^i$ normale Vektordichte

$$(2.6)\qquad \mathfrak{p}_k = \|\delta_k^i\, x_1^i \dots x_{n-1}^i\|$$

vom Gewicht (-1) ein, so läßt sich zeigen, daß $F^{(n-1)}(x_\varrho^i)$ nur eine Funktion der Unterdeterminanten $\mathfrak{p}_k$ der Matrix (x_ϱ^i) ist. Nehmen wir etwa die letzte Koordinate $\mathfrak{p}_n \neq 0$ an, so ergibt die Transformation

$$x_\varrho^i U^\varrho = -V^\mu \quad \text{für} \quad i = \mu = 1, \dots, n-1$$

wegen $\mathfrak{p}_i x_\alpha^i = 0$

$$x_\varrho^n U^\varrho = \frac{\mathfrak{p}_n x_\varrho^n U^\varrho}{\mathfrak{p}_n} = \frac{(\mathfrak{p}_i x_\varrho^i - \mathfrak{p}_\mu x_\varrho^\mu) U^\varrho}{\mathfrak{p}_n} = -\frac{\mathfrak{p}_\mu}{\mathfrak{p}_n} x_\varrho^\mu U^\varrho = \frac{\mathfrak{p}_\mu}{\mathfrak{p}_n} V^\mu$$

und

$$dV^1 \dots dV^{n-1} = |\mathfrak{p}_n|\, dU^1 \dots dU^{n-1}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen in die Definitionsgleichung (2.3) die gesuchte Umformung

$$(2.7)\qquad f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k) = F^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) = |\mathfrak{p}_n|\, F^{(n-1)}\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \\ \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_n} & \dots & \frac{\mathfrak{p}_{n-1}}{\mathfrak{p}_n} \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß diese Funktion in $\mathfrak{p}_k$ homogen ist

$$f^{(n-1)}(\lambda\, \mathfrak{p}_k) = |\lambda|\, f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k).$$

Auf die analoge Umformung der allgemeinen Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_\varrho)$ wollen wir hier nicht weiter eingehen.

3. Die Minkowskische Sinus-Funktion.

Nach Busemann führen wir eine Sinus-Funktion zwischen zwei linearen Vektorgebilden $A_1, \ldots, A_a$ und $B_1, \ldots, B_b$ des $\mathfrak{M}_n$ ein. Ihr d-dimensionaler Durchschnitt werde etwa von $A_1 = B_1, \ldots, A_d = B_d$ und ihre s-dimensionale Summe von $A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b$ aufgespannt, wobei

$$s + d = a + b, \qquad d \geq 0 \tag{3.1}$$

ist (vgl. [8] S. 42). Dann definieren wir unter der Voraussetzung

$$\operatorname{Min}(a, b) = d + 1 \text{ [1]} \tag{3.2}$$

den Minkowskischen Sinus

$$Sm(A_\alpha, B_\beta) = \frac{F^{(d)}(A_1, \ldots, A_d)\, F^{(s)}(A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)}{F^{(a)}(A_1, \ldots, A_a)\, F^{(b)}(B_1, \ldots, B_b)}. \tag{3.3}$$

Der nulldimensionale Inhalt des Nullvektors soll hierbei gleich 1 gesetzt werden. Natürlich ist diese Definition invariant gegen Transformationen der Basisvektoren aller auftretenden Vektorgebilde.

Unter der Sinus-Funktion zwischen einer a-Ebene und einer b-Ebene des $\mathfrak{M}_n$ verstehen wir den Sinus zwischen den sie aufspannenden linearen Vektorgebilden.

Man erkennt nun sofort die Eigenschaften:
$Sm(A_\alpha, B_\beta) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Vektorgebilde linear abhängig sind.
$Sm(A_\alpha, B_\beta) = Sm(B_\beta, A_\alpha)$.

Normalität und Transversalität. Für zwei lineare Vektorgebilde soll unter der Voraussetzung, daß der Sinus erklärt ist, die Normalität definiert werden:

$A_1, \ldots, A_a$ heiße *normal* zu $B_1, \ldots, B_b$, oder $B_1, \ldots, B_b$ *transversal* zu $A_1, \ldots, A_a$, wenn

$$Sm(A^*_\alpha, B_\beta) \leq Sm(A_\alpha, B_\beta)$$

für alle linearen Vektorgebilde A^*_α gilt, die mit B_β denselben Durchschnitt und dieselbe Summe wie A_α haben.

Zur Aufstellung einer Bedingung für das Maximum der Sinus-Funktion beachten wir, daß sie ihr Maximum in den A_α bei festem Durchschnitt im gegebenen Verbindungsraum genau dann annimmt, wenn

$$F^{(a)} = \text{Min} \quad \text{und} \quad F^{(s)} = \text{const}.$$

---

[1]) Nur unter dieser Voraussetzung läßt sich im euklidischen Raum die relative Lage der beiden Vektorgebilde durch *einen* Winkel ausdrücken: Sei nämlich etwa $a = d + 1$, so ist nach (3.1) $s = b + 1$. Dann existiert in der a-Ebene genau eine zum Durchschnitt orthogonale Gerade und ebenso im Verbindungsraum genau eine zur b-Ebene orthogonale Gerade. Das Komplement des Winkels dieser beiden Geraden ist nun der Winkel zwischen der a- und b-Ebene. — Vgl. [4] Abschnitt 2.

Für dieses Extremum mit Nebenbedingung ist notwendig

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}} - \lambda \frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}} = 0 \qquad (\bar\alpha = d+1, \ldots, a).$$

Damit sind aber die $(a-d)\,b$ Gleichungen

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}} B^i_\beta = 0 \tag{3.4}$$

äquivalent. Nach Eigenschaft VII besteht nämlich für die Funktion

$$F^{(s)}(A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)$$

die Identität

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}} B^i_\beta = 0,$$

und daher folgt aus (3.4) wieder

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}} = \lambda \frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar\alpha}}.$$

Nach Busemann gilt nun folgendes *Existenztheorem*[2]):

Es seien a, b, d, s ganze Zahlen ≥ 0 mit Min $(a, b) = d+1$ und $a+b = s+d$. Ein s-dimensionales und ein d-dimensionales lineares Vektorgebilde sei als Summe und Durchschnitt vorgegeben. Dann existiert zu einer b-Ebene B_β genau eine a-Ebene A_α, die *normal* zu B_β ist, und ebenso zu einer a-Ebene A_α genau eine b-Ebene B_β, die *transversal* zu A_α liegt.

Hiernach sind die notwendigen Bedingungen (3.4) auch als hinreichend erkannt.

Sinus zwischen Gerade und Hyperebene. Wir gehen noch etwas genauer auf den wichtigen Spezialfall des Sinus zwischen einer Geraden A^i und einer Hyperebene $x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}$ ein,

$$Sm(A, x_\varrho) = \frac{F^{(n)}(A, x_1, \ldots, x_{n-1})}{F^{(1)}(A)\; F^{(n-1)}(x_\varrho)} = \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \| A^i x^i_1 \ldots x^i_{n-1} \|}{L(A)\; F^{(n-1)}(x_\varrho)},$$

dem wir nun auch negative Werte erteilen können. Führen wir die normale Vektordichte (2.6) der Hyperfläche und die Oberflächenfunktion (2.7) ein, so ergibt sich

$$Sm(A, x_\varrho) = \frac{A^i}{L(A)} \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)}. \tag{3.5}$$

[2]) Der Beweis ([4] S. 164 bis 168), zu dem man eine kompliziertere Eigenschaft konvexer Körper benötigt, wird allerdings bei Busemann mit euklidischen Hilfsmitteln geführt. Bemerkenswert ist, daß die Eindeutigkeit einer Normal-Ebene aus der strengen Konvexität von $\mathfrak{c}_1$, die einer Transversal-Ebene aus der Differenzierbarkeit der Indikatrix folgt.

Dieser Sinus wird also durch das Skalarprodukt des *Einheits*vektors $\frac{A^i}{L(A)}$ der Geraden mit dem *normierten* kovarianten Normalvektor

$$N_i = \mathfrak{F}^{(n)} \frac{\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)} \tag{3.6}$$

der Hyperebene dargestellt.

Weil in unserem Spezialfall Durchschnitt und Verbindungsraum eindeutig festgelegt sind, stellen

$$\begin{cases} \operatorname{Max}_{A} |Sm(A, x_\varrho)| = \alpha(x_\varrho) \\ \operatorname{Max}_{x_\varrho} |Sm(A, x_\varrho)| = \alpha(A) \end{cases} \tag{3.7}$$

nur Funktionen der Hyperebenen bzw. Geraden des $\mathfrak{M}_n$ dar. Die Bedingung (3.4) lautet jetzt für eine Hyperebene x_ϱ transversal zur Geraden A

$$\frac{\partial L}{\partial A^i} x_\varrho^i = 0$$

bzw. für die Gerade A transversal zur Hyperebene x_ϱ

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x_\varrho^i} A^i = 0.$$

Der normierte *Transversalvektor* zu einer Hyperebene x_ϱ ist

$$n^i = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i}. \tag{3.8}$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x_\varrho^i} n^i &= \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^i} n^i \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k} \| \delta_k^i x_1^j \dots \overset{(\varrho)}{\delta_i^j} \dots x_{n-1}^j \| \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_j} x_1^j \dots \overset{(\varrho)}{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_j}} \dots x_{n-1}^j \right\| = 0. \end{aligned}$$

Wir nennen den Vektor n^i deshalb normiert, weil sein Skalarprodukt mit dem normierten kovarianten Normalvektor (3.6)

$$n^i N_i = 1 \tag{3.9}$$

ist, wie aus der Homogenität von $f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$ folgt.

Distanz eines Punktes von einer Hyperebene. Unter der Distanz eines Punktes von einer Hyperebene wollen wir das Volumen eines Parallelotops verstehen, das von einem in jener Hyperebene gelegenen $(n-1)$-dimensionalen Parallelotop mit dem Flächeninhalt 1 und jenem Punkt aufgespannt wird. Diese Distanz kann natürlich nicht als Minkowskischer Abstand zweier Punkte gedeutet werden.

Die Punkte einer Hyperebene, welche durch x_ϱ^i aufgespannt wird und vom festen Punkt a die Distanz r hat, genügen der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)}\,\|x^i - a^i\, x_1^i \ldots x_{n-1}^i\|}{F^{(n-1)}(x_\varrho^i)} = r.$$

Nach kurzer Umformung ergibt dies gerade die *Hessesche Normalform* einer Hyperebene

$$(x^i - a^i)\,\frac{\mathfrak{F}^{(n)}\,\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)} = r \tag{3.10}$$

oder die Darstellung

$$L(x-a)\,Sm(x-a, x_\varrho) = r. \tag{3.11}$$

4. Minkowskische Kugeln und Sphären.

Als erste Anwendung der eingeführten Begriffe diskutieren wir die Eigenschaften zweier interessanter Flächenklassen, die in folgender Weise definiert sind:

Die Gesamtheit aller Punkte, welche von einem festen Punkt a konstanten Abstand r besitzen, heißt n-dimensionale *Kugel* $\mathfrak{c}(a, r)$.

Die Gesamtheit aller Hyperebenen, welche von einem festen Punkt a konstante Distanz r haben, heiße n-dimensionale *Sphäre* $\mathfrak{z}(a, r)$.

Zur Aufstellung der Gleichung einer Sphäre müssen wir die Hüllfläche der Hyperebenenschar

$$(x^i - a^i)\,\mathfrak{p}_i = \frac{r}{\mathfrak{F}^{(n)}}\,f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$$

bestimmen. Sie ergibt sich (vgl. [1] S. 202f.) durch Differentiation nach den homogenen Scharparametern $\mathfrak{p}_k$. Damit können wir die Gleichungen der Kugel und Sphäre in (homogener) *Parameterschreibweise* gegenüberstellen:

$$x^i - a^i = r\,\frac{X^i}{L(X)} \quad \Big| \quad x^i - a^i = r\,\frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}}\,\frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i}. \tag{4.1}$$

Nach (3.8) ist aber die Tangentialhyperebene einer Sphäre transversal zum zugehörigen Radiusvektor. Dies setzen wir in die Gleichung der die Sphäre definierenden Hyperebenenschar ein, welche in der Form (3.11) gegeben sein soll. Wegen (3.7b) erhalten wir dann die *Polargleichung* der Sphäre im Vergleich zu der der Kugel

$$L(x-a) = r \quad \Big| \quad L(x-a)\,\alpha(x-a) = r. \tag{4.2}$$

Die Sphären sind also wie die Kugeln untereinander homothetisch. Weiterhin bestätigen die Betrachtungen der letzten Nummer folgende Eigenschaften:

Jede Tangentenhyperebene der Kugel ist *transversal* zum Radiusvektor.

Jede Tangentenhyperebene der Sphäre ist *normal* zum Radiusvektor.

Busemann zeigt nun, daß die Sphären streng konvexe und differenzierbare Flächen sind[3]).

Wie die Vollkugel mit $\mathfrak{C}(a,r)$, so soll die Vollsphäre

$$L(x-a)\,\alpha(x-a) \leqq r$$

mit $\mathfrak{Z}(a,r)$ bezeichnet werden. Um eine Aussage über ihr Volumen zu bekommen, führen wir für die Sphäre eine ähnliche Umformung wie in (2.5) durch

$$\begin{aligned} J^{(n)}(\mathfrak{Z}) &= \mathfrak{F}^{(n)} \int_{\mathfrak{Z}} dx^1 \dots dx^n \\ &= \frac{1}{n} \oint_{\mathfrak{z}} \mathfrak{F}^{(n)} \,||\, x^i - a^i\, x_1^i \dots x_{n-1}^i \,||\, du^1 \dots du^{n-1} \end{aligned}$$

und nach (4.1b)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \oint_{\mathfrak{z}} r\, \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k}\, \mathfrak{p}_k\, du^1 \dots du^{n-1} \\ &= \frac{r}{n} \oint_{\mathfrak{z}} f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)\, du^1 \dots du^{n-1}. \end{aligned}$$

Da das Kugelvolumen nach (2.2) festgelegt ist, gelten also die beiden Beziehungen

$$(4.3) \qquad J^{(n)}(\mathfrak{C}) = r^n \omega^{(n)} \;\Big|\; n\, J^{(n)}(\mathfrak{Z}) = r\, J^{(n-1)}(\mathfrak{z}).$$

Wir erwähnen noch einige sehr wichtige Eigenschaften, die Busemann genau untersucht hat (vgl. [2] sowie [3]):

$\mathfrak{C}(a,r)$ hat größtes Volumen unter allen Mengen vom Durchmesser $2r$. | $\mathfrak{Z}(a,r)$ löst das *isoperimetrische Problem*.

Weiterhin erhält man für die Oberfläche eines n-dimensionalen konvexen Körpers $\mathfrak{K}$

$$J^{(n-1)} = \lim_{r \to 0} \frac{J^{(n)}(\mathfrak{K}_r) - J^{(n)}(\mathfrak{K})}{r},$$

wobei der Parallelkörper $\mathfrak{K}_r$ durch

$$\mathfrak{K}_r = \bigcup_{x \in \mathfrak{K}} \mathfrak{Z}(x,r)$$

definiert ist.

Analog zur Indikatrix nennt Busemann die Einheitssphäre $\mathfrak{z}_1$ *Isoperimetrix*.

5. Krümmung der Kurven und Hyperflächen im $\mathfrak{M}_n$.

Nach der Darstellung der „analytischen Geometrie" des $\mathfrak{M}_n$ soll die Theorie der Krümmung von Kurven und Hyperflächen im Minkowskischen Raum skizziert werden. Dabei beschreiten wir den üblichen Weg, indem wir

[3]) Der Beweis (vgl. [4] S. 164 f.) benutzt wiederum jene Eigenschaft konvexer Körper, auf die in Fußnote 2 bereits hingewiesen wurde. Dabei ist sogar für die Differenzierbarkeit der Sphäre die strenge Konvexität der Indikatrix nötig; denn es muß ausgeschlossen werden, daß alle $\partial f^{(n-1)}/\partial \mathfrak{p}_i$ für einen gewissen Bereich der Variablen $\mathfrak{p}_k$ konstant sind.

die Krümmungsverhältnisse einer Hyperfläche durch die Krümmung gewisser Flächenkurven kennzeichnen — ein Prinzip, das sich in der Finslerschen Geometrie als nicht brauchbar erweisen wird.

Erste Krümmung einer Kurve $x(t)$. Als Kurvenparameter benutzen wir die Bogenlänge. Dann seien $x(s)$ ein fester Kurvenpunkt und $x(s+h)$, $x(s+k)$ zwei ihm benachbarte. Die erste Krümmung der Kurve werde nun nach Busemann (vgl. [4] Gl. 39) durch

$$\varkappa = 2 \lim_{h,k \to 0} \frac{Sm\,(x(s+h) - x(s),\, x(s+k) - x(s))}{|k-h|} \tag{5.1}$$

definiert. Zur Berechnung dieses Grenzwertes verwenden wir die Taylorsche Formel

$$x(s+h) - x(s) = h\,x'(s) + \frac{h^2}{2}\,x''(s) + (h^3).$$

Nach der Sinusdefinition und den Eigenschaften der Flächenfunktion erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} Sm\,(x(s+h) - x(s),\; x(s+k) - x(s)) &= \frac{F^{(2)}\left(h\,x' + \frac{h^2}{2}\,x'' + \cdots,\, k\,x' + \frac{k^2}{2}\,x'' + \cdots\right)}{L(h\,x' + \cdots)\,L(k\,x' + \cdots)} \\ &= \frac{F^{(2)}\left(x' + \cdots,\, \frac{k-h}{2}\,x'' + \cdots\right)}{L(x' + \cdots)\,L(x' + \cdots)} \\ &= \frac{|k-h|}{2}\,\frac{F^{(2)}(x' + \cdots,\, x'' + \cdots)}{L(x' + \cdots)\,L(x' + \cdots)}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (5.1) ein, so ergibt sich für die erste Krümmung einer Kurve

$$\varkappa = F^{(2)}(x', x'')$$

oder bei Transformation auf beliebige Parameter

$$\varkappa = \frac{F^{(2)}(\dot{x}, \ddot{x})}{L^3(\dot{x})} \geq 0. \tag{5.2}$$

Dabei ist $\varkappa = 0$ für die Geraden charakteristisch.

Dieser Ausdruck bei beliebiger Parameterwahl ist dem der gewöhnlichen Differentialgeometrie ganz analog (vgl. etwa [1] S. 27 Gl. (80)). Um auch für Bogenlängenparameter eine entsprechende Formel zu erhalten, berechnen wir den Inhalt des von x' und x'' aufgespannten Parallelogramms

$$F^{(2)}(x', x'') = L(x')\,L(x'')\,Sm\,(x', x'').$$

Dann ist

$$\varkappa = L(x'')\,Sm\,(x', x'') \tag{5.3}$$

wobei x'' *transversal* zu x' ist. Letzteres folgt nämlich aus $L(x') = 1$ durch Differentiation

$$\frac{\partial L(x')}{\partial x'^i}\,x''^i = 0.$$

Die von $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ aufgespannte Ebene heiße *Schmiegebene* $\mathfrak{S}$.

Normalkrümmung einer Hyperflächenkurve. Auf der Hyperfläche $x(u^\varrho)$ werde eine Kurve $x(u^\varrho(t))$ gewählt. Als deren *Normalkrümmung* bezeichnen wir den Ausdruck

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}),$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Schmiegebene der Kurve und $\mathfrak{T}$ die Tangentialhyperebene der Hyperfläche in dem betrachteten Punkt ist. Da nun $\mathfrak{S}$ von

$$\dot{x}^i = x^i_\alpha \dot{u}^\alpha, \quad \ddot{x}^i = x^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + x^i_\alpha \ddot{u}^\alpha$$

und $\mathfrak{T}$, wie wir annehmen können, von

$$\dot{x}^i, x^i_2, \ldots, x^i_{n-1} \qquad (\dot{u}^1 > 0)$$

aufgespannt wird, erhalten wir nach (3.3) und (3.6)

$$\begin{aligned} Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) &= \frac{L(\dot{x})\, \mathfrak{F}^{(n)} \left\| \ddot{x}^i \dot{x}^i x^i_2 \ldots x^i_{n-1} \right\|}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})\, F^{(n-1)}(\dot{x}, x_2, \ldots, x_{n-1})} \\ &= \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})} \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \left\| x^i_{\alpha\beta} x^1 \ldots x^i_{n-1} \right\|}{F^{(n-1)}(x_\varrho)} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \\ &= \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})} (x^i_{\alpha\beta} N_i) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta. \end{aligned}$$

Führt man die Abkürzung

$$\bar{L}(u, \dot{u}) = L(x^i_\varrho(u) \dot{u}^\varrho) \tag{5.4}$$

und

$$b_{\alpha\beta}(u) = x^i_{\alpha\beta} N_i \tag{5.5}$$

ein, so folgt wegen (5.2) für die Normalkrümmung

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{b_{\alpha\beta}(u)\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{\bar{L}^2(u, \dot{u})}. \tag{5.6}$$

In diesem Ergebnis tritt $\ddot{u}^\alpha$ nicht mehr auf. Damit haben wir den *Satz von Meusnier* bestätigt: Alle Hyperflächenkurven durch dasselbe Linienelement $(u, \dot{u})$ besitzen gleiche Normalkrümmung.

Bezeichnen wir jetzt die Krümmung einer Hyperflächenkurve, deren Schmiegebene $\mathfrak{S}$ die Hyperflächen-Transversale (3.8) enthält, mit $1/\varrho$, so gilt für die Normalkrümmung

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \pm \frac{1}{\varrho} \frac{L(\dot{x})\, n^k N_k}{F^{(2)}(\dot{x}, n)}$$

und wegen (4.2b)

$$= \pm \frac{1}{\varrho} \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\dot{x}, n)} L(n)\, \alpha(n),$$

also

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \pm \frac{1}{\varrho} \frac{\alpha(n)}{Sm(\dot{x}, n)}. \tag{5.7}$$

Dabei steht $+$ oder $-$, wenn $\ddot{x}^i$ nach derselben Seite wie n^i weist oder nicht.

Führen wir durch

$$\frac{\dot{u}^\alpha}{L(u,\dot{u})} = \sqrt{|\varkappa\, Sm(\mathfrak{S},\mathfrak{T})|}\,\dot{v}^\alpha$$

neue Veränderliche $\dot{v}^\alpha$ ein, dann gewinnen wir aus (5.6) die *Dupinsche Indikatrix*

$$b_{\alpha\beta}(u)\,\dot{v}^\alpha\,\dot{v}^\beta = \pm 1.$$

Sie ist homothetisch zur Näherungsschnittkurve der Hyperfläche, welche durch eine Parallelhyperebene zur Tangentialhyperebene in $x(u)$ mit der Distanz δ erzeugt wird. Nach (3.10) ist nämlich diese Schnittkurve

$$\begin{aligned}\left(x^i(u+du) - x^i(u)\right) N_i(u) &= \tfrac{1}{2}\, x^i_{\alpha\beta}\, N_i\, du^\alpha\, du^\beta + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}(u)\, du^\alpha\, du^\beta + \cdots = \delta.\end{aligned}$$

Wollte man jetzt die Hauptkrümmungen wie in der klassischen Differentialgeometrie durch die stationären Werte der Normalkrümmung festlegen, so stünde man vor der Schwierigkeit, daß im allgemeinen gar nicht $(n-1)$ reelle Hauptkrümmungen existieren. Es soll deshalb ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Weingartensche Ableitungsgleichungen. Als begleitendes n-Bein der Hyperfläche benutzen wir

$$x^i_\alpha, \qquad n^i = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}}\,\frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i},$$

wobei der normierte Vektor n^i *transversal* zur Hyperfläche ist. Die Minkowskische Einheitssphäre stellt also das „Transversalenbild" der Hyperfläche dar. Wählen wir noch die kovarianten Vektoren

$$X^\alpha_i = \frac{1}{F^{(n-1)}}\,\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\alpha}, \qquad N_i = \frac{\mathfrak{F}^{(n)}\,\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}},$$

wobei der normierte Vektor N_i *normal* zur Hyperfläche steht, so gelten die Rechenregeln

$$X^\alpha_i\, n^i = 0, \qquad x^i_\alpha\, N_i = 0$$

und

$$X^\alpha_i\, x^i_\beta = \delta^\alpha_\beta, \qquad n^i\, N_i = 1.$$

Nun erhält man aus dem Ansatz

$$n^i_\alpha = -\,B^\beta_\alpha\, x^i_\beta + C_\alpha\, n^i$$

durch Überschieben mit N_i

$$\begin{aligned}C_\alpha &= n^i_\alpha\, N_i \\ &= \frac{\partial^2 f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i\, \partial \mathfrak{p}_k}\,\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial u^\alpha}\,\frac{\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}}.\end{aligned}$$

Wegen der Homogenität nullter Ordnung von $\dfrac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k}$ folgt dann

$$C_\alpha = 0.$$

Überschieben wir unseren Ansatz dagegen mit X_i^β, so ergibt sich

$$-B_\alpha^\beta = n_\alpha^i X_i^\beta = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial^2 f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^\tau} x_{\varrho\alpha}^\tau X_i^\beta$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{1}{f^{(n-1)}} \frac{\partial^2 \frac{1}{2}(f^{(n-1)})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^\tau} x_{\varrho\alpha}^\tau X_i^\beta.$$

Aus der Definition (2.6) der Vektordichte $\mathfrak{p}_k$ gewinnt man nach den Determinantensätzen die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\sigma^\tau} x_\sigma^s = \mathfrak{p}_k \delta_\tau^s - \mathfrak{p}_\tau \delta_k^s,$$

die durch Multiplikation mit X_s^ϱ in

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^\tau} = \mathfrak{p}_k X_\tau^\varrho - \mathfrak{p}_\tau X_k^\varrho \tag{5.8}$$

übergeht. Setzen wir dies in den zu berechnenden Ausdruck ein, so erhalten wir nach (5.5)

$$B_\alpha^\beta = b_{\alpha\varrho} G^{\varrho\beta}, \tag{5.9}$$

wenn man die Bezeichnungen

$$G^{ik}(\mathfrak{p}_\tau) = \frac{1}{(\mathfrak{F}^{(n)})^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{2}(f^{(n-1)})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \tag{5.10}$$

und

$$G^{\varrho\sigma}(u) = G^{ik}(\mathfrak{p}_\tau) X_i^\varrho X_k^\sigma \tag{5.11}$$

einführt. Die Weingartenschen Gleichungen

$$n_\alpha^i = -B_\alpha^\beta x_\beta^i \tag{5.12}$$

zeigen, daß die Zuordnung zwischen einer Hyperfläche und ihrem sphärischen Bild durch parallele Tangentialhyperebenen erzeugt wird. Die Hyperflächentheorie im $\mathfrak{M}_n$ ist also eine Relativgeometrie der Hyperfläche bezüglich der Isoperimetrix.

Für kovariante Vektoren lauten die Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$N_{i\alpha} = -b_{\alpha\beta} X_i^\beta. \tag{5.13}$$

Hauptkrümmungen. Wir suchen jetzt die Hauptkrümmungsrichtungen auf der Hyperfläche, d.h. diejenigen Richtungen $\dot{u}^\alpha$, für welche

$$n_\alpha^i \dot{u}^\alpha = -\frac{1}{R} x_\alpha^i \dot{u}^\alpha$$

ist. Nach Einsetzen der Ableitungsgleichungen (5.12) ergibt sich

$$\left(B_\alpha^\varrho - \frac{1}{R} \delta_\alpha^\varrho\right) \dot{u}^\alpha x_\varrho^i = 0.$$

Daraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der Tangentenvektoren x_ϱ^i

$$\left(B_\alpha^\varrho - \frac{1}{R}\,\delta_\alpha^\varrho\right)\dot{u}^\alpha = 0.$$

Berücksichtigen wir bei unseren weiteren Untersuchungen nur Hyperflächenpunkte mit

(5.14) $$G^{\varrho\sigma}(u)\,\xi_\varrho\,\xi_\sigma > 0 \quad \text{für} \quad \xi_\alpha \neq 0,$$

so ist $||G^{\varrho\sigma}|| > 0$, und es läßt sich durch

$$G^{\varrho\sigma}\,G_{\varrho\tau} = \delta_\tau^\sigma$$

der kovariante Hyperflächentensor $G_{\varrho\tau}(u)$ einführen. Wir können dann unsere Gleichung für die Hauptkrümmungsrichtungen mit $G_{\varrho\beta}$ überschieben

$$\left(b_{\alpha\beta} - \frac{1}{R}\,G_{\alpha\beta}\right)\dot{u}^\alpha = 0.$$

Weil nun nicht alle Richtungskomponenten $\dot{u}^\alpha$ verschwinden dürfen, erhalten wir

(5.15) $$\left\|b_{\alpha\beta} - \frac{1}{R}\,G_{\alpha\beta}\right\| = 0.$$

Diese verallgemeinerte Säkulargleichung zeigt, daß nur *reelle* Hauptkrümmungen $1/R$ existieren (vgl. [6] S. 14). Wie man weiter erkennt, gibt es in jedem Hyperflächenpunkt, welcher der Voraussetzung (5.14) genügt, genau $(n-1)$ linear unabhängige reelle Hauptkrümmungsrichtungen.

Zum Abschluß dieser Betrachtungen über Krümmungen von Kurven und Hyperflächen im $\mathfrak{M}_n$ soll noch eine *geometrische* Interpretation der Hauptkrümmungen abgeleitet werden. Hierbei wählen wir Krümmungslinien als Parameterkurven. Dann gelten nämlich die *Formeln von Rodrigues*

(5.16) $$n_\alpha^i = -\frac{1}{R^{(\alpha)}}\,x_\alpha^i.$$

Aus ihnen folgt

$$L^2(n_\alpha^i) = \frac{1}{(R^{(\alpha)})^2}\,L^2(x_\alpha^i)$$

und außerdem durch Multiplikation mit $N_{i\alpha}$ nach (5.13)

$$b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle = -\frac{1}{R^{(\alpha)}}\,b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle,$$

wobei $b_{\alpha\alpha}$ jeweils auf der Hyperfläche $x^i(u)$ bzw. ihrem sphärischen Bild $n^i(u)$ zu nehmen ist. Weiterhin ist wegen (5.6) und (5.7) in Richtung der α-ten Parameterkurve

$$\pm\frac{1}{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}\,\frac{\alpha(n^i)}{Sm(x_\alpha^i, n^i)} = \frac{b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle}{L^2(x_\alpha^i)}$$

und auf dem sphärischen Bild in derselben Richtung

$$-\frac{1}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle}\,\frac{\alpha(n^i)}{Sm(n_\alpha^i, n^i)} = \frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{L^2(n_\alpha^i)}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich nun

$$\pm \frac{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle} = \frac{L^2(x_\alpha^i)}{b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle} \frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{L^2(n_\alpha^i)} = R^{(\alpha)}.$$

Damit erhält die Hauptkrümmung $1/R^{(\alpha)}$ eine entsprechende geometrische Deutung wie in der Relativgeometrie:

$$R^{(\alpha)} = \pm \frac{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle}. \tag{5.17}$$

Hierbei ist also $1/\varrho^{(\alpha)}$ die Krümmung einer Hyperflächenkurve, deren Schmiegebene von der zu $1/R^{(\alpha)}$ gehörenden Hauptkrümmungsrichtung und der Hyperflächentransversalen n^i aufgespannt wird. Auf diese Weise läßt sich die Krümmung einer Hyperfläche des $\mathfrak{M}_n$ auf die *Kurvenkrümmung* zurückführen.

Literatur.

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl. 1945. — [2] Busemann, H.: Intrinsic area. Ann. of Math. (2) **48**, 755—781 (1947). — [3] Busemann, H.: The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). — [4] Busemann, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [5] Busemann, H.: The geometry of Finsler spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **57**, 5—16 (1950). — [6] Perron, O.: Algebra, Bd. 2. — [7] Rund, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie der Minkowskischen Räume. Arch. Math. **3**, 60f. (1952). — [8] Sperner, E.: Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 1. Teil. 1948.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

KNESER, M., und D. PUPPE
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 376—384 (1953)

Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von
MARTIN KNESER und DIETER PUPPE.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist in Verschärfung von [7] der Nachweis, daß die quadratische Form eines Knotens (GOERITZ [3]) und die eindimensionale Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes, aufgefaßt als Gruppe mit Verschlingung, sich gegenseitig eindeutig bestimmen. Der Beweis dieses Satzes ist, wenn man sich auf das Ergebnis von SEIFERT [8] stützt, rein algebraischer Natur und zeigt zugleich, ganz unabhängig von der Knotentheorie, einen engen Zusammenhang zwischen Gruppen ungerader Ordnung mit Verschlingung und gewissen Klassen quadratischer Formen. Der gleiche Zusammenhang besteht auch für Gruppen gerader Ordnung, doch erfordert der Beweis dafür weitere Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen. So tritt insbesondere an die Stelle des hier benutzten Satzes von MEYER über Geschlechter indefiniter quadratischer Formen der allgemeinere Satz von EICHLER ([4] S. 99), und daher ist ein Eingehen auf die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppen (vgl. [4] § 4) nötig. Um den Beweis möglichst einfach zu halten, ist hier nur der für die Knotentheorie interessante Spezialfall von Gruppen ungerader Ordnung, in dem man ohne diese Hilfsmittel auskommt, durchgeführt.

§ 1. Die quadratische Form eines Knotens.

Jeder regulären Projektion einer Knotenlinie ist nach GOERITZ [3] eine ganzzahlige symmetrische Matrix $A = (a_{ik})$ (d.h. die quadratische Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$) mit ungerader Determinante zugeordnet. Sie ist durch den Knoten (d.h. die Isotopieklasse der Knotenlinie) bis auf folgende Abänderungen bestimmt:

Q_1: Unimodulare Transformation: $A \to S' A S$ mit S ganz und $|S| = \pm 1$.

Q_2: „Anhängen von ± 1“:

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

sowie die umgekehrte Operation.

Die durch diese zulässigen Abänderungen definierte Äquivalenzklasse von quadratischen Formen wird kurz als die „quadratische Form des Knotens“ bezeichnet.

Die eben behauptete Invarianz von A bis auf die Abänderungen Q_1, Q_2 folgt insofern noch nicht unmittelbar aus [3], als dort noch eine weitere Abänderung zugelassen wird, nämlich

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die inverse. Tatsächlich läßt sich diese aber aus Q_1 und Q_2 zusammensetzen, was wir nun zeigen wollen:

1. Fall. a ist ungerade. Hier folgt die Behauptung sofort aus der unimodularen Äquivalenz von

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Man erhält die zweite aus der ersten Matrix durch Subtraktion der mit $[a/2]$ multiplizierten zweiten Zeile und Spalte von der ersten und anschließende Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten.)

2. Fall. a ist gerade. Dann ist offenbar

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Nun ist zwar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nicht mit} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wohl aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Die Überführung der ersten in die zweite Matrix läßt sich in folgenden Schritten vollziehen:

Addition der dritten Zeile und Spalte zur ersten.

Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten und dritten.

Subtraktion der zweiten Zeile und Spalte von der dritten.)

Danach ist auch in diesem Fall klar, wie sich die dritte Abänderung aus Q_1 und Q_2 zusammensetzt: Man hängt der Reihe nach $1, -1, 1$ an, transformiert unimodular und läßt 1 weg.

§ 2. Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen zusammengestellt werden, die in dem folgenden Beweis des angekündigten Ergebnisses benutzt werden. Die entscheidende Rolle wird dabei die lokale Betrachtung einer quadratischen Form an den einzelnen Primstellen spielen. Das bedeutet: Wir werden die Äquivalenzklassen von

Formen zunächst nicht im rationalen Zahlkörper K sondern in seinen perfekten Hüllen K_q untersuchen ($q = p =$ Primzahl entspricht der p-adischen Bewertung von K und $q = \infty$ der gewöhnlichen Betragsbewertung) und daraus auf das Verhalten in K Rückschlüsse ziehen. Wir bezeichnen den Ganzheitsbereich in K und K_p mit Z bzw. Z_p. Der Ring der n-reihigen Matrizen aus Elementen eines Ringes R sei $\mathfrak{M}^n(R)$ oder kürzer $\mathfrak{M}(R)$. Unimodulare Transformation in K_p bedeutet dann Transformation mit einem $S \in \mathfrak{M}(K_p)$, so daß $S, S^{-1} \in \mathfrak{M}(Z_p)$.

Hilfssatz 1. *Ist p ungerade, so läßt sich jede symmetrische Matrix aus $\mathfrak{M}(Z_p)$ unimodular in eine Diagonalmatrix aus $\mathfrak{M}(Z)$ transformieren* ([5] S. 83 th. 32).

Hilfssatz 2. *Ist p ungerade, so lassen sich zwei symmetrische Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_p)$, deren Determinanten Einheiten (in Z_p) sind und sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, unimodular ineinander transformieren* ([5] S. 92 cor. 36b).

Im Falle $p = 2$ haben wir es nur mit eigentlich primitiven Matrizen zu tun; das sind Matrizen $A \in \mathfrak{M}(Z_2)$, bei denen mindestens eines der Diagonalglieder a_{ii} ungerade ist. Für sie gilt:

Hilfssatz 3. *Zwei symmetrische, eigentlich primitive Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_2)$ mit ungerader Determinante, die sich in K_2 ineinander transformieren lassen, kann man sogar unimodular ineinander transformieren* ([5] S. 91 th. 36).

Ein weiterer Hilfssatz erlaubt es, aus der Äquivalenz zweier rationaler Matrizen in allen K_q mit $q \neq p$ auf die Äquivalenz in K_p zu schließen:

Hilfssatz 4. *Sind zwei symmetrische rationale Matrizen, deren Determinanten sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, in allen K_q mit höchstens einer Ausnahme $q = p \neq \infty$ ineinander transformierbar, so sind sie es auch in K_p.*

Dieser Satz folgt z. B. aus [5] S. 32 th. 12 und S. 47 th. 15, wenn man beachtet, daß die Invariante c_p wegen $\prod_q c_q = 1$ (vgl. [5] S. 77 th. 29) durch die anderen c_q bestimmt ist.

Schließlich brauchen wir zum Übergang von der unimodularen Äquivalenz in allen K_q zu der in K einen Spezialfall des Satzes von MEYER ([6] S. 247), der besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen in einem Geschlecht indefiniter quadratischer Formen nur eine Klasse liegt.

Hilfssatz 5. *Haben zwei ganzzahlige symmetrische Matrizen ungerade Determinante und die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

und sind sie in jeder perfekten Hülle K_q von K unimodular ineinander transformierbar[1]*, so sind sie es auch in K.*

[1]) Für den Fall $q = \infty$ entfällt der Zusatz „unimodular".

§ 3. Gruppen mit Verschlingung.

Es sei zunächst noch einmal an die Definition einer Gruppe mit Verschlingung erinnert (vgl. [1], [2], [8]): Ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe und K/Z die Gruppe der rationalen Zahlen mod 1, so heißt eine bilineare symmetrische Abbildung

$$V: \quad \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to K/Z$$

eine Verschlingung in $\mathfrak{G}$. Erfüllt V die Bedingung:

Aus $V(a, x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ folgt $a = 0$, so heißt die Verschlingung primitiv. Eine Gruppe, in der eine primitive Verschlingung festgelegt ist, wird Gruppe mit Verschlingung oder kurz V-Gruppe genannt. Ist V irgendeine (nicht notwendig primitive) Verschlingung in $\mathfrak{G}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$, so daß V in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine primitive Verschlingung induziert; es ist nämlich $\mathfrak{N} = \{a \mid V(a, x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{G}\}$.

Üblicherweise wurde bisher bei der Definition der Gruppe mit Verschlingung die Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ verlangt. Wir erhalten als Folgerung:

Eine endlich erzeugte V-Gruppe ist sogar endlich.

Beweis. Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem. Es gibt offenbar eine ganze Zahl g, so daß $V(a_i, a_k) \cdot g = 0$ ist für alle i, k. Daraus folgt wegen der Bilinearität und der Primitivität von V: $g \cdot a_i = 0$. Die Ordnung der Gruppe ist also höchstens g^n.

Im folgenden wird nur von endlich erzeugten, also endlichen V-Gruppen die Rede sein. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei noch vereinbart, daß $V(x, y)$ auch als Multiplikation $x \cdot y$ geschrieben wird.

Ist $\mathfrak{a} = (a_i)$ ein (endliches) Erzeugendensystem einer V-Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist durch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv A \bmod 1 \tag{1}$$

eine symmetrische rationale Matrix A bis auf Kongruenz mod 1 bestimmt. Wir nennen sie Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ zum Erzeugendensystem $\mathfrak{a}$. Umgekehrt ist durch A die Struktur der V-Gruppe festgelegt. (1) bestimmt nämlich die Verschlingung für die Erzeugenden, wegen der Bilinearität also für alle Elemente von $\mathfrak{G}$, und die Forderung der Primitivität definiert die Relationen zwischen den Erzeugenden a_i; denn für ein System ganzer Zahlen ξ verschwindet $\xi' \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $\xi' \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv \xi' A \equiv 0 \bmod 1$ ist. Schließlich gibt es wirklich zu jeder symmetrischen rationalen Matrix A eine V-Gruppe — wir nennen sie $\mathfrak{G}(A)$ —, für die A eine Verschlingungsmatrix ist; denn ist n die Reihenzahl von A und $\mathfrak{a} = (a_i)$ die kanonische Basis der Gruppe Z^n, so ist durch (1) eine Verschlingung V in Z^n definiert, und die Faktorgruppe, für die V primitiv ist, hat A als Verschlingungsmatrix.

Ist S eine unimodulare Matrix, A Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ bezüglich $\mathfrak{a}$, so ist

$S A S'$ Verschlingungsmatrix bezüglich $S\,\mathfrak{a}$,

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ Verschlingungsmatrix bezüglich $(\mathfrak{a}, 0)$.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 1. *Jede rationale symmetrische Matrix A bestimmt genau eine V-Gruppe $\mathfrak{G}(A)$, deren Verschlingungsmatrix sie ist, und $\mathfrak{G}(A)$ ändert sich nicht, wenn man auf A die Operationen Q_1, Q_2 von § 1 anwendet.*

Ein Beispiel für eine V-Gruppe ist die Torsionsgruppe der Dimension $2n+1$ einer orientierbaren $(4n+3)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (vgl. [8]). Die Verschlingung zweier Homologieklassen ist definiert durch die Verschlingungszahl von zwei Repräsentanten, nachdem man die Mannigfaltigkeit in fester Weise orientiert hat. Für die zweifache Überlagerung des Außenraumes eines Knotens $\mathfrak{k}$ zeigte SEIFERT [9]: Die Torsionsgruppe der Dimension 1 stimmt mit der Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ überein und ist (in unserer Bezeichnung) die V-Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q die nach § 1 zu einer regulären Projektion eines Repräsentanten von $\mathfrak{k}$ gehörende Matrix ist. Daraus und aus Satz 1 folgt nun:

Satz 2. *Die V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ (Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotens $\mathfrak{k}$) ist durch die quadratische Form von $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt.*

Das ist der eine Teil des angekündigten Ergebnisses. Um den Beweis des zweiten Teils vorzubereiten, betrachten wir den Übergang von K zu seinen perfekten Hüllen nun auch bei den V-Gruppen. K_∞ kommt dabei nicht in Betracht; es wird sich nur um K_p mit $p =$ Primzahl handeln. Bekanntlich gibt es für jedes $c \in K_p$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$c = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu \cdot p^\nu, \quad 0 \leq c_\nu < p.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Abbildung

$$\varphi_p: \quad c \to \sum_{\nu=-k}^{-1} c_\nu \cdot p^\nu$$

einen Isomorphismus von K_p/Z_p in K/Z definiert. Die Abbildung φ_p hat die Eigenschaft, daß für rationales r im Nenner der Differenz $r - \varphi_p(r)$ die Primzahl p nicht aufgeht, während der Nenner von $\varphi_p(r)$ eine Potenz von p ist. Daraus folgt, daß im Nenner von $r - \sum_p \varphi_p(r)$ überhaupt keine Primzahl aufgeht, diese Zahl also ganz ist. Anders ausgedrückt

$$\sum_p \varphi_p(r) \equiv r \bmod 1.$$

Wir können nun auch jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ durch die Festsetzung

$$\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}(\varphi_p(A))$$

eine V-Gruppe $\mathfrak{G}_p(A)$ zuordnen. Für rationales A ist sowohl $\mathfrak{G}(A)$ als auch $\mathfrak{G}_p(A)$ für alle p definiert. Der Zusammenhang dieser Gruppen ergibt sich aus dem Hilfssatz 6. Zuvor definieren wir: Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_\nu$ V-Gruppen, von denen nur endlich viele sich nicht auf Null reduzieren, ist $\mathfrak{G} = \sum_\nu \mathfrak{G}_\nu$ im Sinne der

bloßen Gruppenstruktur und gilt

$$V\Big(\sum_\nu a_\nu, \sum_\nu b_\nu\Big) = \sum_\nu V(a_\nu, b_\nu), \quad a_\nu, b_\nu \in \mathfrak{G}_\nu,$$

so heißt $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der V-Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$. Offensichtlich kann man aus vorgegebenen V-Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ ihre direkte Summe eindeutig konstruieren.

Hilfssatz 6. *$\mathfrak{G}_p(A)$ ist eine p-Gruppe für beliebiges symmetrisches $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ und für rationales A ist $\mathfrak{G}(A)$ direkte Summe der V-Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$:*

$$\mathfrak{G}(A) = \sum_p \mathfrak{G}_p(A),$$

d.h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist der p-Bestandteil von $\mathfrak{G}(A)$.

Beweis. $\mathfrak{G}_p(A)$ hat $\varphi_p(A)$ als Verschlingungsmatrix, in deren Nennern nur die Primzahl p vorkommt; also annulliert eine genügend hohe Potenz von p als Faktor die ganze Verschlingungsfunktion V und daher wegen der Primitivität auch jedes Element der Gruppe, d.h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist p-Gruppe.

Da $\varphi_p(A)$ bei rationalem A für fast alle p ganz ist, können wir die direkte Summe $\overline{\mathfrak{G}}$ der V-Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$ bilden. Gehört $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem $\mathfrak{a}^p = (a_i^p)$ von $\mathfrak{G}_p(A)$, so ist $\mathfrak{a} = \sum_p \mathfrak{a}^p = \big(\sum_p a_i^p\big)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv \sum_p \varphi_p(A) \equiv A \bmod 1.$$

Wie behauptet, ist also $\overline{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}(A)$.

Wir haben oben gesehen, daß $\mathfrak{G}(A)$ sich bei unimodulären Transformationen nicht ändert. Für $\mathfrak{G}_p(A)$ gilt eine analoge Aussage, die wir in folgendem brauchen werden.

Hilfssatz 7. *$\mathfrak{G}_p(A)$ ist gegenüber unimodularen Transformationen von A in K_p invariant.*

Beweis. Sei S eine in K_p unimodulare Matrix und p^ω der Hauptnenner von A, woraus folgt, daß Multiplikation mit p^ω die ganze Gruppe annulliert. Dann wählen wir ganzrationale Matrizen $\overline{S}$ und $\overline{S}_1$, für die

$$\overline{S} \equiv S \bmod p^\omega, \quad \overline{S}_1 \equiv S^{-1} \bmod p^\omega$$

gilt. Gehört die Verschlingungsmatrix $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem $\mathfrak{a}$, so ist $\bar{\mathfrak{a}} = \overline{S}\,\mathfrak{a}$ ein Erzeugendensystem (wegen $\overline{S}_1\,\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$) mit

$$\bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{a}}' \equiv \overline{S}\,\varphi_p(A)\,\overline{S}' \equiv \varphi_p(\overline{S}\,A\,\overline{S}') \bmod 1.$$

Da $p^\omega \cdot A$ in Z_p liegt, ist

$$\overline{S}\,A\,\overline{S}' \equiv S\,A\,S' \bmod Z_p,$$

folglich

$$\varphi_p(\overline{S}\,A\,\overline{S}') \equiv \varphi_p(S\,A\,S') \bmod 1,$$

d.h. $\varphi_p(S\,A\,S')$ ist Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}_p(A)$, und das war zu zeigen.

Insbesondere kann man für ungerades p $p^{\omega} A$ in K_p unimodular in eine ganzzahlige Diagonalmatrix überführen (Hilfssatz 1), also A selber in eine Diagonalmatrix D mit Gliedern der Form $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz rational und nicht durch p teilbar. Ist (b_i) ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_p(A)$, zu dem $\varphi_p(D) \equiv D \bmod 1$ Verschlingungsmatrix ist, so verschwindet $\sum_i \beta_i b_i$ genau dann, wenn

$$V\left(\sum_i \beta_i b_i, b_j\right) \equiv \beta_j c_j p^{-\omega_j} \equiv 0 \bmod 1,$$

d.h. wenn

$$\beta_j \equiv 0 \bmod p^{\omega_j}$$

für alle j gilt. Das bedeutet, daß das System aller b_i mit $\omega_i > 0$ eine Basis von $\mathfrak{G}_p(A)$ im Sinne von SEIFERT [8] bildet. Nun kann man die Torsionskoeffizienten und Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}_p(D)$ unmittelbar ablesen. Wir formulieren es als Hilfssatz:

Hilfssatz 8. *Ist D eine Diagonalmatrix mit den Gliedern $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz und nicht durch p teilbar, p ungerade, so sind p^{ω_i} mit $\omega_i > 0$ die Torsionskoeffizienten und $\mathfrak{v}_{p^\omega} = \prod_{\omega_i = \omega} \left(\frac{c_i}{p}\right)$ mit $\omega > 0$ die Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(D)$* (vgl. [7], [8]).

§ 4. Beweis des angekündigten Ergebnisses.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen: Die 1-dimensionale Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ der zweifachen Überlagerung des Knotens ist die V-Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q ein Repräsentant der quadratischen Form des Knotens ist. Daß umgekehrt auch die quadratische Form durch die V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ bestimmt ist, ergibt sich nun aus dem folgenden Satz:

Satz 3. *Zwei ganzzahlige Matrizen A, B mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{G}(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}(B^{-1})$ ist und ungerade Ordnung hat, lassen sich durch die Operationen Q_1 und Q_2 (vgl. § 1) ineinander überführen.*

Die quadratische Form eines Knotens erhält man aus der V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ also folgendermaßen: Man wähle eine Verschlingungsmatrix A^{-1} von $\mathfrak{H}^1$, deren Inverse A ganz ist. Ist A nicht schon selber Matrix der quadratischen Form einer Projektion des Knotens, so läßt sie sich nach Satz 3 jedenfalls durch Q_1 und Q_2 in eine solche überführen und repräsentiert daher die quadratische Form des Knotens. In dem in der Einleitung erwähnten allgemeinen Fall läßt sich ebenso (unabhängig von der Knotentheorie) einer beliebigen V-Gruppe eine Klasse quadratischer Formen zuordnen. Man kann nämlich mit den genannten Hilfsmitteln aus [4] den Satz 3 auch ohne die Voraussetzung ungerader Ordnung beweisen und ferner zeigen, daß jede V-Gruppe — also auch eine solche die nicht zu einem Knoten gehört — eine Verschlingungsmatrix mit ganzer Inverser besitzt. Damit ist dann eine vollständige umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen V-Gruppen und den hier betrachteten Klassen quadratischer Formen hergestellt.

Beweis von Satz 3. Ist $\mathfrak{a}$ das Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}(A^{-1})$, zu dem A^{-1} Verschlingungsmatrix ist, so bildet

$$A\,\mathfrak{a} = 0 \tag{2}$$

ein System von definierenden Relationen; denn einerseits gilt

$$A\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}' \equiv A\,A^{-1} \equiv 0 \bmod 1,$$

wegen der Primitivität der Verschlingung also $A\,\mathfrak{a} = 0$, und andererseits folgt aus $\xi'\,\mathfrak{a} = 0$ für ein gewisses System ganzer Zahlen ξ

$$0 \equiv \xi'\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}' \equiv \xi'\,A^{-1} \bmod 1;$$

d.h. $\xi' A^{-1} = \eta'$ ist ganz und $\xi'\,\mathfrak{a} = \eta' A\,\mathfrak{a} = 0$ Folgerelation von (2). Demnach ist der Betrag von $|A|$ die Ordnung von $\mathfrak{G}(A^{-1})$. Das gleiche gilt für B, und wir entnehmen daraus: $|A|$ und $|B|$ sind ungerade und unterscheiden sich höchstens durch das Vorzeichen.

Mit Hilfe der Operation Q_2 kann man A und B in zwei Matrizen überführen, die gleiche Reihenzahl und Signatur sowie beide die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

haben. Es wird zu keinen Mißverständnissen führen, wenn wir sie wieder mit A und B bezeichnen. Unter Berufung auf Hilfssatz 5 ist unsere Behauptung bewiesen, wenn sich A und B in jedem K_q unimodular ineinander transformieren lassen. Wir unterscheiden für diesen Nachweis drei Fälle:

I. $q = \infty$. In diesem Falle ist die Behauptung klar, da Reihenzahl und Signatur bekanntlich ein vollständiges Invariantensystem bilden.

II. $q = p =$ ungerade Primzahl. Nach Hilfssatz 1 können wir A und B in K_p unimodular auf Diagonalform transformieren, wobei Diagonalglieder $a_i\,p^{\alpha_i}$ bzw. $b_i\,p^{\beta_i}$ mit ganzen, nicht durch p teilbaren a_i, b_i und nicht negativen α_i, β_i auftreten. A^{-1} und B^{-1} sind dann in zwei Diagonalmatrizen mit den Elementen $a_i^{-1}\,p^{-\alpha_i}$ und $b_i^{-1}\,p^{-\beta_i}$ überführbar, also, da a_i, b_i Einheiten in Z_p sind, auch in solche mit den Elementen $a_i\,p^{-\alpha_i}$ bzw. $b_i\,p^{-\beta_i}$. Aus der Voraussetzung $\mathfrak{G}(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}(B^{-1})$ folgt nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{G}_p(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}_p(B^{-1})$. Nach den Hilfssätzen 7 und 8 sind die p-Potenzen p^{α_i} und p^{β_i}, soweit sie positive Exponenten haben, die Torsionskoeffizienten dieser Gruppe und stimmen daher bis auf die Reihenfolge überein. Die p-Potenzen mit dem Exponenten 0 sind alle übrigen, also ist ihre Anzahl ebenfalls in beiden Matrizen die gleiche. Für $\omega > 0$ sind die Ausdrücke

$$\prod_{\alpha_i=\omega}\left(\frac{a_i}{p}\right) \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i=\omega}\left(\frac{b_i}{p}\right)$$

als Verschlingungsinvarianten derselben V-Gruppe einander gleich. Ferner gilt $\prod_i a_i = \prod_i b_i$ (erstreckt über alle i) wegen $|A^{-1}| = |B^{-1}|$. Demnach können

$$\prod_{\alpha_i=\omega} a_i \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i=\omega} b_i$$

sich für alle ω nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, und daraus folgt bekanntlich die unimodulare Äquivalenz der beiden Matrizen in K_p (durch Zerlegen in Teilmatrizen und Anwenden von Hilfssatz 2).

III. $q=2$. Auf Grund von I und II folgt aus Hilfssatz 4, daß A und B in K_2 ineinander transformierbar sind, und Hilfssatz 3 besagt dann, daß dies sogar unimodular möglich ist.

Literatur.

[1] BLANCHFIELD, R. C., and R. H. FOX: Invariants of self-linking. Ann. of Math. **53**, 556 (1951). — [2] BURGER, E.: Über Gruppen mit Verschlingungen. Crelles J. **188**, 193 (1950). — [3] GOERITZ, L.: Knoten und quadratische Formen. Math. Z. **36**, 647 (1933). — [4] EICHLER, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. — [5] JONES, B. W.: The Arithmetic Theory of Quadratic Forms. (The Carus Mathematical Monographs Nr. 10.) New York 1950. — [6] MEYER, A.: Mathematische Mitteilungen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **36**, 241 (1891). — [7] PUPPE, S. D.: Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten. Math. Z. **56**, 33 (1952). — [8] SEIFERT, H.: Verschlingungsinvarianten. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **26**, 811 (1933). — [9] SEIFERT, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Hamburg. math. Abh. **11**, 84 (1936).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Februar 1953.)

MAASS, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 385—390 (1953)

Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen.

Von
HANS MAASS.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß eine allgemeine Klasse von selbstadjungierten Eigenwertproblemen der Art

$$M[y] = \lambda N[y], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m) \tag{1}$$

auf lineare homogene Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern zurückgeführt werden kann. Dabei ist wie üblich

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \left(f_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}, \qquad N[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(g_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}$$

gesetzt worden, während

$$U_\mu[y] = \sum_{\nu=0}^{2m-1} \left(\alpha_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(b)\right) \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

unabhängige Linearformen in $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ bezeichnen. Die Funktionen $f_\nu(x)$ und $g_\nu(x)$ seien im Intervall $a \leq x \leq b$ ν-mal stetig differenzierbar. Ferner sei $f_m(x) \neq 0$ für $a \leq x \leq b$ und $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (1). Dann existiert die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ des Randwertproblems

$$M[y] = f, \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m),$$

und das Eigenwertproblem (1) ist mit der Integrodifferentialgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi \tag{2}$$

äquivalent.

Bei der Reduktion von (2) auf eine gewöhnliche lineare homogene Integralgleichung beschränkt man sich in der Literatur entweder auf die sog. Eingliedklasse[1]), wobei zusätzliche Voraussetzungen betreffs der Randbedingungen und n gemacht werden, oder aber man nimmt einen unsymmetrischen Kern in Kauf[2]), so daß die Frage nach der Existenz von Eigenfunktionen auf

[1]) COLLATZ, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. Leipzig 1945.
[2]) BUSCHAM, W.: Die Zurückführung von speziellen linearen Integrodifferentialgleichungen auf gewöhnliche Integralgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **32**, 20—21 (1952).

diesem Wege nicht geklärt werden kann[3]). Mit Hilfe eines einfachen Gedankens wird hier das für die Eingliedklasse entwickelte Reduktionsverfahren auf solche Eigenwertprobleme verallgemeinert, die folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. $n < m$.

2. Es ist $g_\nu(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$, sofern $g_\nu(x)$ nicht identisch verschwindet $(0 \leq \nu \leq n)$.

3. Genügen $u(x)$ und $v(x)$ den Randbedingungen, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(g_\nu(x)\, v^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Wir dürfen also

$$N[y] = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(h_\nu(x)\, y^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu)}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r = n,$$
$$h_\nu(x) > 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b, \quad 1 \leq \nu \leq r$$

ansetzen. Diese Darstellung ist aus beweistechnischen Gründen zweckmäßig. Die dritte Forderung nimmt nun die Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(h_\nu(x)\, v^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \tag{3}$$

an. Da die Funktionen

$$u(x) = G(x, \xi), \qquad v(x) = \frac{\partial^{n_\mu} G(x, \eta)}{\partial \eta^{n_\mu}}$$

bekanntlich den Randbedingungen genügen, wenn ξ und η im offenen Intervall (a, b) fest gewählt werden, so können wir zunächst einmal

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial x^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial x^{n_\nu-\varrho-1}} \left(h_\nu(x) \frac{\partial^{n_\nu+n_\mu} G(x,\eta)}{\partial x^{n_\nu} \partial \eta^{n_\mu}}\right)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \tag{4}$$

identisch in $a < \xi, \eta < b$ notieren.

---

[3]) N. J. LEHMANN [Math. Nachr. 5, 139—160 (1951)] hat bereits allgemeine Eigenwertprobleme mit den Methoden der Integralgleichungstheorie behandelt. Doch handelt es sich dabei nicht um eine Reduktion auf reine Integralgleichungen; vielmehr wird gezeigt, daß die E. SCHMIDTsche Integralgleichungstheorie auf gewisse Arten von Integrodifferentialgleichungen, wie man sie aus (2) durch partielle Integrationen gewinnt, verallgemeinert werden kann. Hinsichtlich der Bedeutung, die den Untersuchungen von E. HÖLDER in diesem Zusammenhang zukommt, sei auf LEHMANN l. c. Fußnote [3]) hingewiesen. Schließlich sei noch bemerkt, daß die in der vorliegenden Note erzielten Ergebnisse über die Existenz von Eigenfunktionen mühelos aus einem allgemeinen Satz von H. WIELANDT [Math. Nachr. 4, 308—314 (1950/51)] abgeleitet werden können, wenn man dort das Skalarprodukt (y, z) durch

$$(y, z) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\, \bar{z}^{(\nu)}(x)\, dx$$

und die Operation $y = L\, z$ durch

$$M[y] = N[z], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

erklärt.

Die Integrodifferentialgleichung (2) wird nun in ein homogenes System von gewöhnlichen Integralgleichungen übergeführt. Beachtet man, daß (3) für $u(\xi) = G(x, \xi)$, $v(\xi) = y(\xi)$ gilt, wenn $y(\xi)$ eine Eigenfunktion darstellt und x im Intervall (a, b) fest gewählt wird, so erhält man aus (2) durch partielle Integration

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x, \xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} h_\nu(\xi)\, y^{(n_\nu)}(\xi)\, d\xi . \tag{5}$$

Die n_μ-te Ableitung nach x kann hier wegen $n < m$ formal unter dem Integralzeichen gebildet werden. Für die Funktionen

$$\varphi_\mu(x) = \sqrt{h_\mu(x)}\, y^{(n_\mu)}(x) \quad (1 \leq \mu \leq r) \tag{6}$$

ergibt sich so das Integralgleichungssystem

$$\varphi_\mu(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi . \tag{7}$$

Sehen wir μ als eine mit x gleichberechtigte (diskrete) Variable und die Summation über ν als eine besondere Art der Integration an, so läßt sich das System (7) auch als eine einzige Integralgleichung auffassen. Ihr Kern

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)} \tag{8}$$

ist wegen $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ symmetrisch:

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = K(\nu, \xi; \mu, x) .$$

Folglich läßt sich die von E. SCHMIDT entwickelte Theorie[4]) auf das System (7) vollständig übertragen. Insbesondere ist folgendes festzustellen: Alle Eigenwerte λ von (7) sind reell und liegen diskret; es gibt mindestens einen. Bilden $\varphi_{1\mu}(x), \varphi_{2\mu}(x), \varphi_{3\mu}(x), \ldots$ ein vollständiges System von reellen, orthogonalen und normierten Eigenfunktionen:

$$\sum_{\mu=1}^{r} \int_a^b \varphi_{k\mu}(x)\, \varphi_{l\mu}(x)\, dx = \delta_{kl} \quad (= \text{Kroneckersymbol})$$

und wird $\chi_\mu(x)$ durch den Kern mit stetigem $\omega_\nu(\xi)$ dargestellt:

$$\chi_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b K(\mu, x; \nu, \xi)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi , \tag{9}$$

so gilt mit konstanten c_k eine Entwicklung der Art

$$\chi_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{k\mu}(x) , \tag{10}$$

die im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

[4]) SCHMIDT, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Ann. **63**, 433—476 (1907).

Umgekehrt ist jetzt zu zeigen, daß jeder Lösung $\varphi_\mu(x)$ des Systems (7) auch eine Lösung $y(x)$ der Integrodifferentialgleichung (2) in der angegebenen Weise entspricht. Zufolge (5) und (6) ist

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x,\xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

anzusetzen. Um hier gewisse partielle Integrationen ausführen zu können, müssen wir zunächst beweisen, daß $\varphi_\mu(x)$ nach x n_μ-mal stetig differenziert werden kann. Da $\frac{\partial^{\varrho+\sigma} G(x,\xi)}{\partial x^\varrho \partial \xi^\sigma}$ für $\varrho+\sigma \leq 2m-2$ in $a \leq x,\ \xi \leq b$ und für $\varrho \leq 2m$, $\sigma \leq 2m$ in den Teilbereichen $a \leq x < \xi \leq b$ und $a \leq \xi < x \leq b$ gleichmäßig stetig ist, so folgt aus (7), daß $\varphi_\mu(x)$ jedenfalls einmal stetig differenzierbar ist. Setzen wir $\mathrm{Min}(n_\nu, \varrho) = \varrho_\nu$ für eine natürliche Zahl ϱ und nehmen an, $\varphi_\nu(x)$ sei ϱ_ν-mal stetig differenzierbar, so liefert partielle Integration

$$\begin{cases} \varphi_\mu(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\varrho_\nu} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu+n_\nu-\varrho_\nu} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu-\varrho_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(\varrho_\nu)} d\xi + \\ \quad + \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\sigma=0}^{\varrho_\nu-1} (-1)^{\sigma} \frac{\partial^{n_\mu+n_\nu-\sigma-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu-\sigma-1}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(\sigma)} \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{cases} \tag{12}$$

woraus zu ersehen ist, daß $\varphi_\mu(x)$ auch $(\varrho+1)_\mu$-mal stetig differenzierbar ist; denn es ist

$$\begin{aligned} (\varrho+1)_\mu + n_\mu + n_\nu - \varrho_\nu &= \mathrm{Min}(\varrho+1, n_\mu) - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu \\ &\leq \varrho + 1 - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu = \mathrm{Max}(\varrho+1+n_\mu, n_\mu + n_\nu + 1) \\ &\leq 2n_r + 1 \leq 2m - 1, \end{aligned}$$

wenn $\varrho \leq n_\nu$ angenommen wird. Vollständige Induktion nach ϱ zeigt schließlich, daß $\varphi_\mu^{(n_\mu)}(x)$ existiert und stetig ist.

Mit Hilfe partieller Integrationen können wir nun (11) in

$$\begin{cases} y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi) \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(n_\nu)} d\xi - \\ \quad - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial \xi^{n_\nu-\varrho-1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} \end{cases} \tag{13}$$

überführen. Andererseits folgt aus (11) mit Hilfe von (7) sofort (6) und damit

$$\begin{cases} y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi - \\ \quad - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial \xi^{n_\nu-\varrho-1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{cases} \tag{14}$$

so daß nur noch das Verschwinden dieser Doppelsumme gezeigt zu werden braucht. Mit Hilfe von (7) erhält man in der Tat

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\,\varphi_\nu(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b} \\ = \lambda\displaystyle\sum_{\mu=1}^{r}\int_a^b\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\frac{\partial^{n_\nu+n_\mu}G(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n_\nu}\partial\eta^{n_\mu}}\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\}\times \\ \quad\times\sqrt{h_\mu(\eta)}\,\varphi_\mu(\eta)\,d\eta = 0 \end{cases}$$

für $a<x<b$; denn die Doppelsumme in der geschweiften Klammer verschwindet identisch in $a<x,\ \eta<b$. Das folgt aus (4), wenn man hierin x mit ξ vertauscht. Die Äquivalenz von (2) und (7) ist damit bewiesen.

Wir wollen noch kurz feststellen, in welcher Weise sich der HILBERTsche Entwicklungssatz (10) auf die Integrodifferentialgleichung überträgt. Es bezeichne $w(x)$ eine Vergleichsfunktion; sie ist also $2m$-mal stetig differenzierbar und genügt den Randbedingungen. Wir setzen $M[w]=f$ und bestimmen v aus $N[v]=f$. Dann ist

$$(16)\qquad w(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,N[v(\xi)]\,d\xi.$$

Für die n_μ-te Ableitung von $w(x)$ ergibt sich nach partiellen Integrationen

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt{h_\mu(x)}\left\{w^{(n_\mu)}(x)-\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^{n_\mu+\varrho}G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu}\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\} \\ \qquad\qquad =\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

mit

$$(18)\qquad \omega_\nu(\xi)=\sqrt{h_\nu(\xi)}\,v^{(n_\nu)}(\xi).$$

Der Eigenfunktion $\varphi_{k\mu}(x)$ von (7) möge die Eigenfunktion $y_k(x)$ von (2) entsprechen. Zufolge (6) ist

$$(19)\qquad \varphi_{k\mu}(x)=\sqrt{h_\mu(x)}\,y_k^{(n_\mu)}(x).$$

Der HILBERTsche Entwicklungssatz liefert nun gleichmäßig konvergente Entwicklungen der Art

$$(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi=\sqrt{h_\mu(x)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k^{(n_\mu)}(x).$$

n_1-malige Integration der für $\mu=1$ aus (17) und (20) resultierenden Identität ergibt schließlich

$$(21)\quad \begin{cases} w(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k(x)+\sum_{\varrho=0}^{n_1-1}d_\varrho\,x^\varrho+ \\ \qquad+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}. \end{cases}$$

Wie bekannte Beispiele zeigen, kann ohne zusätzliche Voraussetzung nicht erwartet werden, daß stets

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) \tag{22}$$

gilt. Beweisbar ist (22), wenn unter den Randbedingungen die Bedingungen

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0 \tag{23}$$

vorkommen. Dann ist nämlich

$$\frac{\partial^\varrho G(x, a)}{\partial a^\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad a < x \leq b, \qquad 0 \leq \varrho < n_r,$$

während

$$v^{(\nu)}(b) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu < 2n_r$$

durch geeignete Wahl von v erreicht werden kann. Die Doppelsumme in (21) verschwindet also identisch. Bildet man nun noch die Ableitungen von $w(x)$ an der Stelle $x = a$ bis zur $(n_1 - 1)$-ten Ordnung, so folgt bei Berücksichtigung der Randbedingungen auch noch $d_\varrho = 0$ für $0 \leq \varrho < n_1$.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 391—413 (1953)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I.

Von
WALTER NEUMER.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung ist aus dem Versuch entstanden, ein Bezeichnungssystem zu finden, welches auch für beliebige, d. h. nicht abzählbare Ordnungszahlen die Entwicklung eines „Algorithmus" gestattet, der von einer gegebenen Normalfunktion aus möglichst weit in die Stufenfolge der zugehörigen höheren Normalfunktionen und ihrer kritischen Zahlen hineinführt und dabei jedes Stadium durch eine bestimmte Zeichenfigur wiedergibt, die unter Umständen noch Variable für Normalfunktionen oder Ordnungszahlen enthält. Dieses Problem hängt engstens zusammen mit der konstruktiven Erfassung eines möglichst großen Abschnitts der zweiten Zahlenklasse, woran auch die mathematische Logik interessiert ist.

In dem vorgelegten Teil I wird zunächst ein konstruktives Bezeichnungssystem für einen Abschnitt der zweiten Zahlenklasse entwickelt, dessen Grenzzahl provisorisch die Bezeichnung $1VII'I''\ldots$ erhält. Im Teil II soll gezeigt werden, daß die so gewonnenen Symbole auch in Verbindung mit beliebigen Ordnungszahlen und Normalfunktionen benützt werden können.

Der hier dargestellte Algorithmus kann sinngemäß über den durch $1VII'I''\ldots$ bestimmten Abschnitt hinaus fortgesetzt werden, und es scheint schwierig, eine Grenze dieses Prozesses abzusehen; die Übertragung auf beliebige Ordnungszahlen und Normalfunktionen bleibt dabei beständig möglich[1]). Bevor dieses Thema behandelt wird, soll noch im Teil II das in Teil I beschriebene Bezeichnungssystem mit dem von W. ACKERMANN[2]) angegebenen Bezeichnungssystem verglichen werden, wobei sich herausstellt, daß die Grenzzahl der Gesamtheit der Ackermannschen n-stelligen ($n=3, 4, \ldots$) Klammersysteme in dem hier geschilderten System die Zahl $1VII'^{1V}$ ist.

1. Abschnitt.

Die Konstruktion der Ordnungszahlen bis $1VII'I''\ldots$.

§ 1. Allgemeine Konstruktionsregeln.

1. Eine Ordnungszahl oder kurz Zahl soll in diesem Abschnitt eine — im allgemeinen „zweidimensionale" — Figur aus endlich vielen „Einzelzeichen"

(1) $\qquad 1,\ +,\ (),\ V,\ I,\ I',\ I'',\ I''',\ I'''',\ldots$

[1]) Notizen hierüber liegen seit 1947 vor.

[2]) Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse. Math. Z. **53**, 403—413 (1951).

sein[3]), welche nach bestimmten Regeln, unter anderem mit Verwendung der Potenzschreibweise[4]) aus der Figur 1 abgeleitet ist. Der Sinn des Begriffes „Ableitung" wird im Verlauf dieses Paragraphen näher präzisiert werden. Einstweilen sei mit vorstehender Erklärung festgestellt, daß „Ableitung einer Figur α aus der Figur 1" einen Prozeß bedeutet, in dessen Verlauf zu der Figur 1 gewisse Zeichen (1) oder Gruppen von solchen nach gewissen Regeln hinzugefügt bzw. durch andere solche Zeichen oder Zeichengruppen ersetzt werden.

Die Klammern ( ) dienen als Hilfszeichen zur Zusammenfassung und Abgrenzung von Zeichengruppen. Wir übernehmen in unser Bezeichnungssystem die natürlichen Zahlen als Ordnungszahlen in der Form $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ mit den üblichen Abkürzungen $2, 3, 4, \ldots$. Dagegen nicht als Abkürzungen, sondern als völlig gleichwertig mit $I'''', I''''', \ldots$ wollen wir die einfacheren Zeichen $I^{(4)}, I^{(5)}, \ldots$ ansehen, die nicht zu verwechseln sind mit den später auftretenden Figuren $I^4, I^5, \ldots$.

Als Variablenzeichen für natürliche Zahlen bzw. beliebige Ordnungszahlen verwenden wir kleine lateinische bzw. griechische Buchstaben, wobei wir nach Bedarf die natürlichen Zahlen als Indizes benützen. $1+1+\cdots+1$ und ähnliche Figuren sollen Schemata für natürliche Zahlen darstellen, $I^{(n)}$ ein Schema für ein I mit $n\,(>1)$ Strichen.

Eine Ordnungszahl nennen wir auch eine *Zahlenfigur*. Gewisse Teilfiguren von Zahlenfiguren nennen wir *Operatoren*. Operatoren sind $V, I, I', I'', \ldots$ sowie gewisse aus diesen Zeichen mittels ( ) gebildete Figuren, wobei bereits konstruierte Ordnungszahlen als „Exponenten" auftreten können. Variablenzeichen für beliebige Figuren (Zahlen oder Operatoren) sollen große lateinische Buchstaben sein (außer V und I); auch hier verwenden wir die natürlichen Zahlen als Indizes.

Wir teilen die ständig im selben Sinne verwendeten individuellen Figuren (Zahlen und Operatoren) nach zwei Gesichtspunkten in je zwei Klassen ein. Erstens in *vollständige Figuren* und *feste Abkürzungen*, zweitens in *reguläre Figuren* und *Hilfsfiguren*. Demgemäß ergibt sich eine Vierteilung des Figurenbereichs in vollständige reguläre Figuren, vollständige Hilfsfiguren, abgekürzte reguläre Figuren und abgekürzte Hilfsfiguren. Statt vollständig regulär sagen wir kürzer *vollregulär*. Vollreguläre Figuren sind unter anderem $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$, regulär und feste Abkürzungen sind z. B. die üblichen Ziffern $2, 3, \ldots$ und die aus ihnen in üblicher Weise gebildeten Zahlzeichen 10, 11, ... Die sonstigen (voll)regulären Figuren zu definieren ist der Zweck dieses Abschnitts.

Die Hilfsfiguren dienen zur leichteren Handhabung unseres *Algorithmus*, mit welchem Wort wir die Technik der Ableitung von (voll)regulären Zahlenfiguren meinen. Die Aussagen, eine Zahl α sei „abgeleitet", „konstruiert" oder „gebildet" oder sie „komme im Algorithmus vor" u. ä., werden im

[3]) Ausnahmen s. Fußnote [6]).

[4]) Die „Potenzierung" könnte natürlich auch durch ein besonderes Zeichen anstatt durch Rechts-hoch-Stellung ausgedrückt werden, aber das würde die Übersicht erschweren.

folgenden synonym gebraucht, wenn wir auch die Bezeichnung Ableitung als die eigentlich zuständige ansehen wollen. Insbesondere werden wir auch von der Ableitung einer Zahl aus 1 oder einer anderen Zahl sprechen.

In definierenden Gleichungen[5]) kennzeichnen wir die regulären Figuren durch Unterstreichen. Wo nichts Besonderes gesagt ist, geht es aus dem Zusammenhang hervor, ob eine Figur regulär ist oder nicht.

Sind F_1 und F_2 zwei im Algorithmus auftretende Figuren (Zahlen oder Operatoren), so bedeutet $F_1 = F_2$ entweder die Identität, d.h. die figürliche Einerleiheit, oder es bedeutet, daß etwa F_1 eine Abkürzung oder sonstige Ersatzform oder eine Hilfsfigur für F_2 ist oder daß F_1 und F_2 durch je eine endliche Kette von Gleichungen mit einer Figur F_3 verknüpft sind, wobei jede Gleichung dieser Kette eine der zuerst genannten Bedeutungen hat. $F_1 \neq F_2$ soll die Negation von $F_1 = F_2$ ausdrücken.

2. Um die Darlegung des in anschaulichen Analogieschlüssen fortschreitenden Algorithmus nicht mit ständigen Wiederholungen zu belasten, geben wir teilweise vorgreifend eine Reihe von Eigenschaften und Prinzipien des Algorithmus an, die erst auf Grund der konkreten Entwicklungen des § 2 als richtig bzw. sinnvoll erscheinen werden. Es ist also erforderlich, daß man die jetzt und in den weiteren Ziffern dieses Paragraphen folgenden Bemerkungen bei späteren Ausführungen wieder vor Augen habe, um zu prüfen, ob die genannten Eigenschaften und Rezepte tatsächlich bestätigt bzw. befolgt werden.

Zunächst bedeutet $F_1 = F_2$ immer die Identität, wenn F_1 und F_2 vollregulär sind.

Sind ferner α und β zwei nicht identische vollständige Zahlenfiguren in regulärer oder in Hilfsform, so kann entweder β aus α oder α aus β abgeleitet werden. Zu jeder vollständigen regulären Zahlenfigur α gibt es, wenn überhaupt, so nur endlich viele gleiche vollständige Hilfsfiguren $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = \underline{\alpha}$, die nach gewissen Regeln bei der Ableitung von α auftreten. γ_1 erscheint zuerst (die *erste* Hilfsfigur $= \alpha$), wird dann ersetzt durch γ_2 usw. und zuletzt γ_n durch α. Auch diese Übergänge bezeichnen wir als Ableitungen. Aus einer vollregulären Zahlenfigur wird somit niemals eine ihr gleiche Hilfsfigur abgeleitet.

Entsprechend gibt es zu jedem Operator X in vollregulärer Form, wenn überhaupt, so eine endliche Reihe gleicher Operatoren $Y_1 = \cdots = Y_n = X$ in vollständiger Hilfsform. Dabei muß X in einer vollregulären Zahlenfigur α auftreten und die Y_i in gewissen vollständigen Hilfsfiguren $\gamma_i = \alpha$.

Natürlich gibt es zu jedem vollständigen, aus den Zeichen (1) gebildeten Komplex (Zahlenfigur oder Operator) auch nur endlich viele feste Abkürzungen. Sie entstehen, indem man in dem betreffenden Komplex auftretende natürliche Zahlen $1 + 1 + \cdots + 1$ durch die ihnen gleichen dekadischen Zahlzeichen ersetzt und eventuell noch gewisse ( )-Zeichen wegläßt (vgl. die Koeffizientenregel in Ziffer **5**).

[5]) Auch wenn sie schematischer und nicht individueller Natur sind.

Wenn die Ordnungszahl β aus der bereits abgeleiteten Ordnungszahl $\alpha \neq \beta$ abgeleitet werden kann, so sagen wir, α sei *kleiner* als β oder β *größer* als α, in Zeichen: $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so ist auch $\alpha' < \beta'$ oder $\beta' > \alpha'$. — Wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ ist, so wird damit eine Ableitung von γ aus α (mit dem Zwischenstadium β) geliefert, d. h. es gilt $\alpha < \gamma$. — Wenn $\alpha \neq \beta$, so ist nach Absatz 3 dieser Ziffer entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Dieser für den Algorithmus wesentliche Sachverhalt kommt folgendermaßen zustande. Die Aussage, γ sei abgeleitet, wird immer nur auf Grund der Einsicht gemacht werden, daß zu γ die Klasse der algorithmisch möglichen Zahlenfiguren festgelegt ist, aus denen γ abgeleitet werden kann und daß dabei, wenn α und β zwei nicht identische Zahlen dieser Klasse sind, entweder β aus α oder α aus β ableitbar ist. — Der Ableitungsprozeß verläuft demnach *einseitig*; das kommt später zum Ausdruck in der „Links-rechts-Struktur" der Zahlenfiguren. — Die Vergleichbarkeit zweier Zahlen hinsichtlich der Relationen $=$ und $<$ gilt also immer für die Zahlen einer gewissen Klasse, und da wir den Algorithmus in der Gestalt von Folgen solcher wachsender Klassen entwickeln, *sind alle Zahlen vergleichbar* (natürlich im Sinn einer endlichen Rekursion).

3. Nun geben wir einige allgemeine Ableitungs-Regeln und -Prinzipien an.

I. *Konstruktionsprinzip. Die Ableitung einer Ordnungszahl β aus einer Ordnungszahl $\alpha \neq \beta$ erfolgt stets so, daß zunächst α, wenn sie eine Hilfsfigur oder eine abgekürzte reguläre Figur ist, in die ihr gleiche vollreguläre Figur umgeformt (gedacht) wird.* — Dafür sagen wir auch: *Es darf nur von vollregulären Figuren aus weiterkonstruiert werden.*

II. *Konstruktionsprinzip. Von jeder konstruierten Zahl α aus beginnt die Konstruktion wieder von vorne, d. h. es wird zunächst weiterkonstruiert mit denselben Mitteln in derselben Reihenfolge, wie sie während der Konstruktion von α bereits verfügbar waren.*

Diese Prinzipien werden angewandt bei der Handhabung der beiden folgenden Regeln zur Bildung neuer Zahlen.

Nachfolgerbildung. Ist α bereits konstruiert, und zwar in vollregulärer Form, so ist auch $\alpha + 1$ eine Ordnungszahl in vollregulärer Form, die wir den *Nachfolger* von α nennen (natürlich hat man α durch die entsprechende vollreguläre Figur ersetzt zu denken, in deren „Grundzeile" $+1$ rechts angefügt wird). $\alpha + 1$ gilt dann als von α abgeleitet (vgl. 4), also $\alpha + 1 > \alpha$. — *Für die Zahlen $\alpha + 1$ gibt es keine Hilfsfiguren.*

Limesbildung. Zu gewissen gesetzmäßig konstruierbaren Folgen α_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) wachsender Ordnungszahlen in regulärer Form definieren wir eine Ordnungszahl nach dem Schema

$$\lim_n \alpha_n \quad \text{oder} \quad \lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}, \tag{2}$$

die wir den *Limes* der *Fundamentalfolge* α_n nennen und die als aus jedem α_n abgeleitet gelten soll (vgl. 4). Beide Schemata (2) sind in Formeln untereinander auswechselbar. — Es ist also

$$\lim_n \alpha_n > \alpha_m \quad \text{für} \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

$\lim\limits_n \alpha_n$ oder $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ sind *erste* Hilfsfiguren (vgl. 2, 3. Absatz)[6]), die wir nach bestimmten Regeln (unter Umständen sukzessive durch andere Hilfsfiguren aus den Zeichen (1) und zuletzt) durch eine reguläre Figur λ ersetzen. Wir nennen λ einen *Anfangsfall* oder eine *Limeszahl*, ebenso die ihr gleichen Hilfsfiguren. In der Figur $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ werden so viele α_i hingeschrieben, daß das Bildungsgesetz der α_i sichtbar wird (praktisch werden immer die ersten drei Glieder genügen); unter dieser Voraussetzung gelten Figuren mit verschiedenen Anzahlen hingeschriebener Glieder derselben Fundamentalfolge nicht als verschieden. Auch die Figuren $\lim\limits_n \alpha_n$ und $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ wollen wir nicht als verschieden betrachten, sofern die erste (ohne ad hoc eingeführte, nicht feste Abkürzungen) gebildet werden kann. Es soll auch nicht darauf ankommen, ob die α_i in vollregulärer oder in abgekürzter regulärer Form erscheinen. — Natürlich dürfen wir n durch andere kleine lateinische Buchstaben ersetzen.

Jede vollreguläre Zahlenfigur unseres Algorithmus außer 1 hat entweder die Form $\underline{\lambda} = \lim\limits_n \alpha_n$ oder $\alpha + 1$, d. h. jede Ableitung einer Zahl enthält zum Schluß entweder den Übergang $\alpha \to \alpha + 1$ oder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \to \lim\limits_n \alpha_n \to \lambda$.

4. Eine wesentliche Aufgabe wird es sein, zugleich mit der Entwicklung des Algorithmus nachzuweisen, daß die transfinite Induktion in ihm gilt. Damit ist folgendes gemeint. Sei $\mathfrak{A}(\alpha)$ eine Aussage, in der eine Variable α für Ordnungszahlen auftritt und die folgende Eigenschaften hat.

$$(4)\quad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{A}(1) \text{ ist richtig.} \\ 2.\ \alpha = \beta \wedge \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A}(\beta). \qquad (\beta \text{ aus } \alpha \text{ ableitbar.}) \\ 3.\ \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A}(\alpha + 1). \\ 4.\ (\mathfrak{A}(\alpha_n)_{n=1,2,3,\ldots}) \Rightarrow \mathfrak{A}\left(\lim\limits_n \alpha_n\right). \end{cases}$$

Wenn dann $\mathfrak{A}(\alpha)$ immer richtig ist, sagen wir, daß im Algorithmus die transfinite Induktion gilt. $\mathfrak{T}(\alpha)$ sei die Aussage: „Die transfinite Induktion gilt bis zu α einschließlich hin." Dann ist $\mathfrak{T}$ ein $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften (4) und überdies ein $\mathfrak{A}$ mit der weiteren Eigenschaft

$$(5)\qquad \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow (\mathfrak{A}(\beta)_{\beta \leq \alpha}). \qquad (\alpha \text{ aus } \beta \text{ ableitbar.})$$

Wenn es gelingt, zugleich mit der Ableitung von α aus 1 die Aussage $\mathfrak{T}(\alpha)$ aus der trivialerweise richtigen Aussage $\mathfrak{T}(1)$ herzuleiten, so ist die Richtigkeit von $\mathfrak{T}(\alpha)$ nachgewiesen.

Es ist aber nicht nötig, bei diesem Nachweis mit der allgemeinen Aussage $\mathfrak{T}(\alpha)$ zu arbeiten, sondern $\mathfrak{T}(\alpha)$ darf durch jede spezielle Aussage $\mathfrak{A}(\alpha)$ ersetzt werden, welche die Eigenschaften (4) und (5) besitzt. Eine solche Aussage

[6]) Wir lassen also noch individuelle Zahlenfiguren zu, in denen außer den Zeichen (1) noch das Zeichen lim auftritt sowie eine Variable für natürliche Zahlen oder die Zeichen „,", { } und das Rekursionszeichen „ ...".

ist nun: „Die Ordnungszahl α ist ableitbar", die wir jetzt mit $\mathfrak{A}(\alpha)$ bezeichnen. Die Ableitbarkeit ist dabei im Sinne von 2, letzter Absatz, zu verstehen.

Daß $\mathfrak{A}(1)$ richtig ist, ist klar. Ebenso liegt auf der Hand, daß (4, 2) zutrifft. Hat man ferner von 1 aus die Zahl α durch fortgesetzte Ableitungen gewonnen, dann gibt es in diesem Stadium des Algorithmus außer α keine anderen algorithmisch möglichen, d.h. ableitbaren Zahlenfiguren β als solche, aus denen α abgeleitet werden kann. Also gilt (5). Wollen wir vom vollregulären α aus weiterkonstruieren, so können wir das nach dem II. Konstruktionsprinzip zunächst nur durch den Übergang zu $\alpha+1$ tun. Somit gilt (4, 3). — Sind wir ferner zu der Fundamentalfolge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ fortgeschritten, dann gibt es in diesem Stadium außer den α_i nur solche algorithmisch mögliche, d.h. ableitbare Zahlenfiguren β, aus denen ein α_m abgeleitet werden kann. Wegen (3) ist die Klasse dieser β einschließlich der α_i identisch mit der Klasse derjenigen β, aus denen sich $\lim_n \alpha_n$ ableiten läßt; denn andere Zahlen, aus denen $\lim_n \alpha_n$ ableitbar wäre, sind nicht erklärt. Somit gilt (5), wenn α durch $\lim_n \alpha_n$ ersetzt wird, und die Klasse der Zahlen $\beta < \lim_n \alpha_n$ ist festgelegt. Ist endlich $\beta_1 < \lim_n \alpha_n$, $\beta_2 < \lim_n \alpha_n$, so bedeutet dies nach dem soeben Gesagten, daß sich zwei natürliche Zahlen m_1, m_2 mit $\beta_1 < \alpha_{m_1}$, $\beta_2 < \alpha_{m_2}$ angeben lassen; somit ist $\beta_1 < \alpha_m$, $\beta_2 < \alpha_m$ für $m = \max(m_1, m_2)$. Wegen der Ableitbarkeit von α_m sind daher β_1 und β_2, falls nicht identisch, vergleichbar. Also gilt auch (4, 4) für unser spezielles $\mathfrak{A}$.

Die Entwicklung des Algorithmus besteht in der Ableitung immer größerer Zahlen α, d.h. in der Herbeiführung von Aussagen $\mathfrak{A}(\alpha)$ für immer größere α. Somit gilt wegen (5) $\mathfrak{A}(\alpha)$ für alle algorithmisch erfaßbaren Zahlen und damit auch $\mathfrak{T}(\alpha)$.

Die vorstehenden Ausführungen sollen natürlich noch kein Beweis für die Gültigkeit der transfiniten Induktion sein, sondern nur ein Programm, nach welchem die Realisierung dieses Beweises an Hand der Entwicklung des Algorithmus (§ 2, 2) festzustellen ist.

Nach dem II. Konstruktionsprinzip stellen sich $\alpha+1$ und $\lim_n \alpha_n$ als die kleinsten Zahlen dar, welche $> \alpha$ bzw. größer als jedes α_m sind. Bezüglich $\alpha+1$ ist dies klar. Zu der Klasse aller α_i und aller $\beta \leq \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ wird durch die Definition (2) eine neue Zahl $\lim_n \alpha_n$ hinzugefügt und von der ihr gleichen vollregulären Zahl λ aus (I. Konstruktionsprinzip) beginnt dann die Konstruktion von vorne (II. Konstruktionsprinzip), d.h. alle neu hinzukommenden Zahlen $\lambda+1$ usw. sind $> \lambda$, also $> \lim_n \alpha_n$.

Wir heben noch einmal hervor, daß $\beta < \lim_n \alpha_n$ die Nennbarkeit eines $\alpha_m > \beta$ bedeutet.

Eine wichtige Aussage mit den Eigenschaften (4) und (5) ist: „*Von jedem α aus gibt es nur endliche Regresse* $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > 1$", welche die Menge aller Zahlen $< \alpha$ (man beschränke sich auf die vollregulären Zahlenfiguren) als „wohlgeordnet" ausweist.

5. Die erste vollreguläre Limeszahl definieren wir durch

$$(6) \qquad \underline{1V} = \lim\{1, 2, 3, \ldots\} = \lim_n n.$$

Die Zahlen $\geq 1V$ nennen wir transfinit. Im Algorithmus spielen diejenigen transfiniten Zahlenfiguren aus den Zeichen (1) (das sind die Zahlenfiguren aus den Zeichen (1), in denen V wirklich vorkommt) eine besondere Rolle, bei denen, wenn sie in vollständiger Form geschrieben werden, in der Grundzeile kein $+$-Zeichen auftritt, d.h. bei denen $+$-Zeichen höchstens in Exponenten auftreten; wir nennen sie *Hauptzahlen*. Sie sind stets Limeszahlen.

Wir geben jetzt einige figürliche Schemata an, nach denen wir in der Folge neue Zahlenfiguren aus bereits verfügbaren konstruieren.

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{cases} (1) & \underline{\varphi(n+1)} = \varphi n + \varphi = \lim_m (\varphi n + \gamma_m), \text{ wo } \varphi = \lim_m \gamma_m, \\ (2) & \eta + \varphi = \lim_m (\eta + \gamma_m), \\ (3) & \underline{\eta + \varphi(n+1)} = \eta + \varphi n + \varphi = \lim_m (\eta + \varphi n + \gamma_m). \end{cases}$$

Hierin sind φ und η Limeszahlen, und zwar nach I in vollregulärer Form. In $(\mathfrak{A}, 2)$ ist $\eta + \varphi$ Hilfsfigur, wenn $\eta = \varphi n$ oder $= \xi + \varphi n$ ist. $(\mathfrak{A}, 1)$ und $(\mathfrak{A}, 3)$ sind also Spezialfälle von $(\mathfrak{A}, 2)$. $\varphi n + \gamma_m$, $\eta + \gamma_m$ und $\eta + \varphi n + \gamma_m$ sind reguläre Figuren. — In $(\mathfrak{A}, 1)$ ist φ eine beliebige Hauptzahl. Daher ist auch in $(\mathfrak{A}, 3)$ φ eine Hauptzahl. Nicht jede gemäß $(\mathfrak{A}, 2)$ und $(\mathfrak{A}, 3)$ gebildete Figur kommt im Algorithmus vor (vgl. § 3, **3**). — *Wenn φ_i, $i > 1$, die i-te Hilfsfigur für φ ist* (vgl. **2**, 3. Absatz, und **3**, Bemerkung zu (3)), *so seien vorweg $\varphi n + \varphi_i$, $\eta + \varphi n + \varphi_i$ und $\eta + \varphi_i$ die i-ten Hilfsfiguren für $\varphi(n+1)$, $\eta + \varphi(n+1)$ und die zu $\eta + \varphi$ gleiche vollreguläre Zahlenfigur.* Wir verwenden also im Algorithmus die Figuren $\varphi n + \lim_m \gamma_m$ usw. nicht.

Das Schema $(\mathfrak{A}, 1)$ erläutern wir durch folgende

Koeffizientenregel. Die Formel φn ist eine Abkürzung für $\varphi(n)$, d.h. bei Ersetzung der Variablen n durch eine individuelle Zahl $1 + 1 + \cdots + 1$ schreiben wir $\varphi(1 + 1 + \cdots + 1)$. n heißt der Koeffizient von φ. — n darf auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird ebenso wie ihre Klammer nicht hingeschrieben. Wir sagen, die Zahlenfigur φ habe den Koeffizienten 1. — In φn darf die Variable n direkt (d.h. ohne Einschließung in ( )) durch ein dekadisches Zahlzeichen > 1 ersetzt werden.

Das Schema $(\mathfrak{A})$ beschreibt die „*Konstruktion hinter dem $+$-Zeichen*" oder die „*additive Konstruktion*". Diese wird jeweils abgeschlossen mittels des Operators V nach folgendem Schema:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \varphi V = \lim_n \varphi n \qquad (\varphi > 1).$$

Die Formel φV steht dabei als Abkürzung für $(\varphi)V$, wenn $\varphi > 1$; dann ist nämlich φ immer aus mehreren Zeichen (1) zusammengesetzt, so daß um der Eindeutigkeit willen bei Ersetzung der Variablen φ durch eine individuelle Zahlenfigur deren Einklammerung nötig wird. (Die Einklammerung von φ

braucht in der Formel φn bei Individualisierung nicht zu erfolgen, weil der Algorithmus nur „Produkte" aus zwei Faktoren der Form φn kennt.) φV stellt im Fall $\varphi > 1$ dann und nur dann eine Zahlenfigur des Algorithmus (in vollständiger Form) dar, wenn φ eine Hauptzahl in (voll-)regulärer Form ist. *φV ist entweder regulär oder zweite Hilfsfigur.*

V ist ein Operator 1. Stufe, der stets auf eine *Zahlenfigur* „ausgeübt" wird. Die Verwendung der Operatoren 1. Stufe geschieht nach folgendem Schema, in dem W einen Operator 1. Stufe bezeichnet:

$$(\mathfrak{O}_1) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \underline{\alpha W^{\beta+1}} = (\alpha W^{\beta}) W \\ \text{(b)} & \underline{\alpha W^{\lambda}} = \lim\limits_{n} \alpha W^{\gamma_n}, \quad \text{wo} \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n. \end{cases}$$

Dabei gilt die Festsetzung, daß $\alpha W^{\delta} (\delta \geq 1)$ eine Abkürzung für $(\alpha) W^{\delta}$ sein soll, wenn α aus mehreren Zeichen besteht, also > 1 ist. Für die Exponentenschreibweise verabreden wir allgemein die nachstehende

Exponentenregel. Ist X ein beliebiger Operator, so darf in der Formel X^{α} die Variable α (der „Exponent" von X) auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird nicht hingeschrieben; wir sagen, die Figur X habe den Exponenten 1. — Ist der Operator X zusammengesetzt, $X = Y \ldots Z$, so ist X^{α} eine Abkürzung für $(X)^{\alpha} = (Y \ldots Z)^{\alpha}$, und bei Ersetzung von α durch 1 wird außer dieser 1 auch die ( ) um $Y \ldots Z$ weggelassen.

Daß die in $(\mathfrak{O}_1)$ links stehenden Zahlenfiguren immer regulär sind, wird sich bei der Entwicklung des Algorithmus ergeben; W^{δ} ist nämlich für $\delta > 1$ nie ein Operator, weil es nach I und II kein mit $(\mathfrak{O}_1)$ vereinbares Schema für seine Anwendung gibt.

Das Schema $(\mathfrak{O}_1)$ beschreibt die *„Konstruktion im Exponenten von W"*; diese wird abgeschlossen mittels des Operators I nach dem Schema

$$(\mathfrak{I}) \qquad \alpha W I = \lim \left\{ \alpha W,\ \alpha W^{\alpha W},\ \alpha W^{\alpha W^{\alpha W}},\ \ldots \right\}.$$

I ist der „einfachste" Operator 2. Stufe und wird stets auf einen Operator 1. Stufe W ausgeübt. Die Anwendung des Schemas $(\mathfrak{I})$ ist genau dann möglich, wenn αW vollregulär ist. WI ist ein Operator 1. Stufe. — Wenn W aus mehreren Zeichen besteht, soll αWI bzw. WI eine Abkürzung für $\alpha (W) I$ bzw. $(W) I$ sein. Analoge Festsetzungen sollen für die Operatoren höherer Stufe gelten.

Wir schreiben jetzt eine weitere Reihe von Schematas für Operatoren auf, deren Erläuterung anschließend gegeben wird.

$$(\mathfrak{O}_2) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X^{\beta+1} = \alpha (W X^{\beta}) X \\ \text{(b)} & \alpha W X^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha W X^{\gamma_n}, \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{I}') \qquad \alpha W X I' = \lim \left\{ \alpha W X,\ \alpha W X^{\alpha W X},\ \alpha W X^{\alpha W X^{\alpha W X}},\ \ldots \right\}.$$

$$(\mathfrak{O}_3)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X Y^{\beta+1} = \alpha W (X Y^{\beta}) Y \\ \text{(b)} & \alpha W X Y^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha W X Y^{\gamma_n}, \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{F}'')\qquad \begin{cases} \alpha W X Y I'' \\ = \lim \left\{ \alpha W X Y,\ \alpha W X Y^{\alpha W X Y},\ \alpha W X Y^{\alpha W X Y^{\alpha W X Y}},\ \ldots \right\}. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{O}_4)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X Y Z^{\beta+1} = \alpha W X (Y Z^{\beta}) Z \\ \text{(b)} & \alpha W X Y Z^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha W X Y Z^{\gamma_n}, \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n. \end{cases}$$

Endlich für $n \geq 3$ (wobei $I^{(3)}$ für I''' stehen soll):

$$(\mathfrak{F}^{(n)})\qquad \begin{cases} \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} I^{(n)} \\ = \lim \left\{ \alpha W X \ldots X_{n-1},\ \alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}},\right. \\ \qquad \left. \alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}}},\ \ldots \right\}^{7}). \end{cases}$$

$$(\mathfrak{O}_{n+2})\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\beta+1} = \alpha W X \ldots X_{n-2} (X_{n-1} X_n^{\beta}) X_n \\ \text{(b)} & \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\lambda} = \lim\limits_{p} \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\gamma_p}, \\ & \qquad \underline{\lambda} = \lim\limits_{p} \gamma_p. \end{cases}$$

Um Wiederholungen zu vermeiden, erläutern wir sogleich die allgemeinen Schemata $(\mathfrak{F}^{(n)})$ und $(\mathfrak{O}_{n+2})$; für die speziellen Schemata $(\mathfrak{O}_1)$ bis $(\mathfrak{O}_4)$ und $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, $(\mathfrak{F}'')$ gilt sinngemäß dasselbe.

$W, X, X_1, \ldots, X_n$ sind Variable für Operatoren 1., 2., ..., $(n+2)$-ter Stufe; $I^{(n)}$ ist ein Operator $(n+2)$-ter Stufe. Ist $\alpha W X X_1 \ldots X_n$ eine Zahlenfigur des Algorithmus, so ist in ihr X_n auf X_{n-1} ausgeübt, $X_{n-1} X_n$ ein Operator $(n+1)$-ter Stufe auf X_{n+2} ausgeübt, ..., $X_1 X_2 \ldots X_n$ ein Operator 3. Stufe auf X ausgeübt, $X X_1 \ldots X_n$ ein Operator 2. Stufe auf W ausgeübt und $W X \ldots X_n$ ein Operator 1. Stufe auf α ausgeübt.

$(\mathfrak{O}_{n+2})$ liefert das Schema für die „*Konstruktion im Exponenten von* X_n", soweit diese im individuellen Fall möglich ist; ist sie „unbeschränkt" durchführbar, so wird sie mittels des Schemas $(\mathfrak{F}^{(n+1)})$ abgeschlossen. Der durch $(\mathfrak{F}^{(n+1)})$ definierte Limes kann nicht durch das Schema $(\mathfrak{O}_{n+2}, \text{b})$ erfaßt werden.

Die Zahlen β und λ sind *vor* Anwendung von $(\mathfrak{O}_{n+2})$ konstruiert zu denken. $X_{n-1} X_n^{\beta}$ gilt in $(\mathfrak{O}_{n+2}, \text{a})$ als ein Operator $(n+1)$-ter Stufe, auf den X_n ausgeübt wird.

X_n^{δ} ist für $\delta > 1$ kein Operator, erst $X_{n-1} X_n^{\delta}$ kann eventuell ein Operator $(n+1)$-ter Stufe sein (wie in $(\mathfrak{O}_{n+2})$ für $\delta = \beta + 1$ oder $\delta = \lambda$). Daher sind in $(\mathfrak{O}_{n+2})$ jedenfalls $X_{n-1} X_n^{\beta+1}$ und $X_{n-1} X_n^{\lambda}$ reguläre Formen für Operatoren $(n+1)$-ter Stufe. — Die Zahlenfiguren in $(\mathfrak{F}^{(n)})$ und $(\mathfrak{O}_{n+2})$ links können noch

[7]) In schematischen Darstellungen benützen wir gelegentlich die Formeln $m \pm n$ und ähnliche der elementaren Zahlentheorie.

Hilfsfiguren sein, hingegen sind nach I und der Definition des lim die Figuren $\alpha W X \dots X_{n-1} X_n^{\beta}$, $\alpha W X \dots X_{n-1} X_n^{\gamma_p}$ in $(\mathfrak{O}_{n+2}$, a, b) und die Figuren innerhalb $\{\}$ in $(\mathfrak{F}^{(n)})$ (voll-)regulär. — In $(\mathfrak{F}^{(n)})$ gelangt man dann links nach höchstens $n+2$ Schritten zu einer regulären Figur. Wenn nämlich $X_{n-1} = Y_{n-1} I^{(n)\beta_1}$ ist, kommt gemäß $(\mathfrak{O}_{n+2}$, a) als nächste Hilfsfigur oder unter Umständen schon als reguläre Figur $\alpha W X \dots X_{n-2} Y_{n-1} I^{(n)\beta_1+1}$. Ist hierin noch $X_{n-2} = Y_{n-2}(Y_{n-1} I^{(n)\beta_1+1})^{\beta_2}$, so reduziert man mittels $(\mathfrak{O}_{n+1}$, a) usf. Es kann natürlich auch $X_{n-1} I^{(n)}$ eine reguläre Operatorfigur sein und $X_{n-2} = Y_{n-2}(X_{n-1} I^{(n)})^{\beta_1}$; dann wendet man $(\mathfrak{O}_{n+1}$, a) an und kommt mit höchstens $n+1$ Schritten aus. Schließlich kann sogar die Figur $W X \dots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operator 1. Stufe in regulärer Form sein und $\alpha = \alpha_1 (W X \dots X_{n-1} I^{(n)})^{\beta_1}$; dann erhält man durch Anwendung von $(\mathfrak{O}_1$, a) schon eine reguläre Zahlenfigur. — In $(\mathfrak{O}_{n+2})$ erfordert die Reduktion auf reguläre Zahlenfiguren links, falls man dort Hilfsfiguren stehen hat, höchstens $n+1$ Schritte, wie man ganz analog einsieht. Ist z. B. in $(\mathfrak{O}_{n+2}$, b) $X_{n-2} = Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1}$, so erhält man vermöge $(\mathfrak{O}_{n+1}$, a): $\alpha W X \dots (Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1}) X_{n-1} X_n^{\lambda} = \alpha W X \dots Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1+1}$ usf.

Ist λ_i, $i > 1$, die i-te Hilfsfigur für λ, so sei vorweg $\alpha W X \dots X_n^{\lambda_i}$ die i-te Hilfsfigur der zu $\alpha W X \dots X_n^{\lambda}$ gehörigen regulären Zahlenfigur; wir wollen nämlich im Algorithmus die Figur $\alpha W X \dots X_n^{\lim\limits_p \gamma_p}$ nicht benützen. — *Die linken Seiten von* $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, $(\mathfrak{F}'')$, ... *sind entweder regulär oder zweite Hilfsfiguren.*

§ 2. Entwicklung des Algorithmus bis zum Anfangsfall $1 V I I' I'' \dots$.

1. Wir wollen nun zeigen, daß unsere Regeln einen zwangsläufigen Prozeß der Ableitung von Zahlenfiguren bewirken. Die Realisierung des in § 1, 4 skizzierten Beweises für die Gültigkeit der transfiniten Induktion wird sich dabei von selbst ergeben, wenn wir bei jedem Konstruktionsschritt darauf achten, daß die Feststellung „α ist abgeleitet" (oder „gebildet" u. dgl.), also die in § 1, 4 definierte Aussage $\mathfrak{A}(\alpha)$, in dem dort und in § 1, 2 erklärten Sinne richtig ist. Das bedeutet aber, daß die durch die Schemata $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{O}_1)$, $(\mathfrak{O}_2)$, ..., $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, ... vorgenommenen Definitionen, *sofern sie im Zuge des ab 1 entwickelten Algorithmus erfolgen*, zugleich eine Ableitung der definierten Zahlen im erwähnten Sinne darstellen müssen. Wir werden die genannten Schemata mittels folgender (natürlich nur im individuellen Fall als berechtigt einsehbarer) Methoden anwenden.

1. Wenn die Limeszahlen η und φ abgeleitet sind, sehen wir, unter gewissen Voraussetzungen für η und φ, die Zahlen $\eta + \alpha$ für alle $\alpha < \varphi$ als abgeleitet an, und zwar in derselben Reihenfolge, wie die α abgeleitet sind. Damit ergibt sich die Anwendbarkeit von $(\mathfrak{A}, 2)$, $(\mathfrak{A}, 3)$, $(\mathfrak{A}, 1)$ und sodann von $(\mathfrak{B})$. Die additive Konstruktion und ihr Abschluß gemäß $(\mathfrak{B})$ führt also von ableitbaren zu ableitbaren Zahlen. Die Anfügung des Zeichens V zu einer passenden Zahl φ in deren Grundzeile stellt demnach die Ausübung eines Operators dar mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\varphi) \Rightarrow \mathfrak{A}(\varphi V)$.

2. Wenn α ableitbar und W ein zu α passender Operator ist, d. h. wenn $\mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A}(\alpha W)$ gilt, wenn ferner β ableitbar ist, so wird unter Voraussetzungen,

die im konkreten Fall zu beurteilen sind, die Ableitbarkeit von αW^β an Hand des Ableitungsprozesses für β eingesehen, d.h. es gilt $\mathfrak{A}(\alpha) \wedge \mathfrak{A}(\alpha W) \wedge \mathfrak{A}(\beta) \Rightarrow \mathfrak{A}(\alpha W^\beta)$. Zugleich werden alle αW^γ mit $\gamma < \beta$ in derselben Reihenfolge wie die γ als ableitbar betrachtet. Wir nennen dann W einen von αW aus (mindestens bis zum Exponenten β) *iterierbaren* Operator. — Das entsprechende ist hinsichtlich der Operatoren höherer Stufe zu sagen. Natürlich erfolgt die Iteration eines Operators i-ter Stufe an Hand der Schemata $(\mathfrak{O}_i, \text{a}, \text{b})$. — Die Konstruktion im Exponenten oder die Iteration führt also von ableitbaren zu ableitbaren Zahlen. — Ist die Konstruktion im Exponenten „unbeschränkt" durchführbar (vgl. §1, **5**, den dritten Absatz nach $(\mathfrak{O}_{n+2})$), so ist klar, daß die entsprechenden Limesdefinitionen $(\mathfrak{J}), (\mathfrak{J}'), \ldots$ jeweils eine Ableitung darstellen.

Daß die Konstruktion im Exponenten nicht immer unbeschränkt vorgenommen werden kann, zeigt das durch die nachherigen Ausführungen verständlich werdende Beispiel der Ausgangszahl $\left(1VI^{1V}\right)VI$. Mittels des Operators I, auf VI usw. ausgeübt, erhält man durch Iteration $\left(1VI^{1V}\right)VI^2$, $\left(1VI^{1V}\right)VI^3, \ldots$ und auch noch $\left(1VI^{1V}\right)VI^{1V}$. Aber höher darf man nicht gehen, weil die letzte Figur eine gemäß $(\mathfrak{O}_1, \text{a})$ durch $1\left(VI^{1V}\right)^2$ zu ersetzende Hilfsfigur ist.

2. Aus der mit (6) etablierten Zahlenfigur $1V$ gewinnen wir durch Nachfolgerbildung die Zahlen $1V+1$, $1V+1+1$ usw. und können gemäß $(\mathfrak{A}, 1)$ definieren

$$(7) \qquad \underline{1V(1+1)} = \underline{1V\,2} = 1V + 1V = \lim_n (1V + n).$$

Sodann kommt $1V\,2+1$, $1V\,2+1+1, \ldots$, also wieder gemäß $(\mathfrak{A}, 1)$

$$\underline{1V(1+1+1)} = \underline{1V\,3} = 1V\,2 + 1V = \lim_n (1V\,2 + n).$$

Ebenso erhalten wir $1V\,4$, $1V\,5, \ldots$ und gemäß $(\mathfrak{R})$ sowie $(\mathfrak{O}_1, \text{a})$

$$(8) \qquad \underline{1V^{1+1}} = \underline{1V^2} = (1V)\,V = \lim_n 1V\,n.$$

Nun fangen wir mit $1V^2$ von vorne an und bilden $1V^2+1$, $1V^2+2, \ldots$, sodann gemäß $(\mathfrak{A}, 2)$ $\underline{1V^2+1V} = \lim_n (1V^2+n)$, darauf $1V^2+1V+1$ usw., gemäß $(\mathfrak{A}, 3)$ $1V^2+1V\,2$, $1V^2+1V\,3$ usf. und nach $(\mathfrak{A}, 1)$ mittels (8)

$$(9) \qquad \underline{1V^2\,2} = 1V^2 + 1V^2 = 1V^2 + (1V)\,V = \lim_n (1V^2 + 1V\,n).$$

Analog schreiten wir zu $1V^2\,3$, $1V^2\,4, \ldots$, dann zu

$$1V^3 = (1V^2)\,V = \lim_n 1V^2\,n \quad (\text{gemäß } (\mathfrak{R}) \text{ und } (\mathfrak{O}_1, \text{a}))$$

fort, ferner zu $1V^4$, $1V^5, \ldots$ und definieren nach $(\mathfrak{O}_1, \text{b})$

$$(10) \qquad \underline{1V^{1V}} = \lim_n 1V^n.$$

Jetzt können wir alle Zahlen $1V^{1V}+\alpha$ mit $\alpha<1V^{1V}$ bilden, ferner $1V^{1V}2$, $1V^{1V}3$ usw., dann $\underline{1V^{1V+1}}=\left(1V^{1V}\right)V$, $1V^{1V+2}$ usw., also auch gemäß $(\mathfrak{D}_1, \text{b})$

$$(11)\qquad \underline{1V^{1V(1+1)}}=\underline{1V^{1V2}}=1V^{1V+1V}=\lim_{n} 1V^{1V+n},$$

entsprechend $1V^{1V3}$ usf., dann $1V^{1V^2}$, $1V^{1V^3}$, ..., endlich

$$(12)\qquad \underline{1V^{1V^{1V}}}=\lim_{n} 1V^{1V^n}.$$

Um zu (12) zu kommen, haben wir offenbar die Konstruktion von $1V^{1V}$ aus $1V$ im Exponenten von V ausgeführt. Ebenso können wir die Konstruktion von $\beta=1V^{1V^{1V}}$ im Exponenten von V wiederholen (insbesondere alle $1V^{\alpha}$ mit $\alpha<\beta$ bilden) und zu $1V^{\beta}=\gamma$ gelangen. Dann läßt sich auch $1V^{\gamma}=\delta$ ableiten usw. Die Konstruktion im Exponenten ist also hier unbeschränkt möglich und liefert gemäß $(\mathfrak{J})$:

$$(13)\qquad \underline{1VI}=\lim\left\{1V,\ 1V^{1V},\ 1V^{1V^{1V}},\ \ldots\right\}.$$

Indem wir die Konstruktion von $1VI$ aus neu beginnen, können wir die zu (13) führenden Überlegungen analog wiederholen und damit VI als einen von $1VI$ aus iterierbaren Operator 1. Stufe erkennen, mit dem wir $\underline{1(VI)^2}=(1VI)VI$ $((\mathfrak{D}_1, \text{a}))$, ebenso $1(VI)^3$ usw. zu bilden vermögen. Die Konstruktion im Exponenten von VI ist wieder unbeschränkt möglich und führt gemäß $(\mathfrak{J})$ und $(\mathfrak{D}_2, \text{a})$ zu

$$(14)\qquad \underline{1VI^2}=1(VI)I=\lim\left\{1VI,\ 1(VI)^{1VI},\ 1(VI)^{1(VI)^{1VI}},\ \ldots\right\}.$$

Damit hat sich VI^2 als neuer Operator 1. Stufe ergeben, dessen Iteration $\underline{1(VI^2)^2}=(1VI^2)VI^2$, $1(VI^2)^3$ usw. liefert, und die Konstruktion im Exponenten von VI^2 ist wieder unbeschränkt durchführbar. Demnach kommt $\underline{1VI^3}=1(VI^2)I$, analog $1VI^4$ usf., $\underline{1VI^{1V}}=\lim_{n} 1VI^n$ nach $(\mathfrak{D}_2, \text{b})$, $1VI^{1V+1}$ usw. und an Hand der Konstruktion von $1VI$

$$(15)\qquad \underline{1VI^{1VI}}=\lim\left\{1VI^{1V},\ 1VI^{1V^{1V}},\ 1VI^{1V^{1V^{1V}}},\ \ldots\right\}.$$

Wir können offenbar auch im Exponenten des iterierbaren Operators 2. Stufe I unbeschränkt konstruieren, d.h. mit der Konstruktion der Zahl

(15) in den Exponenten von I hineingehen usw. und erhalten gemäß ($\mathfrak{Z}'$)

$$(16) \qquad \underline{1VII'} = \lim\left\{1VI,\ 1VI^{1VI},\ 1VI^{1VI^{1VI}},\ \ldots\right\}.$$

VII' ist also ein Operator 1. Stufe, der von (16) aus iterierbar ist, und zwar unbeschränkt, also auch, wie man analog zur Herleitung von (16) erkennt, wie V dem Operator 2. Stufe II' unterworfen werden kann, der gleichfalls unbeschränkt von (16) aus iterierbar ist. Es ergibt sich also $1(VII')^2, \ldots,$ $1(VII')I,\ 1(VII')I^2, \ldots,\ \underline{1V(II')^2} = 1(VII')II',\ 1V(II')^3$ usw., schließlich bei Ausübung des Operators 3. Stufe I' auf den Operator 2. Stufe II': $\underline{1VII'^2} = 1V(II')I'$. Ebenso gelangt man zu $\underline{1VII'^3} = 1V(II'^2)I'$ usw. und schließlich gemäß ($\mathfrak{Z}''$) zu

$$(17) \qquad \underline{1VII'I''} = \lim\left\{1VII',\ 1VII'^{1VII'},\ 1VII'^{1VII'^{1VII'}},\ \ldots\right\}.$$

In (17) ist $VII'I''$ ein Operator 1. Stufe; auf ihn kann man den Operator 2. Stufe $II'I''$ ebenso ausüben wie in (17) auf V, auf $II'I''$ den Operator 3. Stufe $I'I''$ ebenso wie in (17) auf I, und auf $I'I''$ den Operator 4. Stufe I'' ebenso wie in (17) auf I'. So ergeben sich $\underline{1V(II'I'')^2} = 1(VII'I'')II'I''$, $\underline{1VI(I'I'')^2} = 1V(II'I'')I'I''$, $\underline{1VII'I''^2} = \underline{1VI(I'I'')I''}$, analog $1VII'I''^3$ usf., dann gemäß ($\mathfrak{Z}'''$) $1VII'I''I'''$.

So kann man fortfahren. Allgemein gelangt man gemäß Schema ($\mathfrak{Z}^{(n)}$) zu den Zahlenfiguren ($n = 4, 5, \ldots$)

$$(18) \qquad \left\{\underline{1VII'\ldots I^{(n)}} = \lim\left\{1VI\ldots I^{(n-1)},\ 1VI\ldots I^{(n-1)^{1VI\ldots I^{(n-1)}}},\ 1VI\ldots I^{(n-1)^{1VI\ldots I^{(n-1)}}},\ \ldots\right\}.\right.$$

Auch die „Zwischenzahlen" β mit $1VI\ldots I^{(n-1)} < \beta < 1VI\ldots I^{(n)}$ ergeben sich zwangsläufig, wenn man sich irgendwie den Regeln von § 1 überläßt.

Endlich definieren wir

$$(19) \qquad 1VII'I''\ldots = \lim\{1VI,\ 1VII',\ 1VII'I'', \ldots\}.$$

Die Fortführung des Algorithmus erfordert an dieser Stelle ein neues Zeichen, das die Ersetzung der provisorischen Figur $1VII'I''\ldots$ durch eine „reguläre" Figur zu ermöglichen hätte.

3. Nun wollen wir einige sich aus der vorstehenden Entwicklung ergebende Betrachtungen über die allgemeine vollreguläre Form der transfiniten Zahlen anstellen. Diese Zahlen sind Figuren aus den Zeichen (1), in denen V mindestens einmal vorkommt. An sich ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Zeichen hingeschrieben werden, aus denen eine vollreguläre Zahlenfigur unseres Algorithmus besteht, aber dem Gang der Konstruktion

ist es gemäß, die Einzelzeichen, mit 1 beginnend, nacheinander von links nach rechts bzw. rechts oben aufzuschreiben. Dieser Art des Aufschreibens entspricht eine Reihe von sukzessiv entstehenden Teilfiguren der endgültigen Zahlenfigur α, die mit dem Abschluß der einzelnen Schreibakte vollendet werden. Unter einem Schreibakt soll das Hinschreiben eines Einzelzeichens (1) verstanden sein. Stellt eine dieser Teilfiguren selbst eine — nach I vollreguläre — Zahlenfigur dar, so nennen wir sie einen *Anfang* von α. Zu α gehört also die wohlbestimmte Reihe seiner Anfänge, wozu wir nachträglich auch α selbst rechnen, und diese Anfänge wachsen auch als Zahlen im Sinne von $<$.

Wir geben zwei Beispiele für Reihen von Anfängen.

1. Beispiel. $1, 1V, 1V^{1V}, 1V^{1V+1}, 1V^{1V+1}(1+1), 1V^{1V+1}(1+1+1),$
$1V^{1V+1}(1+1+1)+1, 1V^{1V+1}(1+1+1)+1+1.$

Das Zeichen ( ) bringt also eine gewisse Ausnahme von der Links-rechts-Regel mit sich, insofern seine rechte Hälfte, wenn ( ) einen Koeffizienten $1+1+\cdots+1$ abgrenzt, den auf $1+1$ folgenden Zeichengruppen $+1$ vorauseilt.

2. Beispiel. $1, 1V, 1VI, 1VI^{1V}, \left(1VI^{1V}\right)V, \left(1VI^{1V}\right)VI, \left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1},$
$\left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1}(1+1), \left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1}(1+1+1).$

Das Zeichen ( ) bedingt demnach eine weitere Ausnahme von der Links-rechts-Regel, wenn es in Verbindung mit Gruppen von Operatorzeichen gebraucht wird; dann greift seine linke Hälfte unter Umständen über bereits dastehende Zeichen nach links zurück.

Auch die vollständigen Hilfsfiguren, in denen kein Zeichen lim auftritt, weisen die skizzierte Links-rechts-Struktur auf; insbesondere existiert zu einer solchen Zahlenfigur α wieder die Reihe der Anfänge; diese sind vollreguläre Zahlenfiguren mit Ausnahme der letzten, α selbst. Ist $\beta = \alpha$ und β aus α ableitbar, ohne mit α identisch zu sein, so sind die Anfänge von β außer β auch Anfänge von α, aber das umgekehrte braucht nicht der Fall zu sein. Beispiel: Es ist

$$\underline{1(VI^2)^2(1+1)}$$
$$= 1(VI^2)^2 + 1(VI^2)^2 = 1(VI^2)^2 + (1VI^2)VI^2 = 1(VI^2)^2 + (1VI^2)(VI)I.$$

Ersetzt man hierin 2 durch $1+1$, so sieht man, daß nur den beiden letzten Zahlenfiguren dieselben Anfänge vorangehen, während die dritte mehr Anfänge als die zweite, diese mehr als die erste besitzt.

Allgemein gilt: Ist ξ ein Anfang von α, ξ_1 der nächste auf ξ in der Reihe der Anfänge von α folgende Anfang, so ist ξ_1 das Ergebnis einer an der *unveränderten* Figur ξ ausgeführten Konstruktion (wenn man von eventuell hinzukommenden Klammern absieht). Das besagt, daß alle vollständigen Zahlenfiguren β aus den Zeichen (1) mit $\xi < \beta < \xi_1$ ebenfalls ξ als Anfang haben.

Zahlenfiguren, die lediglich aus den Zeichen 1, +, ( ), V, I, ..., $I^{(n)}$ bestehen und $I^{(n)}$ wirklich enthalten, nennen wir $I^{(n)}$-Zahlen. Hierbei kann n auch 1, 2 oder 3 sein, indem wir $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$ durch I', I'', I''' ersetzen (in Ergänzung einer Verabredung in § 1, 1, 2. Absatz). Die Bezeichnung I-Zahl ist analog zu verstehen. Ebenso ist mit V-Zahl eine Zahlenfigur aus den Zeichen 1, +, ( ) und V gemeint, in der V tatsächlich vorkommt. Offenbar sind die V-Zahlen die Zahlen α mit $1V \leq \alpha < 1VI$, die I-Zahlen die Zahlen α mit $1VI \leq \alpha < 1VII'$, allgemein die $I^{(n)}$-Zahlen die Zahlen α mit $1VI \ldots I^{(n)} \leq \alpha < 1VI \ldots I^{(n+1)}$.

Auf die Vergleichung zweier vollregulärer V-Zahlen oder I-Zahlen werden wir in § 3 näher eingehen. Allgemein läßt sich über die nach § 1, 2 (Schluß) mögliche Vergleichbarkeit zweier nicht identischer vollregulärer Zahlenfiguren η und η' folgendes sagen. Ist η eine $I^{(n)}$-, η' eine $I^{(n')}$-Zahl, so ist $\eta < \eta'$ für $n < n'$. Das entsprechende gilt, wenn η oder η' eine V- oder I-Zahl ist. Sind η und η' zwei V- oder I- oder $I^{(n)}$-Zahlen, *so wird ihre Vergleichung hinsichtlich* $<$ *durch das Hinschreiben von „links nach rechts" realisiert.* Seien nämlich $\xi_1, \ldots, \xi_m$ und $\xi'_1, \ldots, \xi'_{m'}$ die Reihen der Anfänge für η und η'. Es ist also, wenn η und η' $I^{(n)}$-Zahlen sind, $\xi_1 = \xi'_1 = 1$, $\xi_2 = \xi'_2 = 1V$, $\xi_3 = \xi'_3 = 1VI, \ldots, \xi_{n+3} = \xi'_{n+3} = 1VI \ldots I^{(n)}, \ldots, \xi_m = \eta$, $\xi'_{m'} = \eta'$. Entweder ist $m \geq m'$ mit $\xi_{m''} = \xi'_{m''}$ für $m'' = \min(m, m')$, woraus $\eta \geq \eta'$ folgt, oder es gibt ein $j \leq \min(m, m')$, so daß $\xi_i = \xi'_i$ für $i < j$ und $\xi_j \neq \xi'_j$ ist. Da man nur endlich viele Möglichkeiten des figürlichen Übergangs von ξ_{j-1} zu einem ξ_j hat, so daß $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j$ die Reihe der Anfänge für ξ_j darstellt, so läßt sich im konkreten Falle feststellen, welche der Relationen $\xi_j \lessgtr \xi'_j$ zutrifft. Ist etwa $\xi_j < \xi'_j$, so gilt $\xi_j \leq \eta < \xi'_j \leq \eta'$. Denn η entsteht im Fall $\eta > \xi_j$ formal aus ξ_j durch Anfügung weiterer Zeichen. Alle Zahlen zwischen ξ_j und η haben daher ebenfalls den Anfang ξ_j. Also kann ξ'_j kein Zwischenstadium in der Ableitung von η aus ξ_j sein. Wegen $\xi'_j \neq \eta$ muß also $\xi'_j > \eta$ sein.

Im vorletzten Absatz von § 1, 4 haben wir betont, daß die Relation $\beta < \underset{n}{\lambda} = \lim \alpha_n$ die Nennbarkeit eines $\alpha_m > \beta$ bedeutet. Genauer gesagt: *Es gibt ein kleinstes n, so daß* $\beta < \alpha_n$; *d.h. entweder ist* $\beta < \alpha_1$ *oder es gibt ein i mit* $\alpha_i \leq \beta < \alpha_{i+1}$. Wir wollen an Hand unserer jetzigen Kenntnis des Algorithmus beschreiben, wie im konkreten Fall ein solches α_n aus der Zahlenfigur β, die wir uns in vollreguläre Form gebracht denken, abgelesen werden kann. Für $\lambda = 1V$ liegt kein Problem vor. Alle weiteren Limesdefinitionen erfolgen nach den Schematas $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C}_1, \mathrm{b})$, $(\mathfrak{C}_2, \mathrm{b}), \ldots, (\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}'), \ldots$. Es ist aber leicht zu sehen, daß jede Limesdefinition sich im Sinne der Links-rechts-Struktur unserer Zahlenfiguren zurückführen läßt auf die Definition von $1V$ oder auf eine Definition nach einem der Schemata $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}'), \ldots$. Denn das zuletzt gesetzte Zeichen in der aus $\lim\limits_{n} \alpha_n$ hervorgehenden zweiten Hilfsfigur für λ (wenn es eine solche gibt, sonst gilt die nachstehende Bemerkung für λ selbst) ist entweder V oder eines der Zeichen $I, I', I'', \ldots$.

Verstehen wir unter der Formel

$$\varrho = \lim_{n} \sigma_n = \lim \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots\}, \qquad \sigma_n \text{ vollregulär},$$

eines der Schemata $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{Z})$, $(\mathfrak{Z}')$, ... oder die Definition (6) von $1V$, so hat also die zweite vollständige Hilfsfigur für λ (bzw. λ selbst) die Form ϱ oder, falls eines der Schemata $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{D}_1, \text{b})$, $(\mathfrak{D}_2, \text{b})$, ... zur Definition von λ verwendet wurde, die Form $\vartheta \circ \varrho$, womit gemeint sein soll, daß zu der vollregulären Zahlenfigur ϑ die Figur ϱ hinzugefügt wird (entweder als neuer Exponent oder additiv in der Grundzeile von ϑ bzw. eines Exponenten von ϑ). Im ersten Fall ist $\alpha_n = \sigma_n$, im zweiten $\alpha_n = \vartheta \circ \sigma_n$, im Sinn der Identität.

1. Beispiel. $\lambda = 1\left(VI\,1V^{1V}\right)2$, $\vartheta \circ \varrho = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V^{1V}$,

$\vartheta \circ \sigma_n = \alpha_n = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V^{n}$, $\vartheta = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V$, $\varrho = 1V$, $\sigma_n = n$.

2. Beispiel. $\lambda = 1VI\,1V^{2(1+1)}$, $\vartheta \circ \varrho = 1VI\,1V^{2+(1V)V}$,

$\vartheta \circ \sigma_n = \alpha_n = 1VI\,1V^{2+1Vn}$, $\varrho = (1V)V$, $\sigma_n = 1Vn$, $\vartheta = 1VI\,1V^{2}$.

Daraus folgt, daß α_n ein Anfang von α_{n+1} ist (denn σ_n ist ein Anfang von σ_{n+1} und $\vartheta \circ \sigma_n$ ist vollregulär) und daß die Zahlen zwischen α_n und α_{n+1} einen Anfang α_n, aber keinen Anfang α_{n+1} besitzen.

Die Klasse der vollregulären Zahlenfiguren $\beta < \lambda$ ist aber die Vereinigung der Klassen der Zahlen $\beta < \alpha_1$, $\alpha_1 \leq \beta < \alpha_2$, $\alpha_2 \leq \beta < \alpha_3$ usw. Ist nun $\alpha_1 < \beta < \lambda$, so läßt sich aus der endlichen Zahlenfigur β die Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derjenigen α_i ablesen, die Anfänge zu ihr sind, und dann gilt $\alpha_n \leq \beta < \alpha_{n+1}$.

4. Unser Bezeichnungssystem für die vollregulären Zahlenfiguren $< 1VII'I''\ldots$ erfüllt die von CHURCH und KLEENE[8]) an ein konstruktives Bezeichnungssystem für einen Abschnitt der zweiten Zahlenklasse gestellten Forderungen, die in der Formulierung von W. ACKERMANN[9]) lauten:

1. Jede Zahl ist durch ein einziges Symbol zu bezeichnen.

2. Die Größenvergleichung zweier Ordnungszahlen muß in endlich vielen Schritten (rekursiv) durchgeführt werden können.

3. Das Symbol für die erste Ordnungszahl ist bekannt.

4. Wenn $\alpha \neq 1$, so muß entschieden werden können, ob α einen Vorgänger hat oder nicht; zutreffendenfalls muß der Vorgänger angebbar sein.

5. Wenn α eine Limeszahl ist, muß eine (rekursiv definierte) Fundamentalfolge für α angegeben werden können.

6. Für jede Ordnungszahl α ist die Gültigkeit der transfiniten Induktion bis zu α hin konstruktiv nachweisbar.

Der Forderung 1. entspricht die Tatsache, daß in unserem System die Gleichung $\alpha = \beta$ für vollreguläre α, β die Identität bedeutet. Die rekursive Vergleichsmöglichkeit in endlich vielen Schritten ist durch die allgemeinen

[8]) CHURCH, A.: The constructive second number class. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938). — KLEENE, S. C.: On notation for ordinal numbers. J. Symb. Logic. 3 (1938).

[9]) A. a. O. [3]).

Bemerkungen in § 1, 2, 4 und die Entwicklung des Algorithmus in § 2, 1, 2 gesichert und die Ausführung der Vergleichung in 3 näher beschrieben. Die Forderung 3. ist trivialerweise erfüllt; ebenso Forderung 4. und 5., denn jede vollreguläre Zahlenfigur hat entweder die Form $\alpha+1$ oder sie hat die erste Hilfsfigur $\lim_n \alpha_n$ (vgl. unsere Limesschemata) mit vollregulären rekursiv definierten α_n, wobei man auf diese Hilfsform von der vollregulären Form λ aus in endlich vielen Schritten zurückgehen kann. — Daß die transfinite Induktion möglich ist, ergibt sich wieder aus § 1, 2, 4 und § 2, 1, 2.

§ 3. Die Form der Zahlenfiguren $< 1VII'$.

1. Wir wollen uns einen Überblick über die möglichen Formen der vollregulären V- und I-Zahlen verschaffen, also der Zahlen β mit $1V \leq \beta < 1VI$ und der Zahlen β mit $1VI \leq \beta < 1VII'$ (vgl. § 2, 3). Eine reguläre V-Zahl hat nach § 2, 2 einen Anfang $1V^{\alpha_1}$, wo $\alpha_1 < 1VI$. Wir nehmen an, daß mit dem Hinschreiben von α_1 die Konstruktion im Exponenten von V beendet sei. Dann können wir, im Sinn der nunmehr allein möglichen additiven Konstruktion, noch einen Koeffizienten q_1 hinzufügen, so daß $1V^{\alpha_1}q_1$ entsteht, wobei wir annehmen, daß q_1 nicht weiter vergrößert werden soll. Ist $\alpha_1 > 1$, so dürfen wir eine weitere Figur $+1V^{\alpha_2}q_2$ anhängen mit $\alpha_2 < \alpha_1$ (wollten wir $1V^{\alpha_1}$ anhängen, so müßten wir q_1 durch q_1+1 ersetzen). So können wir fortfahren und gelangen nach einer Reihe von Schritten zu einer Zahlenfigur der Form

$$(20) \qquad 1V^{\alpha_1}q_1 + 1V^{\alpha_2}q_2 + \cdots + 1V^{\alpha_k}q_k + r, \qquad 1VI > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k,$$

die vollregulär ist, wenn die α_i und q_i (letztere eingeklammert) in vollregulärer Form dastehen bzw., wenn sie gleich 1 sind, gar nicht hingeschrieben werden. In (20) kann r fehlen oder $k=1$ sein.

Die α_i sind in (20) natürliche Zahlen oder wieder Zahlen der Form (20). Wenn alle $\alpha_i < 1V$ sind, nennen wir die Zahl (20) *einstöckig*; allgemein heiße die Zahl (20) $(n+1)$-*stöckig*, wenn alle α_i höchstens n-stöckig sind (womit zugelassen sei, daß sie $< 1V$ sind), aber wenigstens ein α_i (d. h. mindestens α_1) n-stöckig ist. Die kleinste n-stöckige Zahl ist das n-te Glied der Folge in (13) rechts, d. h. der Fundamentalfolge von $1VI$, das wir für den Augenblick mit $1V_n$ bezeichnen. $1V^{1V}$ ist größer als jede einstöckige, daher $1V^{1V^{1V}}$ größer als jede zweistöckige Zahl usf., d. h. $1V_n$ größer als jede $(n-1)$-stöckige Zahl. *Daher ist für $m > n$ jede m-stöckige Zahl größer als jede n-stöckige.*

Jede n-stöckige Zahl hat im Sinne des Hinschreibens von „links nach rechts (oben)" den Anfang $1V_n = 1V^{1V^{\cdots^{1V}}}$. Eine dreistöckige Zahl z. B. fängt an mit $1V^{1V^{1V}}$, woraus durch sukzessives Hinzufügen der weiteren

Zeichen die folgenden, in der Reihe ihrer Anfänge vorkommenden Zahlen entstehen:

$$1V^{1V^{\rho}},\quad 1V^{1V^{\rho}q},\quad 1V^{1V^{\rho}q+\cdots}=1V^{\alpha},\quad 1V^{1V^{\alpha}q'},$$

$$1V^{1V^{\alpha}q'+\cdots}=1V^{\beta},\ 1V^{\beta}q'',\ 1V^{\beta}q''+\cdots.$$

Die regulären Hauptzahlen (s. § 1, **5**, 1. Absatz) unterhalb $1VI$ haben die Form $1V^{\alpha}$ mit $\alpha<1VI$. $1V^{\alpha}n$ ist für $n>1$ keine Hauptzahl, denn n steht für eine Figur $1+1+\cdots+1$. Sind $\chi_1=1V^{\alpha_1}$ und $\chi_2=1V^{\alpha_2}$ zwei Hauptzahlen, so gilt natürlich $\chi_1\lesseqgtr\chi_2$, je nachdem $\alpha_1\lesseqgtr\alpha_2$ ist.

Die regulären transfiniten Zahlen $<1VI$ haben also nach (20) die Form

$$\chi_1 q_1+\chi_2 q_2+\cdots+\chi_k q_k+r,\quad \chi_1>\chi_2>\cdots>\chi_k, \tag{21}$$

wo die χ_i Hauptzahlen der Gestalt $1V^{\alpha_i}$ sind.

Ist $\eta=\chi_1 q_1+\cdots+\chi_k q_k+r$, $\eta'=\chi_1' q_1'+\cdots+\chi_{k'}' q_{k'}'+r'$, so gilt $\eta=\eta'$ nur im Fall der Identität, also für $k=k'$, $\chi_1=\chi_1'$, $q_1=q_1'$, …, $\chi_k=\chi_k'$, $q_k=q_k'$ und $r=r'$ bzw. wenn r und r' gleichzeitig als Summanden fehlen. $\eta\neq\eta'$ ist nur in folgenden Fällen möglich:

(H)
1. Es gibt ein $i\leqq\min(k,k')$, so daß $\chi_1=\chi_1'$, $q_1=q_1'$, …, $\chi_{i-1}=\chi_{i-1}'$, $q_{i-1}=q_{i-1}'$ für $i>1$ [10]), aber $\chi_i\neq\chi_i'$ ist.
2. Wie 1., nur ist auch noch $\chi_i=\chi_i'$, aber $q_i\neq q_i'$.
3. Es ist $k=k'$, $\chi_1=\chi_1'$, $q_1=q_1'$, …, $\chi_k=\chi_k'$, $q_k=q_k'$, aber entweder $r\neq r'$ oder genau eines der Glieder r, r' fehlt.
4. $k\neq k'$, $\chi_i=\chi_i'$, $q_i=q_i'$ für $i\leqq\min(k,k')$.

Nach unseren Ableitungsregeln (s. unter anderem § 2, **1**, 2) ist $\eta<\eta'$ in den nachstehenden Fällen:

(H, 1) mit $\chi_i<\chi_i'$; (H, 2) mit $q_i<q_i'$;
(H, 3) mit $r<r'$ oder fehlendem r; (H, 4) mit $k<k'$.

Sind die V-Zahlen η und η' nicht gleichstöckig, so ist ihre Vergleichung trivial. Sind η und η' gleichstöckig, so ist in den Fällen (H, 2–4) die Vergleichung wieder trivial, während im Fall (H, 1) die Exponenten α_i und α_i' zu vergleichen sind. Wenn eine der Zahlen α_i, α_i' eine natürliche Zahl ist oder wenn α_i und α_i' ungleichstöckig sind, liegt wieder ein trivialer Fall vor. Andernfalls ist die Stockwerksanzahl von α_i und α_i' mindestens um 1 niedriger als die von η und η' und wir können die vorstehende Betrachtung hinsichtlich α_i und α_i' wiederholen usw. Wegen der beim Übergang zu den Exponenten ständig abnehmenden Anzahl der Stockwerke müssen wir schließlich auf einen der genannten trivialen Fälle stoßen.

[10]) Daß im Fall $i=1$ die vorstehenden Gleichungen fortfallen, versteht sich von selbst.

Übrigens erfordert schon das Hinschreiben einer Zahl (20) eine Reihe „interner" Vergleichungen wegen der Relationen $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$.

2. Eine I-Zahl in regulärer Form hat nach § 2, 2 einen größten Anfang der Form $1VI^{\alpha_1}(\alpha_1 < 1VII')$, was bedeutet, daß mit dem Hinschreiben von α_1 die Konstruktion im Exponenten von I beendet sein soll. In diesem Anfang ist VI^{α_1} ein Operator 1. Stufe. Er kann noch mit einem Exponenten β_1 „iteriert" werden. Der so entstehende Anfang $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ ist natürlich als das Ergebnis einer Konstruktion im Exponenten von (VI^{α_1}) anzusehen; also muß $\beta_1 < \underline{1VI^{\alpha_1+1} = 1(VI^{\alpha_1})I}$ sein. Die Variablen α_1 und β_1 dürfen auch durch 1 ersetzt werden; dann haben wir die Anfänge $1(VI)^{\beta_1}$ oder $1VI^{\alpha_1}$ oder $1VI$ (s. Exponentenregel § 1, 5).

Mit der Bildung von $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ sei die Konstruktion im Exponenten von (VI^{α_1}) beendet. Dann können wir, wenn $\alpha_1 > 1$, der Zahlenfigur $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ — unter Einschließung in ( ) — noch eine Kombination VI^{α_2} mit $\alpha_2 < \alpha_1$ anhängen, d. h. den Operator 1. Stufe VI^{α_2} auf sie ausüben, so daß $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2}$ entsteht. Die letztere Figur ist ja von $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ aus abzuleiten, wobei das II. Konstruktionsprinzip zu beachten ist. Nach diesem Prinzip können wir zunächst $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI$ bilden, dann $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^2$ und allgemein durch Konstruktion im Exponenten von I jede Zahl $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\mu}$ mit $\mu < \alpha_1$. Wir können auch $\mu = \alpha_1$ machen, aber dann erhalten wir eine Hilfsfigur, welche durch eine reguläre zu ersetzen ist: $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_1} = \underline{1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}}$. Dies aber widerspricht unserem Entschluß, den Exponenten β_1 nicht mehr zu vergrößern. Also bleibt in der Tat nur die Möglichkeit $\alpha_2 < \alpha_1$. (Wenn $\alpha_1 = 1$, so kann auf Grund des genannten Entschlusses auf $1(VI)^{\beta_1}$ der Operator VI nicht mehr ausgeübt werden.)

Der Operator 1. Stufe VI^{α_2} kann wieder einen Exponenten β_2 erhalten, der jetzt $< \left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}$ sein muß, so daß wir zu dem neuen Anfang $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)(VI^{\alpha_2})^{\beta_2}$ gelangen. Diesem können wir, wenn $\alpha_2 > 1$, eine Kombination VI^{α_3} mit $\alpha_3 < \alpha_2$ anhängen usw. So fortfahrend kommen wir zu einer regulären Zahlenfigur

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi = \left(\ldots\left((1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})(VI^{\alpha_2})^{\beta_2}\right)\ldots\right)(VI^{\alpha_m})^{\beta_m}, & \text{wobei} \\ 1VII' > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m, \quad \beta_1 < 1VI^{\alpha_1+1}, \quad \beta_2 < \left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}, \ldots, \\ \beta_m < \left(\ldots(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\right)VI^{\alpha_m+1}. \end{cases}$$

φ ist vollregulär, wenn die α_i und β_i es sind (sofern sie $= 1$ sind, werden sie nicht hingeschrieben). Natürlich kann $m = 1$ sein.

Soll nach der Bildung von φ das Anhängen von Kombinationen $(VI^{\alpha})^{\beta}$ nicht mehr fortgesetzt werden (was im Fall $\alpha_m = 1$ sowieso nicht mehr möglich ist, ohne β_m zu vergrößern), so können wir vor dem Übergang zur additiven Konstruktion noch eine Kombination V^{γ} an die Figur φ anhängen. Dann entsteht die (voll)reguläre Figur

$$(23)\qquad \chi = \varphi V^{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad \gamma < \varphi VI \quad (\varphi \text{ s. } (22)).$$

Beispiel:

$$\chi=\Big(\big(1\,(VI^{\,1VI})^{1VI}\big)\big(VI^{\,1V}\big)^{1VI}\Big)_V{}^{\Big(\big(1\,(VI^{\,1VI})^{1VI}\big)\big(VI^{\,1V}\big)^{1VI}\Big)V};$$

hierin ist $m=2$, $\alpha_1=1VI$, $\beta_1=1VI<1VI^{\alpha_1+1}$, $\alpha_2=1V<\alpha_1$, $\beta_2=1VI$, $\gamma=\varphi V<\varphi VI$.

In der vollregulären Figur χ, wie sie durch (22) und (23) dargestellt wird, treten keine $+$-Zeichen in der Grundzeile auf. Also ist χ nach § 1, 5 eine Hauptzahl, genauer eine Haupt-I-Zahl. Diese haben also die allgemeine reguläre Form (23); darin kann natürlich der Bestandteil V^γ auch fehlen, so daß $\chi=\varphi$ wird.

Zu χ gibt es folgende Kette von Ungleichungen:

$$(24)\quad\begin{cases}\chi=\varphi V^\gamma<\chi V=\varphi V^{\gamma+1}<\varphi VI\leq\big(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\big)\,(VI^{\alpha_m})^{\beta_m+1}<\\ <\big(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\big)\,VI^{\alpha_m+1}\leq\big(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\big)\,(VI^{\alpha_{m-1}})^{\beta_{m-1}+1}<\\ <\big(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\big)\,VI^{\alpha_{m-1}+1}\leq\cdots\leq\big(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)\,(VI^{\alpha_2})^{\beta_2+1}<\\ <\big(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)\,VI^{\alpha_2+1}\leq 1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}<1VI^{\alpha_1+1}<1VII'.\end{cases}$$

Das System der Exponenten $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ bestimmt seinerseits χ. Wir setzen daher für den Augenblick

$$(25)\qquad \chi=\langle(\alpha_1,\beta_1),\ (\alpha_2,\beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_m,\beta_m),\gamma\rangle.$$

Wenn V^γ in χ fehlt, d.h. $\chi=\varphi$ ist, lasse wir γ in (25) fort. Zum Beispiel ist $1VI=\langle(1,1)\rangle$, $(1VI)V=\langle(1,1),1\rangle$. Wir setzen fest, daß, unter $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ vergleichbare Größen verstanden, die Relation $(\alpha,\beta)\leq(\gamma,\delta)$ im lexikographischen Sinn gemeint sein soll.

Ist $\chi'=\langle(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_{m'}',\beta_{m'}'),\gamma'\rangle$ eine zweite Zahl der Form (23), so gilt $\chi=\chi'$ nur im Fall der Identität, also für $m=m'$, $\alpha_i=\alpha_i'$, $\beta_i=\beta_i'$ $(i=1,\ldots,m)$ und $\gamma=\gamma'$ bzw. wenn γ und γ' beide in den $\langle\,\rangle$-Ausdrücken für χ,χ' fehlen. $\chi\neq\chi'$ ist nur in einem der folgenden Fälle möglich.

$$(H')\quad\begin{cases}1.\ \text{Es gibt ein } i\leq\min(m,m'),\ \text{so daß } (\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_{i-1},\beta_{i-1})=\\ (\alpha_{i-1}',\beta_{i-1}')\ \text{für } i>1\ \text{und } (\alpha_i,\beta_i)\neq(\alpha_i',\beta_i')\ \text{ist.}\\ 2.\ \text{Es ist } m=m',\ (\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_m,\beta_m)=(\alpha_m',\beta_m'),\ \gamma\neq\gamma'.\\ 3.\ \text{Wie 2., aber genau eines der Glieder } \gamma,\gamma'\ \text{fehlt.}\\ 4.\ m\neq m'\ \text{und } (\alpha_i,\beta_i)=(\alpha_i',\beta_i')\ \text{für } i\leq\min(m,m').\end{cases}$$

Daraus schließt man, daß $\chi<\chi'$ in den nachstehenden Fällen gilt:

(H', 1) mit $(\alpha_i,\beta_i)<(\alpha_i',\beta_i')$; (H', 2) mit $\gamma<\gamma'$;
(H', 3) mit fehlendem γ; (H', 4) mit $m<m'$.

Die Fälle (H', 2–4) verstehen sich von selbst. Ist im Fall (H', 1) etwa $\alpha_i<\alpha_i'$, so ist wegen $\alpha_i<\alpha_i'<\alpha_{i-1}'=\alpha_{i-1}$ auch $\alpha_i+1<\alpha_{i-1}$, d.h. die in der

Reihe der Ungleichungen (24) auftretende Zahlenfigur

$$\left((\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,(VI^{\alpha_{i-1}})^{\beta_{i-1}}\right)VI^{\alpha_i+1}>\chi$$

ist regulär und somit als der $\langle\,\rangle$-Ausdruck darstellbar:

$$\langle(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_{i-1},\beta_{i-1}),\ (\alpha_i+1,1)\rangle.$$

Diese Zahl ist aber $\leq\langle(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_{i-1},\beta_{i-1}),\ (\alpha_i',\beta_i')\rangle\leq\chi'$, d.h. es gilt in der Tat $\chi<\chi'$. Analog schließt man im Fall $\alpha_i=\alpha_i',\ \beta_i<\beta_i'$.

Es ist zu bemerken, daß aus $\chi<\chi'$ immer $\chi V\leq\chi'$ folgt.

Zu der Hauptzahl (23) gibt es, wenn sie als größter derartiger Anfang einer I-Zahl dienen, d.h. wenn mit dem Hinschreiben von γ die Konstruktion im Exponenten von V beendet sein soll, nur noch figürliche Ergänzungen, die Ergebnisse einer additiven Konstruktion darstellen. Also hat eine reguläre I-Zahl η die allgemeine Form (21), worin mindestens χ_1 eine Zahl der Gestalt (23) ist, während die restlichen χ_i auch Haupt-V-Zahlen sein können. Es darf natürlich in (21) wieder $k=1$ sein oder $+\tau$ fehlen.

Für die Größenvergleichung zweier I-Zahlen η und η' der Form (21) gelten wieder die in I angegebenen Kriterien, die aus den Fallunterscheidungen (H) folgen.

Die Exponenten (25) der $\chi_i\geq 1VI$ in (21) sind entweder $<1VI$ oder wieder I-Zahlen der Form (21). Wenn sämtliche Exponenten (25) aller $\chi_i\geq 1VI$ unterhalb $1VI$ liegen, nennen wir die Zahlenfigur (21) *I-einstöckig*. Allgemein heiße die Zahl (21) *I-$(n+1)$-stöckig*, wenn die Exponenten (25) der $\chi_i\geq 1VI$ höchstens I-n-stöckig sind (worin die Möglichkeit einbegriffen sei, daß sie $<1VI$ sind), aber mindestens ein I-n-stöckiger Exponent auftritt. — Die Verschiedenheit der I-Stockwerksanzahl ist nicht mehr entscheidend für die Größenvergleichung, denn die I-einstöckige Zahl $1\,(VI)^2$ z.B. ist größer als jedes Glied der zugehörigen Fundamentalfolge $(1VI)\,V,\ (1VI)\,V^{(1VI)\,V},\ldots$, deren n-tes Glied I-n-stöckig ist. Das im Anschluß an (23) für χ gegebene Beispiel ist I-dreistöckig.

Sei nun η eine reguläre I-Zahl. Sie hat also die Form (21), worin mindestens χ_1 die Form (23) hat. Dafür schreiben wir kurz $\eta=1VI^{\alpha}\ldots$[11]. Ferner sei $\alpha=1VI^{\alpha'}\ldots,\ \alpha'=1VI^{\alpha''}\ldots,\ldots$, zuletzt $\alpha^{(e-2)}=1VI^{\alpha^{(e-1)}}\ldots$ mit $\alpha^{(e-1)}<1VI$. Dann hat im Sinn der Links-rechts-Struktur η den Anfang $1VI^{1VI^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1VI^{\alpha^{(e-1)}}}}}}}$, der eine I-e-stöckige Zahl darstellt, die wir die *I-Spitze* von η nennen. Ersetzen wir $\alpha^{(e-1)}$ durch eine größere Zahl $\tau<1VII'$, so wird nach dem vorhin Bewiesenen $\alpha^{(e-2)}=1VI^{\alpha^{(e-1)}}\ldots<1VI^{\tau}$, $\alpha^{(e-3)}=1VI^{\alpha^{(e-2)}}\ldots<1VI^{1VI^{\tau}}$ und

[11]) Natürlich soll unter α der erste Exponent im $\langle\,\rangle$-Ausdruck (25) für χ_1 verstanden sein.

schließlich $\eta < 1VI^{1VI^{\cdots^{1VI^{\tau}}}}$. Bezeichnen wir das n-te Glied der Fundamentalfolge $1VI$, $1VI^{1VI}$, ... für $1VII'$ in (16) mit $1VI_n$, so ergibt sich, wenn wir in der letzten Ungleichung $\tau = 1VI$ setzen:

$$1VI_e \leq \eta < 1VI_{e+1}.$$

Daraus entnehmen wir, *daß $1VI_e$ die kleinste I-Zahl mit I-e-stöckiger Spitze ist und daß für $e' > e$ jede I-Zahl mit e'-stöckiger Spitze jede I-Zahl mit e-stöckiger Spitze übertrifft*.

Nun wollen wir sehen, wie sich die Größenvergleichung zweier verschiedener vollregulärer I-Zahlen η und η' abspielt. η und η' haben die Form (21). Sind die Spitzen von η und η' ungleichstöckig, so ist die Vergleichung trivial. Andernfalls muß zunächst (H) herangezogen werden. Wenn einer der Fälle (H, 2—4) vorliegt, sind wir wieder fertig. Findet (H, 1) statt, so sind χ_i und χ_i' zu vergleichen. Ist nur eine dieser Zahlen $< 1VI$ oder sind ihre I-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir fertig, und wenn beide Zahlen $< 1VI$ sind, verfahren wir nach 1. Andernfalls müssen wir die Vergleichung nach (H') vornehmen. Die Fälle (H', 3, 4) sind wieder trivial. Im Fall (H', 1) sind entweder α_i und α_i' oder, wenn $\alpha_i = \alpha_i'$, β_i und β_i', und im Fall (H', 2) γ und γ' zu vergleichen. Die vorstehende Betrachtung wiederholt sich für diese beiden Exponenten (wenn nicht der triviale Fall eintritt, daß wenigstens einer $< 1VI$ wird), wobei zu beachten ist, daß die Anzahlen ihrer I-Stockwerke wenigstens um 1 niedriger sind als bei η und η'. Nach endlich vielen Schritten müssen wir daher auf einen der genannten „trivialen" Fälle stoßen.

Auf Grund der in (22), (23) und (21) verlangten Ungleichungen sind wieder „interne" Vergleichungen notwendig für das Hinschreiben einer algorithmisch möglichen I-Zahl.

Überblicken wir das hier und in 1 entwickelte Vergleichungsverfahren für Zahlen $< 1VII'$, so können wir feststellen, daß es ganz nach dem allgemeinen Rezept von § 2, 3 verläuft.

3. In analoger Weise kann man sich einen Überblick über die allgemeine vollreguläre Form der I'-Zahlen, also der Zahlen $1VII' \leq \alpha < 1VII'I''$ verschaffen, jedoch wird die Darstellung etwa dreieinhalb mal so umfangreich wie bei den I-Zahlen, und es ist klar, daß die Kompliziertheit mit dem Übergang zu Operatoren höherer Stufe rasch wächst. Wieweit es möglich ist, einen expliziten Überblick über die Struktur der $I^{(n)}$-Zahlen bei variablem n zu geben, bleibe dahingestellt. Jedoch leuchtet es ohne weiteres ein, daß der Begriff der $I^{(n)}$-Stockwerkszahl sowie der $I^{(n)}$-Spitze einer $I^{(n)}$-Zahl sich zugleich mit dem zugehörigen Vergleichskriterium (s. 2, viertletzter Absatz) übertragen läßt. Auch die allgemeine Struktur (21) der Haupt-$I^{(n)}$-Zahlen mit den aus (H) folgenden Kriterien und damit der Hauptzahlen des Algorithmus überhaupt bleibt in Geltung, wie man auf Grund der Links-rechts-Schreibung und des Prinzips der Anfänge leicht einsieht. — φV ist immer die nächste Hauptzahl nach φ, und zwar (zweite) Hilfsfigur, wenn $\varphi = \chi V^{\gamma}$ ist.

Wir wollen noch kurz darauf eingehen, wie der Algorithmus mit der üblichen Bezeichnungsweise für Ordnungszahlen zusammenhängt. Es ist $1V=\omega$ und $\varphi V=\varphi\cdot\omega$. Daraus folgt $1V^2=\omega^2$, allgemein $1V^\alpha=\omega^\alpha$ für $\alpha<1VI$, daher $1VI=\varepsilon_0$, darunter die kleinste ε-Zahl verstanden. Also wird

$$(1VI)V^{(1VI)V}=\varepsilon_0\omega^{\varepsilon_0\omega}=\varepsilon_0^{\omega},$$

$$(1VI)V^{(1VI)V^{(1VI)V}}=\varepsilon_0\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}=\omega^{\varepsilon_0^{\omega}},$$

$$(1VI)V^{(1VI)V^{(1VI)V^{(1VI)V}}}=\varepsilon_0\omega^{\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}}=\omega^{\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}}\quad\text{usw.},$$

d.h. $1(VI)^2=\varepsilon_1$,

also die zweite ε-Zahl, allgemein $1(VI)^n=\varepsilon_{n-1}$, $1(VI)^\alpha=\varepsilon_\alpha$ für $\omega\leqq\alpha<1VI^2$, demnach $1(VI)^{1VI}=\varepsilon_{\varepsilon_0}$, $1(VI)^{1(VI)^{1VI}}=\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}$ usw. $1VI^2$ ist demnach die erste kritische Zahl der Folge der ε-Zahlen. Überhaupt steht unser Bezeichnungssystem, wie in der Einleitung erwähnt, in engster Verbindung mit der Progression nach kritischen Zahlen, was aus den Definitionen $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, $(\mathfrak{F}'')$,... unmittelbar hervorgeht.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 20. Februar 1953.)

ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 414—435 (1953)

FK-Räume in der Funktionentheorie. II*.

Von
KARL ZELLER.

Inhaltsverzeichnis.

§ 8. Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ 414
§ 9. Konvergenzsätze 417
§ 10. Nichtexistenz von radialen Grenzwerten 419
§ 11. Existenzmengen radialer Grenzwerte 421
§ 12. Ungleichmäßige Existenz radialer Grenzwerte 424
§ 13. Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen 426
§ 14. Betragssummen bei gleichmäßig konvergenten Potenzreihen 428
§ 15. Schlußbemerkungen 433
Literatur 434

§ 8. Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$.

Übersicht. Die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert und also eine reguläre Funktion $a(z)$ definiert, bildet einen *FK*-Raum, den wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen (8.1). Aus verschiedenen Durchschnittsdarstellungen von $\mathfrak{R}$ lesen wir ab, daß in $\mathfrak{R}$ starke und schwache Konvergenz gleichbedeutend sind (8.2) und daß $\mathfrak{R}$ eine Kompaktheitseigenschaft besitzt, die für Konvergenzsätze der Funktionentheorie von Bedeutung ist (8.3). Aus $\mathfrak{R}$ leiten wir weitere *FK*-Räume her, indem wir an das Verhalten von $a(z)$ gewisse Forderungen stellen (Räume $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_S$, $\mathfrak{Q}_B$, $\mathfrak{Q}_S$). Von einigen dieser Räume zeigen wir, daß sie nicht als *BK*-Räume aufgefaßt werden können (8.4).

Schon FRÉCHET [1906] war bekannt, daß $\mathfrak{R}$ mit einer geeigneten Metrik ein *F*-Raum (im Sinne von BANACH [1932]) ist. $\mathfrak{R}$ kann auch als vollkommener Raum aufgefaßt werden und hat dann dieselbe Topologie wie als *F*-Raum. Von diesem Standpunkt aus hat TOEPLITZ [1949] $\mathfrak{R}$ untersucht und unter anderem 8.2 bewiesen.

Satz 8.1 (Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$). *$\mathfrak{R}$ [die Menge der $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert, also eine reguläre Funktion $a(z)$ darstellt], ist ein FK-Raum mit jedem der vier folgenden Systeme von Halbnormen:*

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |a_k \varrho^k| \\ (2) & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \varrho^k| \\ (3) & \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \varrho^{2k}} \\ (4) & \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho} |a(z)| \end{array}\right\} \quad \varrho = \varrho_0, \varrho_1, \ldots,$$

wo ϱ_i irgendeine Folge mit $0<\varrho_0<\varrho_1<\cdots$, $\lim \varrho_i = 1$ ist.

* Der erste Teil der Arbeit ist in Bd. 58, S. 288—305 erschienen.

Zusatz. Wegen 7.1 definieren die vier Systeme dieselbe gleichmäßige Struktur in $\mathfrak{R}$. — $\mathfrak{R}$ besitzt Abschnittskonvergenz (s. § 2), also liegen die abbrechenden Stellen in $\mathfrak{R}$ dicht.

Beweis. Wir rufen die *BK*-Räume $\mathfrak{S}_N$ (Nullfolgen), $\mathfrak{L}_1$ (absolut konvergente Reihen), $\mathfrak{L}_2$ (quadratkonvergente Reihen) aus § 2 in Erinnerung. Wie in Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix) bedeute $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\{a_k\varrho^k\} \in \mathfrak{S}_N$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k\varrho^k = 0$ (ϱ fest); analog sind $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ und $\mathfrak{L}_2(\varrho^k)$ erklärt. Aus ganz elementaren Tatsachen folgt

$$\mathfrak{R} = \bigcap \mathfrak{S}_N(\varrho^k) = \bigcap \mathfrak{L}_1(\varrho^k) = \bigcap \mathfrak{L}_2(\varrho^k),$$

wo ϱ bei der Durchschnittsbildung alle Zahlen $0<\varrho<1$ oder eine Folge ϱ_i mit den oben angegebenen Eigenschaften durchläuft. Nach Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix) ist $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ ein *BK*-Raum mit der Norm $\overline{\text{fin}}\limits_{k=0,1,\ldots} |a_k\varrho^k|$. Ähnliches gilt für $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ und $\mathfrak{L}_2(\varrho^k)$. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen) liefert die Behauptung in den Fällen (1), (2) und (3). Wir kommen zu (4). Bekanntlich gilt

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \varrho^{2k}} \leq \overline{\text{fin}}_{|z|<\varrho} |a(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \varrho^k, \tag{5}$$

wenn $a(z)$ in $|z|<\varrho$ regulär und beschränkt ist (GUTZMER [1888], s. auch LANDAU [1929, S. 8]). (2) und (3) definieren ein und dieselbe gleichmäßige Struktur in $\mathfrak{R}$, wegen (5) wird diese Struktur auch durch die Halbnormen (4) bestimmt, was die Behauptung im Falle (4) ergibt. — Da die Räume $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ Abschnittskonvergenz besitzen, hat auch $\mathfrak{R}$ diese Eigenschaft [vgl. Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen)].

Wir ordnen hier und im folgenden einer Stelle $\mathfrak{a}$ die Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ in einem gewissen Regularitäts- und Eindeutigkeitsgebiet (das im allgemeinen das Innere des Einheitskreises sein wird) zu. Beschränktheit bzw. Konvergenz einer Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ im *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ bedeutet für die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ gleichmäßige Beschränktheit bzw. gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ [man betrachte die Halbnormen (4)!]. Die Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ mit dem System (4) ist im wesentlichen gleichbedeutend mit dem Weierstraßschen Doppelreihensatz.

Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$). *Im FK-Raum $\mathfrak{R}$ ist jede schwache Cauchyfolge sogar eine Cauchyfolge, also konvergent. M. a. W.: In $\mathfrak{R}$ sind schwache und starke Konvergenz gleichbedeutend.*

Beweis. Nach BANACH [1932, S. 137] trifft die Behauptung zu mit $\mathfrak{L}_1$ an Stelle von $\mathfrak{R}$ (diese Tatsache folgt leicht aus dem Satz von SCHUR [1920] über konvergenzerzeugende Matrizen), somit gilt sie auch in $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ (Isomorphie!). Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen) ergibt die Behauptung.

Satz 8.3 (Kompaktheit von $\mathfrak{R}$). *Jede beschränkte Folge im FK-Raum $\mathfrak{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ sei in $\mathfrak{R}$ beschränkt, dann ist sie auch in jedem $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ $(0<\varrho<1)$ beschränkt — vgl. 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von FK-Räumen) —, insbesondere koordinatenweise beschränkt. Wir greifen eine koordinatenweise konvergente Teilfolge $\mathfrak{b}^{(n)}$ heraus. Auf Grund bekannter und leicht ersichtlicher Eigenschaften von $\mathfrak{S}_N$ und $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ (man beachte, daß $\mathfrak{L}_1$ der duale Raum zu $\mathfrak{S}_N$ ist), ist $\mathfrak{b}^{(n)}$ in jedem $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ eine schwache Cauchyfolge, also wegen 7.5 auch in $\mathfrak{R}$ eine schwache Cauchyfolge. 8.2 vollendet den Beweis.

8.3 ist äquivalent mit dem bekannten Satz, daß man aus einer Familie gleichmäßig beschränkter regulärer Funktionen eine Folge herausgreifen kann, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich des betrachteten Gebietes gleichmäßig konvergiert.

Wir leiten aus $\mathfrak{R}$ weitere BK- und FK-Räume her, die weniger umfassend als $\mathfrak{R}$ sind. Wir geben eine Liste dieser Räume, in der hinter der Bezeichnung die definierende Eigenschaft des Raumes steht (der Raum enthält genau die Stellen, die diesen Bedingungen genügen).

$\mathfrak{R}_B$ (beschränkte Funktionen): $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|<\infty$;

$\mathfrak{R}_S$ (stetige Funktionen): $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\lim}_{|w-z|\to 0}|a(w)-a(z)|=0$

[d.h. $a(z)$ ist in $|z|<1$ gleichmäßig stetig];

$\mathfrak{Q}_B$: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|<\infty$;

$\mathfrak{Q}_S$: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho)$ ex. $\left(\text{d.h. } \overline{\lim}_{\varrho,\sigma\to 1-}|a(\varrho)-a(\sigma)|=0\right)$.

Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) zeigt, daß $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{Q}_B$ FK-Räume sind, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ noch $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|$ bzw. $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|$ hinzufügt. Aus Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) folgt, daß $\mathfrak{R}_S$ und $\mathfrak{Q}_S$ abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{R}_B$ bzw. $\mathfrak{Q}_B$, also FK-Räume mit denselben Halbnormen wie $\mathfrak{R}_B$ bzw. $\mathfrak{Q}_B$ sind. Bei $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ kann man nach Kriterium 2.5 (Wechsel der Halbnormen) die Halbnormen von $\mathfrak{R}$ weglassen, $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ sind also BK-Räume mit der Norm $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|$. Hingegen gilt

Satz 8.4. *$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}_B$ und $\mathfrak{Q}_S$ sind keine BK-Räume.*

Beweis. Es wird genügen, den Beweis für $\mathfrak{Q}_B$ durchzuführen. Wäre $\mathfrak{Q}_B$ ein BK-Raum, so gälten nach Kriterium 2.6 (FK- und BK-Raum) mit einem festen r Ungleichungen der Form

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_i}|a(z)|\le M_i\cdot\left(\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_0}|a(z)|+\cdots+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_r}|a(z)|\right)\quad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{Q}_B),$$

oder auch

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_i}|a(z)|\le N_i\cdot\left(\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_r}|a(z)|\right)\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{Q}_B).$$

Für $\varrho_r<\varrho_i<1$ widerlegt man diese durch Funktionen der Gestalt

$$a(z)=e^{-\alpha z}\quad(\alpha>0 \text{ genügend groß}).$$

Hingegen lassen sich $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}_B$ und $\mathfrak{L}_S$ sehr wohl als B-Räume auffassen, in denen die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ linear, aber nicht stetig sind. Man bildet dazu diese Räume mittels Hamelbasen linear und eineindeutig auf einen B-Raum gleicher Mächtigkeit ab.

§ 9. Konvergenzsätze.

Übersicht. Wir geben in 9.1 hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine Folge von in $|z|<1$ regulären Funktionen $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert, wobei wir auf dem Begriff der schwachen Konvergenz in FK-Räumen fußen. Wir beleuchten dabei den Zusammenhang zwischen „Konvergenzbedingungen" und „Eindeutigkeitsbedingungen", auf den schon OSTROWSKI [1923] hingewiesen hat. Mit 9.1 erhält man die bekannten Konvergenzsätze von VITALI, BLASCHKE, KHINTCHINE-OSTROWSKI unmittelbar aus den entsprechenden Eindeutigkeitssätzen. Unser Beweisprinzip eignet sich umgekehrt zur Aufstellung von Bedingungen für schwache Konvergenz in gewissen FK-Räumen (9.2).

Die im ersten Teil von Satz 9.1 beschriebene Methode (Ausnutzung der Kompaktheit) wurde schon von MONTEL gebraucht („normale Familien", s. BIEBERBACH [1934, S. 174]) und von TOEPLITZ [1949] zu einem Beweis des Vitalischen Satzes auf Grund der Theorie der vollkommenen Räume benützt.

Wir betrachten wieder den FK-Raum $\mathfrak{R}$ (vgl. Satz 8.1) der $\mathfrak{a}$, für die $a(z)=\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert. Aus Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$) und Satz 8.1 (Der FK-Raum $\mathfrak{R}$) entnehmen wir, daß schwache Konvergenz einer Stellenfolge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$ gleichbedeutend damit ist, daß $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert. Bildet nun $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine schwache Cauchyfolge in einem FK-Raum $\mathfrak{E}<\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ nach Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien von FK-Räumen) auch in $\mathfrak{R}$ eine schwache Cauchyfolge und sogar schwach konvergent. Die $a^{(n)}(z)$ haben daher die oben beschriebene Konvergenzeigenschaft. Bedingungen für schwache Konvergenz in $\mathfrak{E}$ liefern also einen „Konvergenzsatz". Diese Bedingungen lassen sich unter Zusatzannahmen über $\mathfrak{E}$ besonders leicht formulieren.

Satz 9.1 (Allgemeiner Konvergenzsatz). *$\mathfrak{E}$ sei ein FK-Raum mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}'$ eine Untermenge des Duals $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine beschränkte Folge in $\mathfrak{E}$, es existiere $\lim_{n\to\infty}\langle \mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{a}'\rangle$ für jedes $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{F}'$. Dann ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ im Raum $\mathfrak{R}$ konvergent, d.h. die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ sind in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergent, wenn eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:*

I. $\mathfrak{F}'$ ist bezüglich $\mathfrak{E}$ total, d.h. aus $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\rangle = 0$ für alle $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{F}'$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. In $\mathfrak{E}$ enthält jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

II. $\mathfrak{E}$ ist ein BK-Raum. $\mathfrak{F}'$ bildet im Dual $\mathfrak{E}'$ (der nach § 1 als B-Raum aufgefaßt wird) eine Grundmenge.

Beweis. I. Angenommen, es sei $\mathfrak{a}^{(n)}$ nicht schwach konvergent im Raum $\mathfrak{E}$. Wegen der Kompaktheitsvoraussetzung kann man zwei Teilfolgen $\mathfrak{b}^{(n)}$ und $\mathfrak{c}^{(n)}$ bestimmen, die gegen zwei verschiedene Grenzelemente $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ schwach konvergieren. Nun gilt für jedes $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{F}'$

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \mathfrak{b}^{(n)}, \mathfrak{a}'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{a}'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \mathfrak{c}^{(n)}, \mathfrak{a}'\rangle = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{a}'\rangle .$$

Da $\mathfrak{F}'$ total ist, folgt hieraus $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, also ein Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ sicher eine schwache Cauchyfolge in $\mathfrak{E}$, also nach Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien in *FK*-Räumen) eine schwache Cauchyfolge in $\mathfrak{R}$, daher wegen Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$) in $\mathfrak{R}$ konvergent. Dies bedeutet auch schon die Behauptung — betrachte das System (4) in Satz 8.1 (Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$).

II. Man legt sich leicht zurecht, daß $\mathfrak{a}^{(n)}$ im Raum $\mathfrak{E}$ eine schwache Cauchyfolge ist — vgl. BANACH [1932, S. 133]. Weiter wie unter I.

Bemerkungen. Die unter I verwandte Methode ist z. B. von den „normalen Familien" her bekannt. — Von $\mathfrak{F}'$ muß man natürlich mindestens die Eigenschaft „total" fordern; das bedeutet, daß die Stelle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$, also die Funktion $a(z)$ durch die Werte $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\rangle$ ($\mathfrak{a}'\in\mathfrak{F}'$) bestimmt ist (Eindeutigkeitsbedingung). Man überlegt sich auch, daß diese Bedingung allein nicht hinreicht, daß also in I. die Voraussetzung über $\mathfrak{E}$ nicht weggelassen werden darf. In II. erkennt man den kleinen Schritt, der von einem Eindeutigkeitssatz zu einem Konvergenzsatz zu machen ist: Man verschärft „$\mathfrak{F}'$ ist total" zu „$\mathfrak{F}'$ ist eine Grundmenge". Ist $\mathfrak{E}$ ein reflexiver *B*-Raum (d.h. jede stetige Linearform $\mathfrak{a}''$ in $\mathfrak{E}'$ in der Gestalt $\langle\mathfrak{a}',\mathfrak{a}''\rangle=\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\rangle$ mit einem gewissen $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ darstellbar), so ist jedes totale $\mathfrak{F}'$ auch eine Grundmenge, wie aus dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz folgt. Andererseits genügt ein reflexives $\mathfrak{E}$ der Kompaktheitsbedingung in I. (s. DIEUDONNE-SCHWARTZ [1949, Th. 4 und Prop. 17]). Hieraus erkennt man die Verwandtschaft der Bedingungen I und II. Jedenfalls sind reflexive Räume für unsere Betrachtungen am geeignetsten. — Wir haben übrigens Bedingung II deshalb nur für *BK*-Räume formuliert, um der Schwierigkeit aus dem Weg zu gehen, daß der duale Raum eines *F*-Raumes im allgemeinen kein *F*-Raum ist.

Mit 9.1 erhält man aus geläufigen Eindeutigkeitsbedingungen bekannte Konvergenzsätze der Funktionentheorie, unter anderem die von VITALI, BLASCHKE und KHINTCHINE-OSTROWSKI (s. BIEBERBACH [1934, S. 168] und [1931, S. 111 und 157]). Wir führen dies am letztgenannten Satz durch.

Wir betrachten den reflexiven *BK*-Raum $\mathfrak{L}_2$ der $\mathfrak{a}$ mit $\sum|a_k|^2<\infty$ (s. § 2). Bei $\mathfrak{a}\in\mathfrak{L}_2$ existiert für fast alle ζ mit $|\zeta|=1$ der Grenzwert

$$\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta) \quad (=a(\zeta) \text{ gesetzt})$$

(s. etwa RIESZ [1916]) und es ist wegen

$$\int_0^{2\pi}|a(\varrho\zeta)|^2\,d\varphi=2\pi\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\varrho^{2k} \quad (0\leq\varphi=\arg z<2\pi;\ 0<\varrho<1)$$

auch

$$\int_0^{2\pi}|a(\zeta)|^2\,d\varphi=2\pi\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2.$$

Man sieht, daß für jede meßbare Menge $Y\subset<0,2\pi)$

$$\int_Y a(\zeta)\,d\varphi$$

existiert und eine stetige Linearform in $\mathfrak{L}_2$ darstellt.

Satz von Khintchine und Ostrowski. Die $\mathfrak{a}^{(n)}$ mögen eine beschränkte Folge in $\mathfrak{L}_2$ bilden. Es gebe eine meßbare Menge $X \subset (0, 2\pi)$ mit streng positivem Maß, so daß für jedes meßbare $Y \subset X$

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y a^{(n)}(\zeta)\, d\varphi$$

existiert. Dann konvergiert $a^{(n)}(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$.

Bemerkung. Gegenüber der ursprünglichen Formulierung des Satzes sind die Voraussetzungen abgeschwächt:

1. Beschränktheit der Funktionenfolge $a^{(n)}(z)$ ist durch „$\mathfrak{L}_2$-Beschränktheit" von $\mathfrak{a}^{(n)}$ ersetzt (um im reflexiven Raum $\mathfrak{L}_2$ arbeiten zu können).

2. Konvergenz von $a^{(n)}(\zeta)$ für alle $|\zeta|=1$ mit $\arg\zeta \in X$ ist durch die dem Sachverhalt und dem Beweise besser angepaßte Konvergenz der genannten Integrale ersetzt. (Man könnte sogar ohne die Kenntnis der Existenz der radialen Grenzwerte auskommen.)

Beweis. Die stetigen Linearformen

$$\int_Y a(\zeta)\, d\varphi$$

bilden eine totale Menge (s. Riesz [1916]). $\mathfrak{L}_2$ ist reflexiv. Satz 9.1 zusammen mit der Bemerkung über reflexive Räume ergibt die Behauptung.

Satz 9.2 (Schwache Konvergenz in schwach kompakten Räumen). *Ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$ ein FK-Raum mit der in 9.1 I geforderten Kompaktheitseigenschaft, so ist eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ genau dann in $\mathfrak{E}$ schwach konvergent, wenn sie in $\mathfrak{E}$ beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty} a^{(n)}(z)$ für jedes z in $|z|<1$ existiert.*

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Denn $\mathfrak{a} \to a(z)$ ist für jedes z in $|z|<1$ eine stetige Linearform; und aus schwacher Konvergenz folgt Beschränktheit (vgl. Zeller [1951_2, Satz 1.1]). Wie in 9.1 beweist man, daß die Bedingungen hinreichen.

Anwendung. So erhält man z.B. die von Taylor [1950] aufgestellten Bedingungen für schwache Konvergenz in $\mathfrak{H}_p$ $(p>1)$.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Theorie der *FK*-Räume für „Konvergenzsätze" auszunützen. So ist z.B. jede koordinatenweise konvergente und in einem *FK*-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$ beschränkte Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ im *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ konvergent.

§ 10. Nichtexistenz von radialen Grenzwerten.

Übersicht. Wir suchen Funktionen $a(z)$, die in $|z|<1$ regulär sind und bei denen $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für einige ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert. Wir zeigen mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln in 10.1 bis 10.4, daß es Fälle gibt, in denen der genannte Grenzwert für ein, abzählbar viele, überabzählbar viele, alle ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert; genauer weisen wir sogar $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} |a(\varrho\zeta)| = \infty$ für die betreffenden ζ nach. Daran schließen sich die Sätze 10.5 und 10.6 an, die besagen, daß nur „wenige" der in einem Gebiet regulären Funktionen über dieses Gebiet hinaus analytisch fortgesetzt werden können. 10.1 bis 10.3 sind ziemlich

trivial, 10.4 stammt von LUSIN-PRIWALOFF [1925], ein Teil von 10.5 steht bei KIERST-SZPILRAJN [1933], die funktionalanalytische Hilfsmittel zur Konstruktion starker Singularitäten bei analytischen Funktionen heranzogen. Bei 10.5 vgl. man auch POLYA [1917].

Wir betrachten den FK-Raum $\mathfrak{R}$ der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren, und die Unterräume $\mathfrak{Q}_B$ $(a(\varrho)$ beschränkt in $0<\varrho<1$, zusätzliche Halbnorm $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\,|a(\varrho)|$; s. §8) und $\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$ $[a(\varrho\zeta)$ beschränkt in $0<\varrho<1$, vgl. Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix)].

Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\,|a(\varrho)|=\infty$ *gilt, d.h. es ist* $\mathfrak{R}\not\subset\mathfrak{Q}_B$.

Beweis. Hierfür gibt es einfache Beispiele, etwa $a(z)=\log(1-z)$. Will man ohne die Kenntnis spezieller Singularitäten auskommen, so kann man Lemma 7.2 (Vergleich von Halbnormen) anwenden [setze $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{Q}_B$, man widerlegt $(\mathcal{M})$ durch Einsetzen der Funktionen $n\cdot z^n$].

Hilfssatz 10.2 (Unbeschränktheit auf abzählbar vielen Strahlen). *Ist* D *irgendeine abzählbare Teilmenge von* $|\zeta|=1$, *so gibt es ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\,|a(\varrho\zeta)|=\infty$ *für jedes* $\zeta\in D$ *gilt, d.h. es ist* $\mathfrak{R}\not\subset\bigcup_{\zeta\in D}\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$.

Beweis. Aus 10.1 folgt leicht $\mathfrak{R}\not\subset\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta\in D$. Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) liefert die Behauptung.

Satz 10.3 (Unbeschränktheit auf überabzählbar vielen Strahlen). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\,|a(\varrho\zeta)|=\infty$ *für überabzählbar viele* ζ *mit* $|\zeta|=1$ *gilt.*

Beweis. Sei B irgendein abgeschlossener Teilbogen von $|\zeta|=1$ mit streng positiver Länge. B läßt sich als vollständiger metrischer Raum auffassen. Wir wählen in 10.2 D als eine in B dicht liegende Menge und bestimmen ein entsprechendes $\mathfrak{a}$. Lemma 5.2 (Unbeschränkte halbstetige Funktion) zeigt, daß $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\,|a(\varrho\zeta)|=\infty$ für alle ζ einer in B fetten, also überabzählbaren Menge gilt [halte $a(z)$ fest, betrachte $\overline{\text{fin}}$ als Funktion in B]. — Diese Beweismethode stammt von STEINHAUS [1919].

Satz 10.4 (Unbeschränktheit auf allen Strahlen; LUSIN-PRIWALOFF [1925]). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\;\underline{\underset{|z|=\varrho}{\text{fin}}}\,|a(z)|=\infty$.

Beweis. Sei

$$\left.\begin{matrix}\chi(\mathfrak{a})\\ \psi(\mathfrak{a})\end{matrix}\right\}=\overline{\underset{0<\varrho<1}{\text{fin}}}\;\underline{\underset{|z|=\varrho}{\text{fin}}}\,|a(z)|\leq\infty\quad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}).$$

ψ ist Minorante der Halbnorm χ in $\mathfrak{R}$ — vgl. Hilfssatz 3.3 ($\underline{\text{fin}}$ von Halbnormen) und 3.4 ($\overline{\text{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). Die Funktionen $\psi_\varrho(\mathfrak{a})=\underline{\underset{|z|=\varrho}{\text{fin}}}\,|a(z)|$ $(0<\varrho<1)$ sind in $\mathfrak{R}$ stetig, also ist ψ nach unten halbstetig — vgl. 3.4. Die abbrechenden Stellen liegen in $\mathfrak{R}$ dicht — s. Zusatz zu Satz 8.1 (Der FK-Raum $\mathfrak{R}$) —, daher ist die $\chi(\mathfrak{b})<\infty$ betreffende Voraussetzung in Satz 5.4 (Halbstetige Minorante) erfüllt. ψ ist in keiner Umgebung von $\mathfrak{o}$ im Raum $\mathfrak{R}$ beschränkt, denn die den Funktionen $n\cdot z^n$ entsprechenden

Stellen streben im *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ gegen $\mathfrak{o}$ für $n \to \infty$, weil die Funktionen in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig gegen Null konvergieren — vgl. Satz 8.1. Satz 5.4 ergibt die Behauptung.

Ist G ein Gebiet der z-Ebene, von dem wir zur Vereinfachung der Bezeichnung annehmen, daß es den Nullpunkt erhält, so bedeute $\mathfrak{R}(G)$ die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in G reguläre und eindeutige Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren. Sei F_n die Menge der $z \in G$ mit $|z| \leq n$, die vom Rande von G einen Abstand $\geq n^{-1}$ haben. Dann ist $\mathfrak{R}(G)$ ein *FK*-Raum mit den Halbnormen $\overline{\operatorname{fin}}_{z \in F_j} |a(z)|$ $(j=0, 1, \ldots)$, wie aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz folgt.

Satz 10.5 (Nichtfortsetzbare Funktionen im Einheitskreis). *$\mathfrak{E}$ sei ein FK-Raum, $\mathfrak{E} < \mathfrak{R}$. Zu jedem Punkt ζ mit $|\zeta|=1$ gebe es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, so daß $a(z)$ in $z=\zeta$ singulär ist. Dann ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, für die $a(z)$ über $|z|<1$ hinaus analytisch fortsetzbar ist, mager in $\mathfrak{E}$.*

(Die Voraussetzungen sind z. B. für $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{L}_1$ erfüllt.)

Beweis. Wir wählen eine Folge von Gebieten $G_j > \{|z|<1\} \neq G_j$, die so beschaffen sind, daß jede über $|z|<1$ fortsetzbare Funktion in mindestens einem G_j regulär ist. [Wir können etwa G_j die Gebiete durchlaufen lassen, die entstehen, wenn man den Kreis $|z-\zeta|<\varrho$ (ϱ rational, $|\zeta|=1$, ζ mit rationalem Realteil) mit dem Kreis $|z|<1$ vereinigt.] $\mathfrak{R}(G_j)$ $(j=0, 1, \ldots)$ sei wie oben der *FK*-Raum der $\mathfrak{a}$ mit in G_j regulärem $a(z)$. Die im Satz genannte Menge ist dann $= \bigcup \mathfrak{R}(G_j)$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{R}(G_j) \neq \mathfrak{E}$ $(j=0, 1, \ldots)$, also nach 7.1 eine magere Menge in $\mathfrak{E}$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 10.6 (Nichtfortsetzbare Funktionen in beliebigen Gebieten). *G sei ein Gebiet der z-Ebene (wobei wir o. B. d. A. $0 \in G$ annehmen), $\mathfrak{R}(G)$ der FK-Raum der $\mathfrak{a}$ mit in G regulärem $a(z)$. Dann ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}(G)$, für die $a(z)$ über G hinaus analytisch fortsetzbar ist, mager in $\mathfrak{R}(G)$.*

Beweis. Wir dürfen voraussetzen, daß G einen endlichen Randpunkt besitzt. K_j durchlaufe die Kreise $|z-z_j|<\varrho_j$, wo z_j eine in G dicht liegende Punktfolge bildet und ϱ_j die kleinste Zahl ist, für die auf $|z-z_j|=\varrho_j$ ein Randpunkt von G liegt. Die Menge $\mathfrak{E}^{(j)}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}(G)$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{z \in K_j} |a(z)| < \infty$ bildet nach 2.1 (Linearer Unterraum) einen *FK*-Raum. Einfache Beispiele (rationale Funktionen mit einem Pol) lehren $\mathfrak{E}^{(j)} \neq \mathfrak{R}(G)$ $(j=0, 1, \ldots)$. Die im Satz genannte Menge ist in $\bigcup \mathfrak{E}^{(j)}$ enthalten, jedes $\mathfrak{E}^{(j)}$ bildet nach 7.1 eine magere Menge im *FK*-Raum $\mathfrak{R}(G)$, woraus die Behauptung folgt.

§ 11. Existenzmengen radialer Grenzwerte.

Übersicht. Wir fragen: Zu welchen Teilmengen C von $|\zeta|=1$ gibt es eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für die übrigen ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert? 11.1 bringt eine einfache Bemerkung in dieser Richtung. In 11.3 und 11.5 zeigen wir — gestützt auf die Hilfssätze 11.2 und 11.4 —, daß C beliebig als Komplement einer abzählbaren Menge bzw. beliebig als abgeschlossene oder offene Menge gewählt werden darf. Für 11.5 verwenden wir wieder die Minoranten (s. § 3), während bei 11.3 eine eigentümliche Schwierigkeit auftritt.

Wir betrachten hier den Raum $\mathfrak{R}$ der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren (s. Satz 8.1), und die Unterräume $\mathfrak{R}_B$ ($a(z)$ beschränkt in $|z|<1$), $\mathfrak{C}_B$ ($a(\varrho)$ beschränkt in $0<\varrho<1$), $\mathfrak{C}_S$ ($\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho)$ existiert) (vgl. § 8), $\mathfrak{C}_B(\zeta^k)$ ($a(\varrho\zeta)$ beschränkt in $0<\varrho<1$), $\mathfrak{C}_S(\zeta^k)$ ($\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ existiert) [vgl. Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix)]. Alle diese Räume sind *FK*- bzw. *BK*-Räume.

Bemerkung 11.1 (Existenz und Nichtexistenz abzählbar vieler Randwerte). *Sind C und D zwei fremde, abzählbare Teilmengen von $|\zeta|=1$, so gibt es ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ bei $\zeta\in C$ existiert und $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho\zeta)|=\infty$ für $\zeta\in D$ gilt.*

Beweis. Die Behauptung lautet mit den oben genannten Bezeichnungen

$$\bigcap_{\zeta\in C}\mathfrak{C}_S(\zeta^k)\not\subset\bigcup_{\xi\in D}\mathfrak{C}_B(\xi^k).$$

Daß diese Beziehung ohne das Vereinigungsvorzeichen rechts für jedes einzelne $\xi\in D$ richtig ist, erkennt man wie im Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl). Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) vollendet den Beweis.

Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen). *Es gibt ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{z<1}|a(z)|<\infty$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta=1$ nicht existiert, für alle andern ζ auf $|\zeta|=1$ existiert.*

Beweis. Ein solches $a(z)$ ist etwa die Funktion

$$a(z)=(1-z)^\alpha=\sum\binom{\alpha}{k}(-1)^k z^k \qquad (\alpha\neq 0,\ Re\,\alpha=0)$$

(s. KNOPP [1947, S. 440] oder LANDAU [1929, S. 68]).

Etwas abgeschwächt lautet die Behauptung $\mathfrak{R}_B\not\subset\mathfrak{C}_S$. Dies kann man auch ohne Kenntnis spezieller Singularitäten beweisen. Die in Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl) gebrauchte Methode des Vergleichs der Halbnormen (Lemma 7.2)

$$\mathfrak{R}_B\colon\ \overline{\operatorname{fin}}_{z|<1}|a(z)|;\qquad \mathfrak{C}_S\colon\ \overline{\operatorname{fin}}_{0<\sigma<1}|a(\sigma)|,\quad \overline{\operatorname{fin}}_{z<\varrho}|a(z)| \qquad (\varrho=\varrho_0,\varrho_1,\dots \text{ wie in 8.1})$$

versagt zwar hier, wo $\mathfrak{R}_B\cap\mathfrak{C}_S$ ein abgeschlossener Unterraum in $\mathfrak{R}_B$ ist. Wir können jedoch den gleitenden Buckel (§ 4) anwenden: Wir bestimmen eine Folge von Stellen $\mathfrak{a}^{(n)}\in\mathfrak{R}_B$, so daß

$$|a^{(n)}(z)|<\begin{cases}4 & (|z|<1)\\ 2^{-n-2} & (|z|<1,\ z\notin G_n),\end{cases}$$
$$|a^{(n)}(\varrho_n)|=1$$

ist, wo die G_n gewisse paarweise fremde Teilgebiete von $|z|<1$ mit

$$2>\overline{\operatorname{fin}}_{z\in G_n}|1-z|>\overline{\operatorname{fin}}_{z\in G_n}|1-z|>\overline{\operatorname{fin}}_{z\in G_{n+1}}|1-z|\to 0\quad (n\to\infty)$$

sind und $\varrho_n \in G_n$, ϱ_n reell gilt. Wir setzen etwa

$$a^{(0)}(z) = (z-1)(z+1), \quad \varrho_0 = 0$$

und bestimmen G_0 in geeigneter Weise. Dann definieren wir

$$a^{(1)}(z) = a^{(0)}\left(w^{-1}(z)\right), \quad \varrho_1 = w(\varrho_0),$$

wo $w(z)$ eine lineare Abbildung des Einheitskreises auf sich ist, die G_0 in ein „näher bei Eins" gelegenes G_1 mit $G_0 \cap G_1 = 0$ abbildet usw. $a(z) = \sum a^{(n)}(z)$ hat die gewünschten Eigenschaften. $\sum a^{(n)}$ ist im Sinne der starken Topologie von $\mathfrak{R}_B$ divergent. Der „Buckel" ist hier deshalb überlegen, weil man bei ihm auch mit solchen divergenten Reihen umgehen kann.

Satz 11.3 (Nichtexistenz genau abzählbarer vieler Randwerte). *Ist D eine abzählbare Teilmenge von $|\zeta| = 1$, C ihr Komplement, so gibt es ein $a \in \mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für $\zeta \in D$ nicht existiert.*

Beweis. Sei $\mathfrak{E}$ die Menge der $a \in \mathfrak{R}_B$, für die $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ $(\zeta \in C)$ existiert. $\mathfrak{E}$ ist nach Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ein *BK*-Raum (vgl. $\mathfrak{L}_S$ in § 8). Aus 11.2 folgt sofort $\mathfrak{E} \not\subset \mathfrak{L}_S(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta \in D$, daher gilt nach Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) auch $\mathfrak{E} \not\subset \bigcup_{\zeta \in D} \mathfrak{L}_S(\zeta^k)$, w. z. b. w.

Man kann jedoch im allgemeinen nicht $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} |a(\varrho\zeta)| = \infty$ für $\zeta \in D$ erreichen, da aus dieser Bedingung die Nichtexistenz weiterer Randwerte folgt, wenn D in einem Bogen des Einheitskreises dicht liegt — s. Satz 10.3 (Unbeschränktheit auf überabzählbar vielen Strahlen). Daher mußten wir uns auch auf Hilfssatz 11.2 stützen.

Hilfssatz 11.4 (Große und kleine Funktionswerte). *C und D seien zwei fremde abgeschlossene Teilmengen von $|\zeta| = 1$. Bei vorgegebenem $M > 0$ und σ mit $0 < \sigma < 1$ existiert eine abbrechende Stelle a mit*

$$\overline{\operatorname{fin}}_{z<\sigma} |a(z)| < 1,$$

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in C} |a(\varrho\zeta)| < 1,$$

$$\underline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in D} |a(\zeta)| > M.$$

(Aus der dritten Ungleichung folgt hier

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \underline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in D} |a(\varrho\zeta)| > M.)$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß C und D Teilbögen des Einheitskreises sind; denn ist der Hilfssatz schon in dieser speziellen Form bewiesen, so führt Überdeckung von D mit endlich vielen untereinander und zu C fremden abgeschlossenen Bögen (Heine-Borel!) leicht zum Ziel. Wir wählen λ und μ so, daß $\lambda\zeta - \mu$ für $\zeta \in C$ bzw. $\zeta \in D$ einen Realteil < 0 bzw. $> \log M$ hat. Die Funktion $b(\zeta) = e^{\lambda\zeta - \mu}$ ist dann in C dem Betrage nach < 1, in D

dem Betrage nach $> M$. Zusatz eines Faktors z^n (n genügend groß) bewirkt, daß die Funktion $z^n \cdot b(z)$ alle drei Ungleichungen von 11.4 erfüllt [man beachte, daß $b(z)$ in $|z| \leq 1$ gleichmäßig stetig ist]. Die Potenzreihe von $z^n b(z)$ konvergiert in $|z| < 1$ gleichmäßig. Durch Abbrechen dieser Reihe erhalten wir die gewünschte Stelle $\mathfrak{a}$.

Satz 11.5 (Existenzmengen bei Randwerten). *C sei eine abgeschlossene oder offene Teilmenge von $|\zeta| = 1$. Dann gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für die übrigen ζ mit $|\zeta| = 1$ nicht existiert.*

Beweis. Wir dürfen $C \neq \{|\zeta| = 1\}$ (klar!) und C nicht leer [wegen Satz 10.4 (Unbeschränktheit auf allen Strahlen)] annehmen.

I. C sei abgeschlossen, $\mathfrak{R}_S(C)$ die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, bei denen $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ gleichmäßig existiert. $\mathfrak{R}_S(C)$ ist ein FK-Raum, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ noch $\overline{\underline{\text{fin}}}_{0<\varrho<1} \overline{\underline{\text{fin}}}_{\zeta \in C} |a(\varrho\zeta)|$ hinzufügt [Beweis mit Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) wie bei $\mathfrak{R}_S$ in § 8]. Mit $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ (Menge der abbrechenden Folgen) in $\mathfrak{R}_S(C)$. Nach Kriterium 2.2 (abgeschlossener Unterraum) ist $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit denselben Halbnormen wie $\mathfrak{R}_S(C)$ ein FK-Raum. D sei eine abgeschlossene, zu C fremde Teilmenge von $|\zeta| = 1$. Wir betrachten

$$\left.\begin{matrix}\chi(\mathfrak{a}; D) \\ \psi(\mathfrak{a}; D)\end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\text{fin}}}_{0<\varrho<1} \overline{\underline{\text{fin}}}_{\zeta \in D} |a(\varrho\zeta)|$$

als Funktionen in $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$. Dabei ist ψ Minorante der Halbnorm χ — s. Hilfssatz 3.3 ($\underline{\text{fin}}$ von Halbnormen) und 3.4 ($\overline{\text{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). ψ ist als obere Grenze stetiger Funktionen nach unten halbstetig. In $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ liegt $\mathfrak{A}$ nach Definition dicht, daher ist die $\chi(b) < \infty$ betreffende Voraussetzung in Satz 5.4 (Halbstetige Minorante) erfüllt, die ψ und $(\mathcal{M})$ betreffende Bedingung wurde in 11.4 nachgewiesen. Nach 5.4 ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D) = \infty$ fett. Das Komplement von C (bezüglich $|\zeta| = 1$) läßt sich als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener D_j darstellen. Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) zeigt die Existenz eines $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D_j) = \infty$ für $j = 0, 1, \ldots$, w. z. b. w.

II. C sei offen, dargestellt als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen $C_0 \subset C_1 \subset \ldots$. Das Komplement von C (bezüglich $|\zeta| = 1$) sei D. Wie oben zeigt man die Existenz eines $\mathfrak{a}$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D) = \infty$ in demjenigen FK-Raum $\mathfrak{E}$, der die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ im FK-Raum $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{R}_S(C_j)$ (Bezeichnung wie oben) ist.

Übrigens läßt sich die Voraussetzung abschwächen zu „C ist eine F_σ-Menge".

§ 12. Ungleichmäßige Existenz radialer Grenzwerte.

Übersicht. Wir betrachten Stellen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ (für die also $a(z) = \sum a_k z^k$ in $|z| < 1$ konvergiert), bei denen $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für alle ζ mit $|\zeta| = 1$ existiert, jedoch nicht gleichmäßig. 12.1 und 12.2 behandeln zwei einfache Möglichkeiten dieser Art, während 12.3 besagt, daß es Fälle gibt, in denen die Konvergenz des Grenzüberganges $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ in keinem Teilbogen des Einheitskreises gleichmäßig ist.

Im folgenden setzen wir stets $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta) = a(\zeta)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung 12.1 (Randwerte bei unbeschränkten Funktionen). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\operatorname{fin}_{|z|<1}|a(z)| = \infty$, *so daß* $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ *für alle* ζ *mit* $|\zeta| = 1$ *existiert.*

Beweis. Da 12.1 nicht besonders wichtig ist, fassen wir uns kurz. Wir wählen eine Zahlenfolge δ_j mit $2\pi > \delta_j \searrow 0$. C_j sei die Menge der $|\zeta| = 1$ mit $\delta_j \leq \arg\zeta \leq 2\pi$, $\mathfrak{R}_S(C_j)$ die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, für die $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta\in C_j$ existiert [für die also $a(z)$ in dem betreffenden Sektor gleichmäßig stetig ist]. $\mathfrak{R}_S(C_j)$ ist ein *FK*-Raum, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ (s. Satz 8.1) noch $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}\ \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C_j}|a(\varrho\zeta)|$ hinzufügt [Beweis mit Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ähnlich wie bei $\mathfrak{R}_S$ in § 8]. Nach Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen) ist $\bigcap_{j=0}^{\infty}\mathfrak{R}_S(C_j)$ ein *FK*-Raum mit den Halbnormen

$$\overline{\operatorname{fin}}_{z|<\varrho}|a(z)|\ (\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \dots \text{ wie in 8.1}), \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}\ \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C_j}|a(\varrho\zeta)| \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Es genügt zu zeigen, daß dieser Raum nicht in $\mathfrak{R}_B$ enthalten ist. Dazu verwenden wir Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen) mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}_B$. Die dort genannte Ungleichung, die im Falle des Enthaltenseins gilt, vereinfacht sich hier wegen der „Monotonieeigenschaften" der Halbnormen zu

$$\overline{\operatorname{fin}}_{z|<1}|a(z)| \leq M\cdot\Big(\overline{\operatorname{fin}}_{z|<\sigma}|a(z)| + \overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}\ \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C}|a(\varrho\zeta)|\Big) \quad \big(\mathfrak{a}\in\bigcap\mathfrak{R}_S(C_j)\big),$$

wo $M > 0$, $\sigma < 1$ und r als natürliche Zahl passend gewählt sind. Diese Ungleichung widerlegt man durch Einsetzen einer geeigneten Funktion der Form $a(z) = \frac{\alpha}{z-\lambda}$ ($0 < \arg\lambda < \delta_k$, $|\lambda| > 1$, $|\lambda| - 1$ genügend klein). — Man könnte auch Satz 7.6 (Abschnittsdichte im Durchschnitt von *FK*-Räumen) anwenden.

$\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ seien wieder die *BK*-Räume der $\mathfrak{a}$, bei denen $a(z)$ in $|z| < 1$ regulär und beschränkt bzw. regulär und gleichmäßig stetig ist [Norm: $\overline{\operatorname{fin}}_{z<1}|a(z)|$, vgl. § 8]. $\mathfrak{R}_R$ sei die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_B$, bei denen $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für alle ζ mit $|\zeta| = 1$ existiert (aber nicht notwendig gleichmäßig). Nach Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ist $\mathfrak{R}_R$ ein *BK*-Raum mit derselben Norm wie $\mathfrak{R}_B$.

Hilfssatz 12.2 (Randwerte bei beschränkten unstetigen Funktionen). *Es gibt eine in* $|z| < 1$ *reguläre und beschränkte Funktion* $a(z)$, *bei der zwar alle Grenzwerte* $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ ($|\zeta| = 1$) *existieren, die aber (nach Erweiterung des Definitionsbereiches) in* $|z| \leq 1$ *unstetig ist; d.h. es gilt* $\mathfrak{R}_R \not\subset \mathfrak{R}_S$.

Beweis. Die Schwierigkeit liegt hier wieder darin, daß $\mathfrak{R}_R$ und $\mathfrak{R}_S$ abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{R}_B$ sind, so daß für den Nachweis $\mathfrak{R}_R \not\subset \mathfrak{R}_S$ die Methode des Vergleichs der Halbnormen (7.2) versagt. Wir greifen auf den gleitenden Buckel zurück (s. § 4); wir wählen eine Folge von paarweise und zur reellen Achse fremden Kreisscheiben

$$K_n = \{|z - \mu_n| < \nu_n\} \quad \text{mit} \quad |\mu_n| = 1, \quad \mu_n \to 1, \quad \nu_n \to 0.$$

Es sei $a^{(n)}(z)$ eine in $|z|<1$ reguläre und gleichmäßig stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$a^{(n)}(\mu_n)=5,$$
$$|a^{(n)}(z)|\leq 5 \qquad (|z|\leq 1),$$
$$|a^{(n)}(z)|<2^{-n} \quad (|z|\leq 1,\ z\notin K_n).$$

Eine solche Funktion erhält man in der Gestalt $a^{(n)}(z)=\dfrac{\alpha}{z-\lambda_n}$ mit $\lambda_n=\Theta_n\mu_n$, $\Theta_n>1$ und nahe bei Eins. $a(z)=\sum a^{(n)}(z)$ konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|\leq 1$, der $z=1$ nicht enthält, ferner gleichmäßig in $0\leq z\leq 1$. Daher existieren alle Grenzwerte $\lim\limits_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ $(|\zeta|=1)$. Weiter ist $|a(z)|\leq 2+5$ für $|z|\leq 1$. Schließlich ist $a(z)$ nicht stetig bei $z=1$ bezüglich $|z|\leq 1$, weil in jeder Umgebung von $z=1$ Punkte mit $|a(z)|\leq\sum 2^{-n}=2$ (z „zwischen" den K_n) und Punkte mit $|a(z)|\geq 5-\sum 2^{-n}=3$ $(z=\mu_n)$ vorhanden sind.

Satz 12.3 (Randwerte bei Funktionen, die auf dem ganzen Rand unstetig sind). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\overline{\operatorname{fin}}\limits_{z<1}|a(z)|<\infty$, *so daß* $\lim\limits_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ $[=a(\zeta)$ *gesetzt]* *für alle* ζ *mit* $|\zeta|=1$ *existiert und* $a(\zeta)$ *auf keinem Teilbogen von* $|\zeta|=1$ *stetig ist.*

Beweis. Wir wählen eine Folge von abgeschlossenen Bögen B_j (von streng positiver Länge) des Kreises $|\zeta|=1$, so daß in jedem Teilbogen von $|\zeta|=1$ ein B_j enthalten ist. $\mathfrak{R}_S(B_j)$ sei wieder der FK-Raum der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, bei denen $\lim\limits_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta\in B_j$ existiert (vgl. bei 12.1). Der Beweis zu 12.2 zeigt, daß für jedes einzelne j die Beziehung $\mathfrak{R}_R\not\subset\mathfrak{R}_S(B_j)$ besteht. Nach Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) gilt $\mathfrak{R}_R\not\subset\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\mathfrak{R}_S(B_j)$, womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 13. Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen.

Übersicht. Wir betrachten den BK-Raum $\mathfrak{R}_S$ der $\mathfrak{a}$, denen eine in $|z|<1$ reguläre und gleichmäßig stetige Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ entspricht. Das bekannte Ergebnis von FEJÉR [1910], daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_S)$ für gewisse ζ mit $|\zeta|=1$ divergieren kann, ordnet sich unserem Ideenkreis ein (13.1 und 13.2). (Hier wurden schon früher funktionalanalytische Methoden verwendet, s. etwa ZYGMUND [1935, S. 172].) 13.3 behandelt das Verhalten von $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_S)$ für $n\to\infty$.

Hilfssatz 13.1 (Fejérpolynome). *Zu jedem* $M>0$ *gibt es eine abbrechende Stelle* $\mathfrak{a}$ *mit*

$$|a(z)|<1 \qquad (|z|<1),$$
$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots}\ \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\Big|>M.$$

Beweis. Man erhält $a(z)$ in der Form

$$a(z)=\alpha\cdot z^{m+1}\cdot h^{(m)}(z)=\alpha\cdot z^{m+1}\left(-\frac{z^{-m-1}}{m+1}-\cdots-\frac{z^{-1}}{1}+\frac{z}{1}+\cdots+\frac{z^{m+1}}{m+1}\right)$$

(α, m geeignet gewählt). Denn es ist für $|\zeta| = 1$

$$h^{(m)}(\zeta) = 2\,Im\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta^k}{k}\right).$$

Aus

$$Im\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k}\right) = |Im \log(1-\zeta)| \leq \frac{\pi}{2}$$

erhält man nach einer bekannten Schlußweise (s. LANDAU [1929, S. 63] oder KNOPP [1947, S. 519]), daß die $h^{(m)}(z)$ in $|z| = 1$, also auch in $|z| \leq 1$ gleichmäßig beschränkt sind, wogegen die Summen der m ersten Koeffizienten von $h^{(m)}(z)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ eine unbeschränkte Folge bilden, woraus sofort die Behauptung erhellt.

Wir betrachten nun die *BK*-Räume $\mathfrak{T}_C$, $\mathfrak{T}_C(\zeta^k)$, $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_S$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k$ konvergiert, $\sum a_k \zeta^k$ konvergiert, $a(z)$ in $|z| < 1$ regulär und beschränkt ist, $a(z)$ in $|z| < 1$ regulär und gleichmäßig stetig ist [Normen bzw.

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k\,, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{z<1} |a(z)|, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} |a(z)|,$$

vgl. § 2 und § 8].

Satz 13.2 (FEJÉR; Stetige Funktionen mit divergenter Potenzreihe). *Ist D irgendeine abzählbare Teilmenge von $|\zeta| = 1$, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$, so daß $\sum a_k \zeta^k$ für $\zeta \in D$ divergiert, d.h. es ist*

$$\mathfrak{R}_S \not\subset \bigcup_{\zeta \in D} \mathfrak{T}_C(\zeta^k).$$

Beweis. $\mathfrak{R}_S \not\subset \mathfrak{T}_C$ folgt mit 13.1 aus Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen). Also ist auch $\mathfrak{R}_S \not\subset \mathfrak{T}_C(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta \in D$. Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) vollendet den Beweis. — Man sieht, daß man sogar „unbeschränkte Teilsummen für $\zeta \in D$" verlangen kann.

Durch $\mathfrak{a} \to \sum_{k=0}^{n} a_k = S_n$ sind in $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ stetige Linearformen $\mathfrak{s}'_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ erklärt. Die Norm von $\mathfrak{s}'_n$ (s. § 1) bezüglich $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ ist dieselbe, und zwar gilt

$$\|\mathfrak{s}'_n\| = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\right)^2 \quad (= \Gamma_n \text{ gesetzt}).$$

Dabei ist $\Gamma_n \cong \frac{\log n}{\pi}$ (s. LANDAU [1929, S. 26]). Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_R$ ist daher $\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\Gamma_n)$. Weiter gilt

Satz 13.3 (Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen).

I. Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a_k = o(\Gamma_n)$.

II. Jedoch gibt es zu jeder Nullfolge ε_n ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ mit $\sum_{k=0}^{n} a_k \neq O(\varepsilon_n \Gamma_n)$.

Beweis. Der bekannte Satz von FEJÉR über die gleichmäßige C_1-Summierbarkeit von Fourierreihen stetiger Funktionen, also auch von Potenzreihen in $|z|<1$ regulärer und gleichmäßig stetiger Funktionen (s. etwa ZYGMUND [1935, S. 45)] zeigt, daß die Menge $\mathfrak{A}$ der abbrechenden Stellen in $\mathfrak{R}_S$ dicht liegt (man könnte von Abschnitts-C_1-Limitierbarkeit sprechen). Es ist

$$\mathfrak{R}_S < \mathfrak{R}_B < \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\Gamma_k)\right] \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} < \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = o(\Gamma_n)\right],$$

wobei die Zeichen rechts die Menge der $\mathfrak{a}$ bedeuten, bei denen die O- bzw. o-Bedingung erfüllt ist. Diese Mengen sind BK-Räume mit der Norm

$$\|\mathfrak{a}\| = \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\dots} \frac{1}{\Gamma_n} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right|$$

— man wende Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) an, vgl. auch $\mathfrak{S}_B$ und $\mathfrak{S}_N$ in § 2. Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung) mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}_S$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{A}$ liefert die Behauptung I. Behauptung II lautet nach Umformung

$$\mathfrak{R}_S \not\subset \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\varepsilon_n \Gamma_n)\right]$$

und wird auf Grund der Bedeutung von Γ_n mittels Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen) bewiesen. — Natürlich könnte man hier auch die bekannten Sätze über Folgen linearer Operationen anwenden.

Zusätze. I. In 13.2 kann man sogar erreichen, daß $\sum a_k \zeta^k$ für $|\zeta| = 1$, $\zeta \notin D$ konvergiert. Man konstruiert zunächst ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$, dessen Potenzreihe in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkte Teilsummen hat und auf $|\zeta| = 1$ genau im Punkte $\zeta = 1$ divergiert [vgl. Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen)] und fährt ähnlich wie in Satz 11.3 (Nichtexistenz genau abzählbar vieler Randwerte) fort.

II. Man kann auch ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ erhalten, dessen Potenzreihe für $|\zeta| = 1$ konvergiert, aber nicht gleichmäßig (vgl. § 12). Literatur zu I und II: NEDER [1919] und [1920].

III. Varianten zu 13.3 für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B$ wurden von BOHR [1917] und NEDER [1923] gegeben. Bei den Beweisen verwendet man den gleitenden Buckel (vgl. § 4).

§ 14. Betragssummen bei gleichmäßig konvergenten Potenzreihen.

Übersicht. Wir betrachten den BK-Raum $\mathfrak{P}_G$ der $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert (die Norm von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{P}_G$ ist $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\dots} \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|$; vgl. § 2). Wir fragen: Wie groß kann $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ werden

a) bei festem n für ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$ mit $\|\mathfrak{a}\| \leq 1$,

b) bei festem $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$ für $n \to \infty$?

Unter Verwendung des Hilfssatzes 14.1 geben 14.2 und 14.3 hierauf Antworten, wobei $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ mit $\sqrt{n+1}$ verglichen wird. Dies verschärft Ergebnisse von Szász [1920], der die größere Klasse der in $|z|<1$ beschränkten Funktionen $a(z)$ (also den Raum $\mathfrak{R}_B$) betrachtet. Im Gegensatz zu Szász benötigen wir keine zahlentheoretischen Hilfsmittel. Aus 14.3 folgt in 14.4 eine Aussage über die Konvergenz von $\sum |a_k|^p$ für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$.

Hilfssatz 14.1 (Stellen mit großer Betragssumme). *Zu jedem* $r = 1, 2, \ldots$ *gibt es eine abbrechende Stelle* $\mathfrak{a} = \{a_0, \ldots, a_{r^2-1}, 0, 0, \ldots\}$ *mit*

$$|a_k| = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, r^2 - 1), \qquad \text{also} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = r^2$$

und

$$\left| \sum_{k=0}^{l} a_k z^k \right| < 12r \quad (|z| < 1;\ l = 0, 1, \ldots).$$

Beweis. r sei fest gewählt,

$$|\tau| = 1, \qquad \arg \tau = \frac{2\pi}{r}, \qquad \text{also} \quad \tau^r = 1.$$

Wir wollen die gewünschten Eigenschaften bei

$$a(z) = \sum_{j=0}^{r-1} z^{jr} \frac{1 - (\tau^j z)^r}{1 - \tau^j z} = \sum_{j=0}^{r-1} z^{jr} \frac{1 - z^r}{1 - \tau^j z} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{z^{jr} - z^{(j+)r}}{1 - \tau^j z}$$

$$= (1 + z + \cdots + z^{r-1}) + z^r (1 + \cdots + (\tau z)^{r-1}) + \cdots + z^{(r-1)r} (1 + \cdots + (\tau^{r-1} z)^{r-1})$$

nachweisen. Es genügt, die letzte Ungleichung zu bestätigen. Wir nehmen zunächst

$$|z| = 1, \qquad -\frac{2\pi}{r} \frac{1}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{r} \frac{1}{2}$$

an und schätzen spezielle Teilsummen ab. Für diese z ist

$$\frac{2\pi}{r} \left(j - \frac{1}{2}\right) \leq \arg \tau^j z \leq \frac{2\pi}{r} (j + 1),$$

also

$$|1 - \tau^j z| \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{r} \operatorname{Min} \left(j - \frac{1}{2}, r - j - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{2}{r} \operatorname{Min} (j, r - j) \quad (0 < j < r).$$

Vor Anwendung dieser Abschätzung summieren wir partiell:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{z^{jr} - z^{(j+1)r}}{1 - \tau^j z} = \frac{z^r}{1 - \tau z} + \sum_{j=1}^{r-2} z^{(j+1)r} \left(\frac{-1}{1 - \tau^j z} + \frac{1}{1 - \tau^{j+1} z} \right) - \frac{z^{rr}}{1 - \tau^{r-1} z}$$

$$= \frac{z^r}{1 - \tau z} + \sum_{j=1}^{r-2} z^{(j+1)r} \cdot \tau^j z \cdot \frac{\tau - 1}{(1 - \tau^j z)(1 - \tau^{j+1} z)} - \frac{z^{rr}}{1 - \tau^{r-1} z} = A + B + C.$$

Wegen

$$|\tau - 1| \leq \frac{2\pi}{r} \leq \frac{8}{r}$$

ist der j-te Summand in B dem Betrage nach

$$\leq 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{r} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\text{Min}(j, r-j) \cdot \text{Min}(j+1, r-j-1)}.$$

Beachtet man die für $\left[\frac{r}{2}\right] = n = 1, 2, \ldots$ geltenden Ungleichungen

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n \cdot n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 1} \leq 2$$

so ergibt Summation über j

$$|B| \leq 2 \cdot r \cdot 2 = 4r.$$

Damit ist

$$|A + B + C| \leq \frac{r}{2} + 4r + \frac{r}{2} = 5r.$$

Berücksichtigung des nullten Summanden $(1 + z + \cdots + z^{r-1})$ für $a(z)$ liefert

$$|a(z)| \leq r + 5r = 6r.$$

Ebenso erkennt man, daß $6r$ sogar eine Schranke für die Beträge aller Teilsummen der Form

$$\sum_{j=0}^{q} \frac{z^{jr} - z^{(j+1)r}}{1 - \tau^j z} = \sum_{k=0}^{qr-1} a_k z^k \quad (z \text{ wie oben}, \; q = 0, 1, \ldots)$$

ist. Ähnliche Überlegungen stellt man an, wenn $|z| = 1$ ist und $\arg z$ in einem der Intervalle

$$\frac{2\pi}{r}\left(h - \frac{1}{2}\right) \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{r}\left(h + \frac{1}{2}\right) \quad (h = 1, \ldots, r-1)$$

liegt, wobei man die zuletzt erwähnte $\sum_{j=0}^{q}$ in drei Teile $(j < h, j = h, j > h)$ zerlegt. Man findet

$$\left|\sum_{j=0}^{q}\right| \leq 5r + r + 5r = 11r \quad (q = 0, 1, \ldots)$$

für $|z| = 1$, also auch für $|z| \leq 1$, und damit nach naheliegender Zerlegung

$$\left|\sum_{k=0}^{l} a_k z^k\right| \leq 11r + r = 12r \quad (|z| \leq 1, \; l = 0, 1, \ldots),$$

w. z. b. w.

Bemerkungen. Die Konstante 12 läßt sich noch verbessern. Hätten wir die Ungleichung für $1 - \tau^j z$ ohne partielle Summation angewandt — wie das z. B. bei LANDAU [1919] und TURÁN [1948] getan wird — so wäre in der Ungleichung für die Teilsummen rechts noch ein Faktor der Größenordnung $\log r$ erschienen. Die Abschätzungen im Beweis zu 14.1 sind auch nützlich bei den in § 15 erwähnten Sätzen über Konvergenz von Potenzreihen.

Wir betrachten die Mengen $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{P}_G$, $\mathfrak{L}_p (p \geq 1)$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $a(z)$ in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkt ist, $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert, $\sum |a_k|^p < \infty$ ist. Diese Mengen sind *BK*-Räume mit der Norm

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} |a(z)|, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p},$$

Mit Λ_n bezeichnen wir die obere Grenze von $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$, die in $\mathfrak{P}_G$ eine Norm $\|\mathfrak{a}\| \leq 1$ haben. Λ_n ist gewissermaßen die Norm der Abbildung $\mathfrak{a} \to \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ im *BK*-Raum $\mathfrak{P}_G$.

Satz 14.2 (Obere Grenze von $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ bei variablem $\mathfrak{a}$). *Es ist* $\Lambda_n \leq \sqrt{n+1}$ *und*

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \frac{\Lambda_n}{\sqrt{n+1}} > 0.$$

Beweis. Nach § 8 (5) gilt $\sum |a_k|^2 \leq 1$ für jedes $\mathfrak{a}$, das in $\mathfrak{R}_B$ eine Norm ≤ 1 hat, also erst recht für jedes $\mathfrak{a}$, das in $\mathfrak{P}_G$ eine Norm ≤ 1 hat. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot |a_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2},$$

also

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sqrt{n+1} \cdot 1$$

für die genannten $\mathfrak{a}$. — Nach 14.1 gibt es für $r^2 \leq m+1 < (r+1)^2$ eine abbrechende Stelle $\mathfrak{a}$, deren Norm in $\mathfrak{P}_G \leq 1$ ist, so daß

$$\sum_{k=0}^{m} |a_k| = \sum_{k=0}^{r^2-1} |a_k| = \frac{1}{12} r^2 = \frac{r}{12} \geq \frac{1}{12} \left(\sqrt{m+1} - 1\right)$$

ist. Daher gilt

$$\Lambda_m \geq \tfrac{1}{12} \left(\sqrt{m+1} - 1\right),$$

was die Behauptung ergibt.

Satz 14.3 (Verhalten von $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ für $n \to \infty$).

I. Für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B$ (*d.h. mit* $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} |a(z)| < \infty$) *gilt* $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)$.

II. Hingegen gibt es zu jeder Nullfolge ε_n *ein* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$ (*dessen Potenzreihe also in* $|z|<1$ *gleichmäßig konvergiert*), *so daß* $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \neq O\left(\varepsilon_n \sqrt{n+1}\right)$ *gilt.*

Beweis. I. Nach § 8 (5) ist $\mathfrak{R}_B \subset \mathfrak{L}_2$. Es genügt daher,

$$\mathfrak{L}_2 \subset \left[\sum_{k=0}^{n} |a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)\right]$$

zu beweisen. Der Ausdruck rechts bedeutet dabei wieder die Menge der $\mathfrak{a}$, die die betreffende o-Bedingung erfüllen. Entsprechend ist der Klammerausdruck mit O an Stelle von o erklärt.

Diese Mengen ($[\ldots]$) sind BK-Räume mit der Norm

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

[Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) anwenden; vgl. auch $\mathfrak{S}_B$ und $\mathfrak{S}_N$ in § 2]. Jedenfalls ist nach dem Beweis in 14.2

$$\mathfrak{L}_2 < \left[\sum_{k=0}^{n} |a_k| = O\left(\sqrt{n+1}\right)\right].$$

Die Menge $\mathfrak{A}$ der abbrechenden Folgen liegt in $\mathfrak{L}_2$ dicht, es ist

$$\mathfrak{A} < \left[\sum_{k=0}^{n} |a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)\right].$$

Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung) vollendet den Beweis.

II. Aus

$$\mathfrak{P}_G < \left[\sum_{k=0}^{n} |a_k| = O\left(\varepsilon_n \cdot \sqrt{n+1}\right)\right]$$

folgte mit einem gewissen M

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \frac{1}{\varepsilon_n \cdot \sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq M \cdot \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right| \qquad (\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G)$$

[s. Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen)], was man mit 14.2 II widerlegt. — Auch hier könnte man mit Operationsfolgen arbeiten, vgl. § 13.

Satz 14.4 (Szász; Divergenz von $\sum |a_k|^p$). *Es gibt ein* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$, *das keinem* $\mathfrak{L}_p$ *mit* $p<2$ *angehört, d.h. es ist* $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2} \mathfrak{L}_p$.

Bemerkung. Wie bekannt und z.B. aus § 8 (5) abzulesen, gilt $\mathfrak{N}_B < \mathfrak{L}_2$, also auch $\mathfrak{P}_G < \mathfrak{L}_2$.

Beweis. Bei den im Hilfssatz 14.1 genannten $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(1)$ ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} = r^{2/p}, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \leq 12\, r,$$

was mit Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen) für jedes $p<2$ die Beziehung $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p$ ergibt. Nach Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) gilt $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2} \mathfrak{L}_p$ (es genügt ja, p eine abzählbare Menge durchlaufen zu lassen).

Andere Beweise.

I. Die gesuchte Stelle $\mathfrak{a}$ kann auch durch „Nebeneinandersetzen" geeigneter Stellen der Form $\alpha_r \cdot \mathfrak{a}(r)$ [$\mathfrak{a}(r)$ wie in 14.1] erhalten werden (Gleitender Buckel in besonders einfacher Form!).

II. Man erhält 14.4 leicht aus 14.3 unter Verwendung der Ungleichung (s. etwa ZYGMUND [1935, S. 65])

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot |a_k| \leq (n+1)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p},$$

wobei man entweder zunächst nur $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p (p<2)$ nachweist und wie oben weiterschließt oder auch direkt $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2} \mathfrak{L}_p$ findet.

III. Kennt man zu jedem $p<2$ ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{P}_B$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{L}_p$ (etwa $b(z) = (1+z)^{\overline{1-1}}$, s. LANDAU [1929, S. 68]), so betrachtet man die Stellen der Form $\{b_k \varrho^k\}$ $(0<\varrho<1)$ und erhält mittels Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen in *FK*-Räumen) die Beziehung $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p$. Weiter wie oben.

IV. Kennt man zu jedem $p<2$ ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{L}_p$, so erhält man zu jedem M in der Gestalt $\mathfrak{c} = \{b_0 \varrho^0, \ldots, b_r \varrho^r, 0, 0, \ldots\}$ ein $\mathfrak{c}$ mit

$$\mathfrak{L}_p\text{-Norm}\,\mathfrak{c} \geq M \cdot \mathfrak{R}_B\text{-Norm}\,\mathfrak{c}.$$

Durch „Nebeneinandersetzen" einer genügend großen Zahl dieser $\mathfrak{c}$ gewinnt man ein $\mathfrak{a} = \{c_0, \ldots, c_r, c_0, \ldots, c_r, \ldots, c_0, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots\}$ mit

$$\mathfrak{L}_p\text{-Norm}\,\mathfrak{a} \geq (M-1) \cdot \mathfrak{P}_0\text{-Norm}\,\mathfrak{a},$$

was wieder $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p$ ergibt. Weiter wie oben. Auch könnte man hier die Beziehung $\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\log n)$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B)$ aus § 13 ausnützen.

§ 15. Schlußbemerkungen.

Die Vollständigkeitskriterien in § 2 lassen sich auf Funktionenräume usw. übertragen. Minoranten kann man bei vielen Problemen anwenden, welche die Divergenz eines parameterabhängigen Grenzprozesses auf einer überabzählbaren Parametermenge betreffen (z. B. Existenz einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion). Die Anwendungen der Sätze in §§ 4 bis 7 beschränken sich natürlich nicht auf die Funktionentheorie. Zu §§ 10 bis 12: Statt $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ können auch andere Grenzprozesse, etwa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ betrachtet werden. Im Falle $\sum a_k \zeta^k$ sind entsprechende Sätze schon bekannt (s. HERZOG-PIRANIAN [1949] und dort angegebene Literatur).

Die *FK*-Räume passen sich nicht allen funktionentheoretischen Problemen an. So bilden z. B. die Stellen $\mathfrak{a}$, denen eine in $|z| \leq 1$ reguläre Funktion $a(z)$ entspricht, keinen *FK*-Raum, und die in $\mathfrak{R}_B$ durch die Norm definierte Topologie ist unhandlich, weil $\mathfrak{R}_B$ mit ihr zu einem inseparablen Raum wird. Man wird daher versuchen, die Ergebnisse dieser Arbeit auf Räume mit andersartigen Topologien zu übertragen. Erfolgsmöglichkeiten bieten sich bei vollkommenen Räumen (vgl. KÖTHE [1950]) und bei Räumen, die Vereinigung von *F*-Räumen sind (s. etwa ZELLER [1952]).

Es war nicht unser Ziel, möglichst viele Sätze aufzustellen oder Sätze möglichst zu verschärfen, sondern wir wollten an Beispielen die eingeschlagenen

Beweiswege erläutern. Die Arbeit bringt daher weniger neue Sätze als vielmehr neue Beweise. Kennt man die Methoden, so hat man ein Gefühl für die zu erwartenden Ergebnisse und wird bei Bedarf die vermuteten Sätze beweisen. Besser als durch eine Anhäufung spezieller Resultate wird die Struktur eines Gebietes der Mathematik durch die in ihm erfolgreichen Methoden beleuchtet.

Literatur.

BANACH, S. 1931: Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen. Studia math. **3**, 174—179. — BANACH, S. 1932: Théorie des opérations linéaires. 252 S. Warschau. — BANACH, S., u. H. STEINHAUS 1927: Sur le principe de la condensation de singularités. Fundamenta math. **9**, 50—61. — BIEBERBACH, L. 1931: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II, Moderne Funktionentheorie. 2. Aufl., 370 S. Leipzig. — BIEBERBACH, L. 1934: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I, Elemente der Funktionentheorie. 4. Aufl. 322 S. Leipzig. — BOHR, H. 1917: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. I, II. Göttinger Nachr. **1916**, 276—291; **1917**, 119—128. — BOURBAKI, N. 1940: Topologie générale. Structures topologiques et structures uniformes. 129 S. Paris. — BOURBAKI, N. 1948: Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale. 96 S. Paris. — CARATHÉODORY, C. 1927: Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. 718 S. Leipzig u. Berlin. — DIAS, C. 1951: Espacos vectoriais topológicos sua áplicacio nos espaços funcionais analíticos. São Paulo. — DIEUDONNÉ, J. 1942: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Ecole norm. Sup. **59**, 107—139. — DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ 1949: La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101. — DOSS, S. H. 1948: On a linear functional. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt **3**, 59—62. — EIDELHEIT, M. 1936: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Studia math. **6**, 139—148. — FANTAPPIÉ, L. 1943: Teoria de los funcionales analyticos y sus aplicaciones. Barcelona. — FEJÉR, L. 1910: Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Münch. Ber. **40**, Nr. 3, 17. — FRÉCHET, M. 1906: Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. Palermo Rendiconti **22**, 1—74. — GANAPATHY IYER, V. 1948: On the space of integral functions. I. J. Indian Math. Soc., N. S. **12**, 13—30. — GELFAND, I. 1936: Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires. Commun. Inst. Sci. math. méc. Univ. Kharkoff Soc. math. Kharkoff (4) **13**, 35—40. — GROTHENDIECK, A. 1953: Sur certains espaces des fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — GUTZMER, A. 1888: Ein Satz über Potenzreihen. Math. Ann. **32**, 596—600. — HERZOG, F., and G. PIRANIAN 1949: Sets of convergence of Taylor series. I. Duke Math. J. **16**, 529—534. — HILLE, E. 1948: Functional Analysis and Semi Groups. 528 S. New York. — KIERST, S., u. E. SZPILRAJN 1933: Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes. Fundamenta math. **21**, 276—294. — KNOPP, K. 1947: Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen. 4. Aufl. 583 S. Berlin. — KÖTHE, G. 1947: Zusammenhänge zwischen der Funktionentheorie und der Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Ber. Math. Tagung Tübingen 1946, S. 92—94. — KÖTHE, G. 1951: Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume. Math. Nachr. **4**, 70—80. — KÖTHE, G. 1952: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33. — KÖTHE, G. 1953: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — KOLMOGOROFF, A. 1934: Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen Raumes. Studia math. **5**, 29—33. — LANDAU, E. 1919: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn CARLEMAN „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion". Math. Z. **5**, 147—153. — LANDAU, E. 1929: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 2. Aufl. 122 S. Berlin. — LEBESGUE, G. 1909: Sur les intégrales singulières. Toulouse Ann. (3) **1**, 25—117. — LUSIN, N., et J. PRIWALOFF 1925: Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Ann. Ecole norm. (3) **42**, 143—191. — MARCOUCHEWITCH, A. 1945: Sur les bases dans l'espace des fonctions analytiques. Rec. Math. Mat. Sbornik. N. S. **17** (59) 211—252. —

MAZUR, S., u. W. ORLICZ 1933: Über die Folgen linearer Operationen. Studia math. **4**, 152—157. — NEDER, L. 1919: Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen einschließlich der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Diss. Göttingen, 45 S. — NEDER, L. 1920: Konvergenzdefekte stetiger Funktionen auf dem Rand des Konvergenzkreises. Math. Z. **6**, 262—269. — NEDER, L. 1923: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. Math. Z. **11**, 115—123. — OSTROWSKI, A. 1923: Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie. Dtsch. Math.-Ver. **32**, 185—194. — POLYA, G. 1917: Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. Acta math. **41**, 99—118. — RIESZ, F. u. M. 1916: Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Quatrieme Congr. des math. scand. 1916, 27—44. — SCHAUDER, J. 1930: Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen. Studia math. **2**, 1—6. — SCHUR, I. 1920: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. Math. **151**, 79—111. — SILVA, J. S. 1950: As funcoes analiticas e a analise funcional. Port. Math. **9**, 1—130. — STEINHAUS, H. 1919: Sur les défauts de convergence des séries trigonométriques et potentielles. Krkh.-Anz. **1919**, 123—141. — SZÉSZ, O. 1920: Über Potenzreihen, die im Einheitskreis beschränkte Funktionen darstellen. Math. Z. **8**, 222—236. — TAYLOR, A. E. 1950: Weak convergence in the spaces H_p. Duke Math. J. **17**, 409—418. — TAYLOR, A. E. 1951: Banach spaces of functions analytic in the unit circle. I, II. Studia math. **11**, 145—170; **12**, 25—50. — TOEPLITZ, O. 1911: Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. **22**, 113—119. — TOEPLITZ, O. 1949: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie. Comment. Math. Helv. **23**, 222—242. — TURÁN, P. 1948: On some examples in the theory of power series. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 932—936. — ZELLER, K. 1951: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487. — ZELLER, K. 1951: Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70. — ZELLER, K. 1952: Über Stetigkeit von Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 167—182. — ZYGMUND, A. 1935: Trigonometrical series. 331 S. Warschau-Lwow.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen sind dem Verfasser weitere Veröffentlichungen bekanntgeworden, die sich mit der vorliegenden Arbeit berühren und einige unserer Ergebnisse enthalten. — GANAPATHY IYER: On the space of integral functions. II. Quart. J. Math. Oxford (2) **1**, 86—96 (1950). (Lineare Funktionale im Raum der ganzen Funktionen.) — HERZOG, F., and G. PIRANIAN: Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 639 (1952); sowie: Sets of convergence of Taylor Series. II. Duke Math. J. **20**, 41—54 (1953). (Konvergenz der Potenzreihe am Rande, Existenz von Randwerten.) — RYLL-NARDZEWSKI, C., u. H. STEINHAUS: Sur les séries de Taylor. Studia math. **12**, 159—165 (1951). (Nichtfortsetzbare Funktionen.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)

SCHÄFKE, F. W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 436—447 (1953)

Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen.

Von
FRIEDRICH WILHELM SCHÄFKE.

Als Additionstheorem der Zylinderfunktionen bezeichnet man die Formel, die — physikalisch-anschaulich gesprochen — die Zylinderwellen einer gegebenen Achse als Überlagerung von Zylinderwellen einer anderen, der ersten parallelen Achse darstellt, die also — mathematisch ausgedrückt — eine in einem Polarkoordinatensystem separierte Lösung der ebenen Schwingungsgleichung in eine Reihe nach Lösungen entwickelt, die in einem anderen Polarkoordinatensystem separiert sind. Additionstheorem der MATHIEUschen Funktionen nenne ich die entsprechende, wesentlich allgemeinere Formel für elliptische Zylinderwellen mit paralleler Zylinderachse, jedoch beliebiger Lage der beiden ebenen elliptischen Koordinatensysteme. Sie wird hier für den weitest möglichen Gültigkeitsbereich der komplexen Variabeln und Parameter hergeleitet.

Die Herleitung beruht — neben den Invarianzeigenschaften der Schwingungsgleichung — auf drei Prinzipien, die sich ähnlich auch in anderen Gebieten der Theorie der speziellen Funktionen als überaus fruchtbar erweisen:

I. Jede in einem Streifen parallel der reellen Achse regulär analytische Funktion $f(t)$ mit der Eigenschaft $f(t+2\pi) \equiv e^{2\pi i\nu} f(t)$ (ν beliebig komplex) läßt sich dort für alle zu ν und $\nu+1$ gehörenden normalen Werte des Parameters h^2 der MATHIEUschen Differentialgleichung — das sind jeweils alle komplexen h^2 bis auf abzählbar viele ohne endlichen Häufungspunkt — in eine Reihe nach MATHIEUschen Funktionen (zu verschiedenen Werten des Parameters λ) mit derselben Eigenschaft entwickeln. Für die Koeffizienten gelten Integralformeln.

II. Jede Lösung der ebenen Schwingungsgleichung kann bei geeigneter Wahl des Integrationsweges als Kern einer Integralbeziehung zwischen MATHIEUschen Funktionen und modifizierten MATHIEUschen Funktionen dienen.

III. Es gibt modifizierte MATHIEUsche Funktionen, deren asymptotisches Verhalten für $\Re e\, z \to +\infty$ mit dem der Zylinderfunktionen erster bis vierter Art vom Argument $2h \mathfrak{Cof}\, z$ übereinstimmt; sie sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Diese drei Prinzipien werden zum Beweise des Additionstheorems so verwandt, daß zunächst gemäß I eine Entwicklung bezüglich einer Variablen erhalten wird, dann vermittels II auf die Abhängigkeit der Koeffizienten von der zweiten Variablen geschlossen wird und schließlich die genaue Gestalt dieser Koeffizienten gemäß III durch Vergleich des asymptotischen Verhaltens gewonnen wird.

Das Additionstheorem und die ihm gleichwertigen bei der Koeffizientenbestimmung auftretenden Integralrelationen sind von sehr großer Allgemeinheit. Durch Spezialisierung ergibt sich natürlich das Additionstheorem der Zylinderfunktionen, wenn man beide elliptischen Koordinatensysteme zu Polarkoordinaten ausarten läßt. Bei nur einer Ausartung erhält man Entwicklungen von elliptischen Zylinderwellen nach Kreiszylinderwellen und umgekehrt sowie die entsprechenden Integralrelationen. [Sie sind Verallgemeinerungen von Beziehungen, die J. MEIXNER[1]) auf anderem Wege bewiesen hat.] Diese Formeln enthalten unmittelbar alle wichtigen Reihenentwicklungen der Theorie der MATHIEUschen Funktionen; das gilt auch für die SIEGERschen Reihen nach Produkten von BESSEL- und Zylinderfunktionen der Argumente $h e^{-z}$ und $h e^{z}$. Auf weitere mögliche Folgerungen, etwa die Ausartungen zu parabolischen oder kartesischen Koordinaten, wird nicht eingegangen.

Dem eigentlichen Beweise des Additionstheorems ist ein Abschnitt vorangestellt, in dem die benötigten Definitionen und Sätze aus der Theorie der MATHIEUschen Funktionen, unter anderem die drei genannten Prinzipien, ohne Beweise oder höchstens mit Beweisandeutungen notiert werden. Sie sind zum großen Teile neu; das gilt insbesondere für Satz 2 und die vorangehenden Definitionen und Resultate. Der Leser sei hierzu auf ein beim Springer-Verlag in Vorbereitung befindliches Werk, J. MEIXNER-F. W. SCHÄFKE, Mathieusche Funktionen, Sphäroidfunktion und ihre Anwendungen, hingewiesen. Bezüglich der historischen Entwicklung der Theorie der MATHIEUschen Funktionen seien noch E. T. WHITTAKER-G. N. WATSON[2]), M. J. O. STRUTT[3]) und N. W. MCLACHLAN[4]) genannt.

1. Grundlagen.

1.1. Die Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

erhält durch Einführung elliptischer Koordinaten mit

$$x_1 \pm i\, x_2 = c\, \mathfrak{Cof}\,(z \pm i\, t) \qquad (c \neq 0) \tag{2}$$

die Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2h^2 \mathfrak{Cof}\, 2z \cdot u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h^2 \cos 2t \cdot u; \tag{3}$$

dabei ist

$$h = \tfrac{1}{2} k\, c. \tag{4}$$

Das gilt nicht allein im Reellen; man kann x_1, x_2 bzw. z, t als komplexe Variable auffassen und $k, c\ (\neq 0)$ beliebig komplex zulassen.

[1]) Vgl. Fußnote 10 S. 445 und Fußnote 11 S. 446.

[2]) WATSON, G. N.: Mod. Analysis. 1927.

[3]) STRUTT, M. J. O.: LAMÉsche, MATHIEUsche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. 1932.

[4]) MCLACHLAN, N. W.: Theory and Application of Mathieu Functions. 1947.

(3) hat die separierten Lösungen

$$u(z,t) = Y(z)\, y(t),$$

wobei $y(t)$ eine MATHIEUsche Funktion ist, der MATHIEUschen Differentialgleichung

$$y''(t) + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)\, y(t) = 0 \tag{5}$$

genügt, und $Y(z)$ eine modifizierte MATHIEUsche Funktion ist, d.h. die modifizierte MATHIEUsche Differentialgleichung

$$-Y''(z) + (\lambda - 2h^2 \mathfrak{Cof}\, 2z)\, Y(z) = 0 \tag{6}$$

erfüllt. (5) und (6) sind durch den Separationsparameter λ gekoppelt. Die beiden Differentialgleichungen gehen mit $t = \pm i z$ ineinander über.

Der enge Zusammenhang zwischen (3), (5) (6) liefert — durch partielle, Integration — noch den

Satz 1: *Ist $\mathfrak{C}$ ein Weg der komplexen t-Ebene, $u(z,t)$ eine für z in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ und t auf $\mathfrak{C}$ regulär analytische Lösung von* (3), *$y(t)$ eine Lösung von* (5), *so ist*

$$Y(z) = \int_{\mathfrak{C}} u(z,t)\, y(t)\, dt$$

eine Lösung von (6), *wenn*

$$u(z,t)\, y'(t) - y(t) \frac{\partial}{\partial t} u(z,t)$$

an den Enden von $\mathfrak{C}$ denselben Wert hat und das Integral, falls uneigentlich, für z in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert.

1.2. (5) ist eine HILLsche Differentialgleichung mit der Periode π. Ist $y_{\mathrm{I}}(t)$ die Lösung mit den Anfangswerten

$$y_{\mathrm{I}}(0) = 1, \qquad y_{\mathrm{I}}'(0) = 0,$$

so erkennt man nach dem Theorem von FLOQUET die Gleichung

$$\cos \pi \nu = y_{\mathrm{I}}(\pi; \lambda, h^2) \tag{7}$$

als notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung

$$y = me_\nu t$$

mit der Eigenschaft

$$me_\nu(t + \pi) \equiv e^{\pi i \nu} me_\nu t \not\equiv 0. \tag{8}$$

Wir bezeichnen ν als charakteristischen Exponenten von (5).

Ist $y_{\mathrm{II}}(t)$ die Lösung von (5) mit

$$y_{\mathrm{II}}(0) = 0, \qquad y_{\mathrm{II}}(0) = 1,$$

so gilt

$$y_{\mathrm{I}}(\pi) - 1 = 2 y_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right) y_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad y_{\mathrm{I}}(\pi) + 1 = 2 y_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right) y_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Daher zerfällt (7) für ganzes ν in

$$(9)\qquad \begin{cases} \text{(I)} & y_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(II)} & y_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(III)} & y_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(IV)} & y_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \end{cases}$$

und zwar für gerades ν in (I) und (IV), für ungerades ν in (II) und (III). Das entspricht der Einteilung der ganzperiodischen und halbperiodischen Lösungen in gerade [(I), (II)] und ungerade [(IV), (III)].

Die rechte Seite von (7) und die linken Seiten von (9) sind ganze Funktionen von λ, h^2.

Wir nennen nun h^2 einen *normalen Wert* zu ν, wenn bei nicht ganzem ν (7), bei ganzem ν jede der beiden entsprechenden Gln. (9) nur einfache Wurzeln λ besitzt, anderenfalls *Ausnahmewert*. Zu jedem ν gibt es nur abzählbar viele Ausnahmewerte ohne endlichen Häufungspunkt.

Die Wurzeln λ von (7) schreiben wir

$$\lambda=\lambda_{\nu+2r}(h^2)\qquad (r=\cdots,-1,0,1,2,\ldots).$$

Sie hängen für normales h^2 regulär analytisch von h^2 ab. Durch geeignete Verzweigungsschnitte und die Verabredung

$$\lambda_\nu(0)=\nu^2,$$

bei ganzem ν zusätzlich durch die Wahl nicht negativer Indizes ν zu Lösungen von (I), (II) und negativer Indizes ν zu Lösungen von (III), (IV), können diese Funktionen in der gesamten h^2-Ebene eindeutig festgelegt werden. (Für nicht ganzes ν ist natürlich $\lambda_{-\nu}=\lambda_\nu$).

Die zu

$$\lambda=\lambda_\nu(h^2)$$

gehörende — zunächst nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmte — FLOQUETsche Lösung (8) schreiben wir

$$y=me_\nu(t;h^2).$$

Diese Funktion kann, solange $\lambda_\nu(h^2)$ einfache Wurzel der betreffenden Gl. (7) bzw. (9) ist, eindeutig festgelegt werden, wenn man Regularität in h^2, die Normierung

$$(10)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi me_\nu t\cdot me_\nu(-t)\,dt=1$$

und

$$(11)\qquad me_\nu(t;0)=\begin{cases} e^{i\nu t} & (\nu \text{ nicht ganz oder } \nu=0) \\ 2^{\frac{1}{2}}\cos\nu t & (\nu=1,2,3,\ldots) \\ 2^{\frac{1}{2}}\sin\nu t & (\nu=-1,-2,-3,\ldots), \end{cases}$$

fordert. Für nicht ganzes ν ist $me_{-\nu}(z)=me_\nu(-z)$.

Es gilt dann

Satz 2: *Ist h^2 normaler Wert zu ν und zu $\nu+1$, so gelten die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{\tau+2\pi} me_{\nu+r}(t;h^2)\, me_{\nu+s}(-t;h^2)\,dt = \delta_{rs}$$

(τ beliebig). Jede in einem Streifen parallel der reellen Achse regulär analytische Funktion $f(t)$ mit $f(t+2\pi)\equiv e^{2\pi i\nu} f(t)$ kann dann dort in eine Reihe

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f_r\, me_{\nu+r}(t;h^2)$$

entwickelt werden; sie konvergiert in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig[5]*. Die Koeffizienten sind*

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{\tau+2\pi} f(t)\, me_{\nu+r}(-t;h^2)\,dt.$$

Die FLOQUETschen Lösungen lassen sich in FOURIER-Reihen entwickeln:

$$(12)\qquad me_\nu(t;h^2) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r}^{\nu}(h^2)\, e^{i(\nu+2r)t}.$$

Die Koeffizienten genügen der linearen dreigliedrigen Rekursion

$$-h^2 c_{2r+2}^{\nu} + \left(\lambda - (\nu+2r)^2\right) c_{2r}^{\nu} - h^2 c_{2r-2}^{\nu} = 0;$$

sie können hieraus, ebenso wie $\lambda_\nu(h^2)$, mit Hilfe unendlicher Kettenbrüche berechnet werden.

Der Zusammenhang mit den bekannten, zu

$$\int_0^{2\pi} y^2(t)\,dt = \pi$$

normierten Funktionen ganzer Ordnung

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && ce_{2n}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(h^2)\cos 2rt,\\
&(\mathrm{II}) && ce_{2n+1}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1}(h^2)\cos(2r+1)t,\\
&(\mathrm{III}) && se_{2n+1}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1}(h^2)\sin(2r+1)t,\\
&(\mathrm{IV}) && se_{2n+2}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{2n+2}(h^2)\sin(2r+2)t
\end{aligned}\right\}\ (n=0,1,2,\ldots)$$

[5]) Ist ν ganz und der Streifen nicht symmetrisch zur reellen Achse, so sind dabei stets die Terme mit me_m und me_{-m} $(m=1,2,3,\ldots)$ zu einem Reihenglied zusammenzufassen.

wird durch

$$\begin{aligned} ce_m(t;h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}}\, me_m(t;h^2) \qquad (m=0,1,2,\ldots),\\ se_m(t;h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} i\, me_{-m}(t;h^2) \qquad (m=1,2,3,\ldots),\\ A_0^{2n}(h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} c_{-2n}^{2n}(h^2),\\ A_k^m(h^2) &= 2^{\frac{1}{2}} c_{k-m}^m(h^2) = 2^{\frac{1}{2}} c_{-k-m}^m(h^2)\\ B_k^m(h^2) &= 2^{\frac{1}{2}} c_{-k+m}^{-m}(h^2) = -\,2^{\frac{1}{2}} c_{k+m}^{-m}(h^2) \end{aligned} \qquad (k>0),$$

vermittelt. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} a_m(h^2) &= \lambda_m(h^2) \qquad (m=0,1,2,\ldots),\\ b_m(h^2) &= \lambda_{-m}(h^2) \qquad (m=1,2,3,\ldots). \end{aligned}$$

1.3. Führt man neben (2) noch das Polarkoordinatensystem R, φ mit

$$x_1 \pm i\, x_2 = R\, e^{\pm i\varphi} = c\, \mathfrak{Cof}\,(z \pm i t)$$

ein und wählt in Satz 1 speziell[6])

$$y(t) = me_\nu(t;h^2), \quad u(z,t) = \mathfrak{Z}_{\nu+2s}^{(j)}(k\,R)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi}$$

mit ganzem s, so erhält man für $\mathfrak{Re}\, z > 0$ durch

$$(13) \qquad (-1)^s c_{2s}^\nu(h^2)\, M_\nu^{(j)}(z;h) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathfrak{Z}_{\nu+2s}^{(j)}(k\,R)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi}\, me_\nu(t;h^2)\, dt$$

Lösungen der modifizierten MATHIEUschen Differentialgleichung (6) zu $\lambda = \lambda_\nu(h^2)$,

$$Y(z) = M_\nu^{(j)}(z;h)$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$(14) \qquad M_\nu^{(j)}(z;h) \sim \mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z) \qquad (\mathfrak{Re}\, z \to +\infty),$$

was für $j = 3, 4$ bei beschränktem $\mathfrak{Im}\, z$

$$(15) \qquad M_\nu^{(j)}(z;h) = \mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z)\,(1 + O(\mathfrak{Cof}\, z)^{-1})$$

bedeuten soll.

2. Hilfssätze.

Betrachten wir zunächst in der reellen (x_1, x_2)-Ebene zwei elliptische Koordinatensysteme. Eines sei, mit $c > 0$ das System (2). Das andere möge die Exzentrizität $c_0 > 0$ besitzen, die Polarkoordinaten seines Zentrums seien $\varrho\,(\geq 0)$, ψ, schließlich sei α der Winkel der beiden Halbgeraden $t = 0$ und $t_0 = 0$. Dann wird der Zusammenhang beider Systeme durch die beiden Gleichungen

$$(16) \qquad c\,\mathfrak{Cof}\,(z \pm i t) = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c_0\, e^{\pm i\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,(z_0 \pm i t_0)$$

ausgedrückt.

[6]) $\mathfrak{Z}^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ bedeutet der Reihe nach die BESSELsche, NEUMANNsche, erste und zweite HANKELsche Zylinderfunktion: J, N, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$.

Sind dann $z_1 (\geq 0)$, $z_2 (\geq 0)$ die elliptischen z-Koordinaten der Brennpunkte des zweiten Systems, und ist

$$A = \max (z_1, z_2),$$

so sind für

$$z > A, \quad -\infty < t < \infty \quad .$$

durch (16) und die Verabredung $z_0 > 0$ die Koordinaten $z_0 = z_0(z, t)$, $t_0 = t_0(z, t)$ eindeutige analytische Funktionen von z, t mit

$$z_0(z, t + 2\pi) = z_0(z, t), \qquad t_0(z, t + 2\pi) = t_0(z, t) + 2\pi.$$

Ist $v(z_0, t_0)$ eine für reelle z_0, t_0 regulär analytische Lösung der auf die elliptischen Koordinaten z_0, t_0 umgeschriebenen Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2} + 2h_0^2 \mathfrak{Cof}\, 2z_0 \cdot v = -\frac{\partial^2 v}{\partial t_0^2} + 2h_0^2 \cos 2t_0 \cdot v$$

mit

$$h_0 = \tfrac{1}{2} k c_0,$$

so wird

$$u(z, t) = v(z_0, t_0)$$

eine für $z > A$, $-\infty < t < \infty$ regulär analytische Lösung von (3), (4). Das folgt sofort aus der Orthogonalinvarianz von (1).

Diese im Reellen evidenten Tatsachen lassen sich ins Komplexe übertragen. Hier gilt:

Hilfssatz 1. *Seien $c, c_0, \varrho, \psi, \alpha$ komplexe Konstanten, die ersten beiden von 0 verschieden, sei*

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_1 = \varrho\, e^{i\psi} + c_0\, e^{i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_2 = \varrho\, e^{i\psi} - c_0\, e^{i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_3 = \varrho\, e^{-i\psi} + c_0\, e^{-i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_4 = \varrho\, e^{-i\psi} - c_0\, e^{-i\alpha},$$

$$A^+ = \max (\pm \mathfrak{Re}\, \zeta_1, \pm \mathfrak{Re}\, \zeta_2),$$

$$A^- = \max (\pm \mathfrak{Re}\, \zeta_3, \pm \mathfrak{Re}\, \zeta_4),$$

so sind durch die beiden Gleichungen

$$c\, \mathfrak{Cof}\, (z \pm i t) = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c_0\, e^{\pm i\alpha}\, \mathfrak{Cof}\, (z_0 \pm i t_0)$$

und die Verabredung

$$\mathfrak{Re}\, (z_0 \pm i t_0) > 0$$

für den (z, t)-Bereich

(B)

$$\mathfrak{Re}\, z - \mathfrak{Im}\, t > A^+$$

$$\mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Im}\, t > A^-$$

die beiden Funktionen

$$z_0 = z_0(z, t), \qquad t_0 = t_0(z, t)$$

eindeutig definiert und regulär analytisch. Man hat

$$z_0(z, t + 2\pi) = z_0(z, t)$$
$$t_0(z, t + 2\pi) = t_0(z, t) + 2\pi .$$

Ist $v(z_0, t_0)$ *eine ganze analytische Lösung von*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2} + 2h_0^2 \mathfrak{Cof}\, 2z_0 \cdot v = -\frac{\partial^2 v}{\partial t_0^2} + 2h_0^2 \cos 2t_0 \cdot v$$

mit

$$h_0 = \tfrac{1}{2} k c_0$$

und beliebigem komplexem k, *so wird*

$$u(z, t) = v(z_0, t_0)$$

eine für z, t *in* $\mathfrak{B}$ *reguläre analytische Lösung von* (3), (4).

Beweis. Man erkennt zunächst — das ist nichts anderes als der reelle Fall —, daß für $\mathfrak{Re}\, z \mp \mathfrak{Im}\, t > A^{\pm}$ jeweils (oberes bzw. unteres Vorzeichen) $\zeta_0 = z_0 \pm i\, t_0$ eine regulär analytische Funktion von $\zeta = z \pm i\, t$ mit $\zeta_0(\zeta \pm 2\pi i) = \zeta_0(\zeta) \pm 2\pi i$ ist. Daraus folgen die Behauptungen bis auf die letzte. Diese wird durch direkte Rechnung bestätigt, deren Ausführung jedoch vermieden wird mit der Bemerkung, daß sie genau so verläuft wie im obigen reellen Falle, in dem das Ergebnis auf Grund der Orthogonalinvarianz bekannt war.

Als Ergänzung zu Hilfssatz 1 benötigen wir Aussagen über das asymptotische Verhalten der Funktionen $z_0(z, t)$, $t_0(z, t)$ für $\mathfrak{Re}\, z \to +\infty$. Wir notieren

Hilfssatz 2: *Für* $\mathfrak{Re}\, z \to +\infty$ *gilt bei beschränktem* $\mathfrak{Im}\, t$ *gleichmäßig*

$$2h_0 \mathfrak{Cof}\, z_0 = 2h \mathfrak{Cof}\, z - k\varrho \cos(t - \psi) + O(\mathfrak{Cof}^{-1} z),$$
$$t_0 = t - \alpha + O(\mathfrak{Cof}^{-1} z).$$

Der Beweis ergibt sich durch einfache Rechnung, wenn man die beiden Gln. (16) einmal multipliziert und einmal dividiert.

3. Die Integralrelation.

Wir schließen in Bezeichnungen und Voraussetzungen an Hilfssatz 1 an. Es seien gemäß 1.2. die normierten Funktionen

$$me_\nu(t_0, h_0^2), \qquad me_{\nu+s}(t; h^2)$$

definiert[7]; s sei eine ganze Zahl. Dann kann in Hilfssatz 1

$$u(z; t) \equiv v(z_0, t_0) = M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2)$$

gewählt werden. Diese im Bereiche $\mathfrak{B}$ regulär analytische Lösung der (z, t)-Schwingungsgleichung hat die Eigenschaft

$$u(z, t + 2\pi) \equiv e^{2\pi i \nu} u(z, t).$$

[7]) Man erkennt leicht, daß für die Integralrelation allein auf jede Normierung verzichtet werden könnte; sie ist entsprechend homogen.

Daher kann auf das Integral

$$I_s^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-t; h^2)\, dt$$

der Satz 1 angewandt werden. Er zeigt, daß diese Funktion für

$$\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta, A^- - \Im\vartheta)$$

eine Lösung der modifizierten MATHIEUschen Differentialgleichung zum Parameterpaar $\lambda_{\nu+s}(h^2), h^2$ ist.

Um welche Lösung es sich handelt, wird nunmehr durch Untersuchung des asymptotischen Verhaltens entschieden.

Wir setzen zuerst $j=4$ und verwenden Hilfssatz 2, **1.3.** (15) und die asymptotischen Formeln der zweiten HANKELschen Zylinderfunktion. Für

$$|\arg 2h\,\mathfrak{Cof}\, z| \leq \pi - \delta \qquad (\delta > 0), \qquad \Re z \to +\infty$$

wird damit

$$I_s^{(4)}(z) = \mathfrak{Z}_\nu^{(4)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z)\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ih\varrho\cos(t-\nu)}\, me_\nu(t-\alpha; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-t; h^2)\, dt \cdot (1 + O(\mathfrak{Cof}^{-1} z)).$$

Es ist daher

$$I_s^{(4)}(z) = A_s\, M_{\nu+s}^{(j)}(z; h)$$

mit

$$A_s = \frac{i^{-s}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ih\varrho\cos\tau}\, me_\nu(\tau + \psi - \alpha; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-\tau - \psi; h^2)\, d\tau.$$

A_s kann durch die FOURIER-Koeffizienten der Funktionen *me* und Produkte von BESSEL- und Exponentialfunktionen ausgedrückt und damit gegebenenfalls berechnet werden. Man erhält

$$A_s = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\, c_{2q}^{\nu+s}(h^2)\, \frac{i^{-s}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ih\varrho\cos\tau}\, e^{i(\nu+2p)(\tau+\psi-\alpha)}\, e^{-i(\nu+2q+s)(\tau+\psi)}\, d\tau,$$

also mit Hilfe einer bekannten Integraldarstellung der BESSEL-Funktionen ganzer Ordnung und $p-q=l$

$$(17) \quad A_s = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+s} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\, c_{2(p-l)}^{\nu+s}(h^2)\, e^{-i(\nu+2p)\alpha} \right] J_{2l-s}(k\varrho)\, e^{i(2l-s)\psi}.$$

Für $j=3$ erhält man mit demselben A_s

$$I_s^{(3)}(z) = A_s\, M_{\nu+s}^{(3)}(z, h).$$

Daher hat man

Satz 3[8]: *Für*

$$\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta, A^- - \Im\vartheta)$$

[8]) In Voraussetzungen und Bezeichnungen ist an Hilfssatz 1 anzuschließen.

gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-t; h^2)\, dt = A_s\, M_{\nu+s}^{(j)}(z; h)$$
$$(j = 1, 2, 3, 4), \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dabei ist A_s durch (17) *gegeben.*

4. Das Additionstheorem.

Wir betrachten wie oben die Funktion

$$M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2) = u(z, t)$$

mit Hilfssatz 1 als Funktion von z, t in $\mathfrak{B}$. Wegen

$$u(z, t + 2\pi) \equiv e^{2\pi i\nu}\, u(z, t)$$

kann dann für jedes z auf die Funktion von t im Streifen

$$\mathfrak{Re}\, z - A^+ > \mathfrak{Im}\, t > -\mathfrak{Re}\, z + A^-$$

Satz 2 angewandt werden, falls h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ist. Die Entwicklungskoeffizienten liefert dabei gerade Satz 3. So erhalten wir

Satz 4 (Additionstheorem): *Sei h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$. Dann gilt mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Hilfssatz 1 für z, t im Bereiche $\mathfrak{B}$:*

$$M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s\, M_{\nu+s}^{(j)}(z; h)\, me_{\nu+s}(t; h^2).$$

Die Koeffizienten A_s sind durch (17) *gegeben*[9]).

5. Einige Spezialfälle und Folgerungen.

5.1. Für $c_0 \to 0$ geht das zweite elliptische Koordinatensystem mit

$$2h_0 \mathfrak{Cof}\, z_0 \to k R_0, \qquad t_0 \to \varphi_0$$

in das Polarkoordinatensystem

$$R_0\, e^{\pm i\varphi_0} = c_0 \mathfrak{Cof}(z_0 \pm i t_0)$$

über. Hier kann o.B.d.A. $\alpha = 0$ gesetzt werden. Dann ergibt Satz 4 unter den aus Hilfssatz 1 entsprechend zu entnehmenden Voraussetzungen

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(k R_0)\, e^{i\nu\varphi_0} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_s\, M_{\nu+s}^{(j)}(z; h)\, me_{\nu+s}(t; h^2) \tag{18}$$

mit

$$d_s = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r\, c_{2r}^{\nu+s}(h^2)\, J_{2r+s}(k\varrho)\, e^{-i(2r+s)\psi}. \tag{19}$$

Die entsprechenden Integralrelationen sind für den Sonderfall $\psi = 0$ bzw. $\psi = \pi$ von J. MEIXNER[10]) angegeben worden.

[9]) Auf die Normierung von $me_\nu(t_0; h_0^2)$ kann wegen der Homogenität verzichtet werden.

[10]) MEIXNER, J.: Math. Nachr. **5**, 371—378 (1951).

5.2. Läßt man auch das erste System zu Polarkoordinaten ausarten,

$$c \to 0, \qquad 2h\,\mathfrak{Cof}\, z \to k R, \qquad t \to \varphi,$$
$$c\,\mathfrak{Cof}(z \pm i t) = R e^{\pm i\varphi},$$

so entsteht, wenn wir o. B. d. A.

$$\psi = 0$$

setzen, das Additionstheorem der Zylinderfunktionen in der Form

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(k R_0)\, e^{i\nu\varphi_0} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(k\varrho)\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(k R_0)\, e^{i(\nu+s)\varphi_0}. \tag{20}$$

5.3. Läßt man allein das erste System ausarten, so erhält man mit $\alpha = 0$

$$M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_s^*\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(k R)\, e^{i(\nu+s)\varphi} \tag{21}$$

mit

$$d_s^* = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+s} c_{2l}^\nu(h_0^2)\, J_{2l-s}(k\varrho)\, e^{i(2l-s)\psi}. \tag{22}$$

Dabei ist entsprechend Hilfssatz 1

$$\begin{cases} R e^{\pm i\varphi} = \varrho e^{\pm i\psi} + c_0\,\mathfrak{Cof}(z_0 \pm i t_0) \\ \qquad \mathfrak{Re}\, z_0 \pm \mathfrak{Im}\, t_0 > 0, \end{cases} \tag{23}$$

und der Gültigkeitsbereich ist

$$\begin{cases} |R|\, e^{-\mathfrak{Im}\varphi} > \max\left(|\varrho\, e^{i\psi} \pm c_0|\right) \\ |R|\, e^{\mathfrak{Im}\varphi} > \max\left(|\varrho\, e^{-i\psi} \pm c_0|\right). \end{cases} \tag{23}$$

Auch diese Formeln hat für $\psi = 0$ bzw. $\psi = \pi$ J. MEIXNER[11]) angegeben; sie sind dort durch Einsetzen in die Differentialgleichungen und Herleitung von Rekursionsformeln für die d_s^* bewiesen worden.

5.4. Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß in (21), (22) alle wichtigen Reihenentwicklungen der MATHIEUschen Funktionen enthalten sind.

Dazu hat schon J. MEIXNER[11]) bemerkt, daß für $\varrho = \psi = 0$, $t_0 = \varphi = 0$ bzw. $t_0 = \varphi = \frac{\pi}{2}$, eventuell noch nach Differentiation nach t_0, die Reihenentwicklungen der Funktionen $M_\nu^{(j)}(z; h)$ nach Zylinderfunktionen der Argumente $2h\,\mathfrak{Cof}\, z$ bzw. $2h\,\mathfrak{Sin}\, z$ und für $\mathfrak{Re}\, z \to +\infty$ Verallgemeinerungen von (12) entstehen.

Wir zeigen noch, daß aus unseren Formeln, in denen ψ variabel bleibt, auch die SIEGERschen Reihen nach Produkten von BESSEL- und Zylinderfunktionen als Sonderfall gewonnen werden können. Wir brauchen nur zu bemerken, daß

$$R e^{\pm i\varphi} = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c\,\mathfrak{Cof}(z \pm i t)$$

[11]) MEIXNER, J.: Math. Nachr. **3**, 14—19 (1949).

— wir lassen den Index 0 fort — durch

$$k R = h e^{z}, \qquad \varphi = t, \qquad k \varrho = -h e^{-z}, \qquad \psi = -t$$

erfüllt wird. Dann wird aus (21), (22):

$$M_{\nu}^{(j)}(z;h)\, me_{\nu}(t;h^2) = \sum_{l,s=-\infty}^{+\infty} (-1)^l c_{2l}^{\nu}(h^2)\, J_{2l-s}(h e^{-z})\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(h e^{z})\, e^{i(\nu+2s-2l)t},$$

und der Vergleich der FOURIER-Entwicklungen bezüglich t ergibt die SIEGERschen Reihen:

$$c_{2r}^{\nu}(h^2)\, M_{\nu}^{(j)}(z;h) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l c_{2l}^{\nu}(h^2)\, J_{l-r}(h e^{-z})\, \mathfrak{Z}_{\nu+l+r}^{(j)}(h e^{z}).$$

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. Oktober 1952.)

SKOVGAARD, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 448—452 (1953)

Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a;c;x)$.

By
H. SKOVGAARD.

The confluent hypergeometric function $F(a;c;x)$ or, in the notation of Pochhammer-Barnes, ${}_1F_1(a;c;x)$ is for all complex values of x given by

$$F(a;c;x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots . \tag{1}$$

The parameters a and c are arbitrary complex numbers; c, however, must be different from $0, -1, -2, \ldots$. If a takes one of these values the function is, apart from a constant factor, the Laguerre polynomial $L_{-a}^{c-1}(x)$. In the present note we shall be concerned only with real values of a, c and x.

The numbers of positive and negative zeros, respectively, of $F(a;c;x)$ are known for all possible real sets of parameters (a, c). In a treatise on the differential equation (2) KIENAST [1] has, in 1921, solved this problem and given a detailed proof. His account, however, is very complicated, mainly because of the great multiplicity of the theorems stated. The proofs are certainly elementary but rather troublesome. His general method of attack is the use of a recurrence-formula for $F(a;c;x)$ with respect to a, by virtue of which the functions

$$F(a;c;x),\quad F(a+1;c;x),\ldots,\quad F(a+k;c;x)$$

form a Sturmian sequence for certain values of a, c and k.

In a recent note TRICOMI [2] has collected the results due to KIENAST in a clear diagram. It is the object of the present note to furnish new and simplified proofs, which immediately lead to this diagram. In addition to (1) we shall only apply KUMMER's formula (6) and the differential equation for $F(a;c;x)$

$$x\,y'' + (c-x)\,y' - a\,y = 0. \tag{2}$$

1. In this section we shall establish some theorems concerning the number of positive zeros of a function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

It is assumed that the sequence of coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ consists of real numbers, which are not all zero. It is then evident that if there is no variation of sign in the sequence of coefficients, then $f(x)$ has no positive zeros (terms which vanish are to be discarded before counting the variations of sign). We shall now prove the following:

Theorem 1. *If in* (3) *the sequence of coefficients has only one variation of sign, then* $f(x)$ *has exactly one positive zero, and this is a simple zero.*

If the variation of sign occurs at a_{p-r}, a_p, where a_p may be assumed positive, then, by considering successively the derivatives of $f(x)$, we obtain easily the following graphic representation of the sign of $f(x)$ and its p first derivatives in the interval $0 < x < \infty$ (the functions are positive at points of the full line and negative at points of the dotted line):

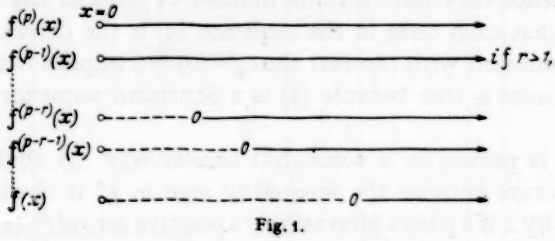

Fig. 1.

Next we state two closely related theorems:

Theorem 2. *If the sequence of coefficients in* (3) *has a total of* $n \geq 2$ *variations of sign, of which the last one occurs at* a_{p-r}, a_p, *and if* $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) < 0$ *for* $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$ *and for such* $x > 0$ *for which* $f^{(\nu)}(x) = 0$, *then* $f(x)$ *has exactly* n *positive zeros, each of which is a simple zero.*

Theorem 3. *If the sequence of coefficients in* (3) *has a total of* $n \geq 2$ *variations of sign, of which the last one occurs at* a_{p-r}, a_p, *and if* $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) > 0$ *for* $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$ *and for such* $x > 0$ *for which* $f^{(\nu)}(x) = 0$, *then* $f(x)$ *has no positive zeros if* n *is even, and exactly one positive, simple zero if* n *is odd.*

The condition in theorem 3 can be weakened slightly (see page 452, the discussion of the case B 4).

In order to prove theorem 2 we consider the functions

$$f(x), \quad f'(x), \ldots, \quad f^{(p)}(x). \tag{4}$$

Assuming first that none of the numbers

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \ldots, \quad f^{(p-1)}(0) = (p-1)!\, a_{p-1} \tag{5}$$

are zero, then (4) is a Sturmian sequence in the interval $0 \leq x \leq K$, if K is chosen such that all the functions in (4) for $x \geq K$ have the same sign as a_p. This follows from the fact that the functions satisfy the following four conditions:

1°. They are continuous for all x, and different from zero for $x = 0$ and $x = K$.

2°. $f^{(p)}(x) \neq 0$ in the interval $0 \leq x < \infty$.

3°. $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) < 0$ for $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, and for such $x \geq 0$, for which $f^{(\nu)}(x)$ happens to be equal to zero.

4°. $[f'(x)]^2 > 0$ for such $x \geq 0$, for which $f(x)$ happens to be equal to zero. (This follows indirectly from 3° using $\nu = 1$).

STURM's theorem then states that $W(x)$, the number of variations of sign in the sequence (4), changes its value only if x passes a zero of $f(x)$,

and at such a point $W(x)$ decreases by one. Hence it follows that $f(x)$ has $W(0) - W(K) = n$ zeros in the interval $0 < x < K$. According to 4° all the zeros are simple, and hence the theorem is proved in this special case, because $f(x)$ has constant sign for $x \geq K$.

If on the other hand one or more of the numbers (5) are equal to zero, then we choose an $\varepsilon > 0$ such that none of the functions in (4) have any zeros in the interval $0 < x \leq \varepsilon$ (this can be done because the functions are analytic and hence they have a finite number of zeros in any finite interval). Now the fact that each term in the sequence (4) is the derivative of the preceding term combined with the fact that $f^{(p)}(0) \neq 0$ implies that $W(0) = W(\varepsilon)$. Hence the theorem is true because (4) is a Sturmian sequence in the interval $\varepsilon \leq x \leq K$.

Theorem 3 is proved in a somewhat similar way. A slight modification in the proof occurs because the inequality sign in 3° is changed, and hence $W(x)$ decreases by 2, if x passes increasingly a positive zero of $f^{(\nu)}(x)$, $1 \leq \nu \leq p-1$. If now $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$, $\nu \neq 0$, and a_p have opposite sign, then $f^{(\nu)}(x)$ has at least one positive zero, because it is continuous. There are at least $\frac{n}{2}$ or $\frac{n-1}{2}$ such a_ν according as n is even or odd. Thus, at the zeros of $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, in the interval $0 \leq x \leq K$ there is a total decrease in $W(x)$ of at least n or $n-1$ according as n is even or odd. On the other hand, from the assumptions it follows that $W(x)$ decreases by n, and hence "at least" can be replaced by "exactly", and therefore $f(x)$ has no positive zero or one positive zero according as n is even or odd.

2. We shall now consider the confluent function (1). First we notice that $x = 0$ *is not a zero for any values of* a *and* c, because

$$F(a; c; 0) = 1.$$

Next, it is sufficient to determine the number of positive zeros, because it follows from KUMMER'S *formula*

$$F(a; c; x) = e^x F(c-a; c; -x) \tag{6}$$

that *the number of negative zeros of* $F(a; c; x)$ *is equal to the number of positive zeros of* $F(c-a; c; x)$. This is illustrated geometrically in Fig. 2, where the line $c = 2a$ is the axis of oblique symmetry.

Denoting by n a positive integer, we have, for the series (1), the following possibilities (cf. Fig. 3):

A. There is no variation of sign in the sequence of coefficients in each of the following cases:

1. $a > 0, \quad c > 0.$
2. $-n < a < -n+1, \quad -n < c < -n+1.$
3. $a = 0.$
4. $a = -1, -2, \ldots, \quad c < a+1.$

Thus, $F(a; c; x)$ *has no positive zeros in these cases.*

B. There are n variations of sign in the sequence of coefficients in each of the following cases:

1. $-n \leq a < -n+1, \quad c > 0.$
2. $-(n+m) \leq a < -(n+m)+1, \quad -m < c < -m+1, \; m$ a positive integer.
3. $a > 0, \quad -n < c < -n+1.$
4. $-m < a < -m+1, \; -(n+m) < c < -(n+m)+1, \; m$ a positive integer.

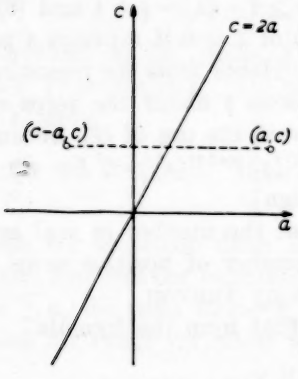

Fig. 2.

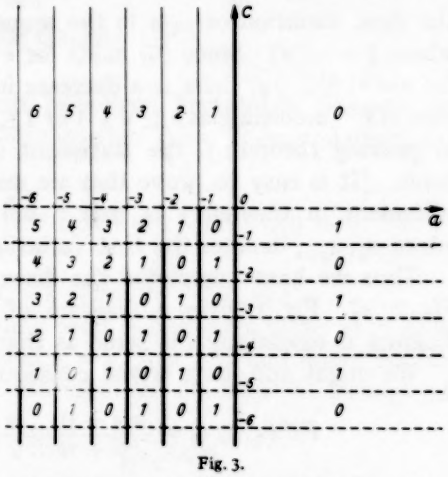

Fig. 3.

Fig. 2. The number of negative zeros of $F(a; c; x)$ = the number of positive zeros of $F(c-a; c; x)$.

Fig. 3. The number of positive zeros of $F(a; c; x)$. On the lines - - - - the function is not defined. On the lines ——— the function has no positive zeros. On the lines ——— the function has the same number of positive zeros as in the adjacent region on the right.

In order to determine the number of positive zeros in each of these cases we shall first consider (2), from which we obtain

$$x F^{(\nu+1)} + (\nu - 1 + c - x) F^{(\nu)} + (1 - a - \nu) F^{(\nu-1)} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

where F denotes $F(a; c; x)$. From this it follows that for every $x > 0$, for which $F^{(\nu)} = 0$, the following two inequalities hold:

$$F^{(\nu-1)} F^{(\nu+1)} < 0, \quad \text{if} \quad \nu < 1 - a, \tag{8}$$

$$F^{(\nu-1)} F^{(\nu+1)} > 0, \quad \text{if} \quad \nu > 1 - a, \tag{9}$$

except in the cases, where $F^{(\nu-1)} \equiv 0$; according to (1) this happens only, if a is a non-positive integer greater than $-(\nu-1)$, that is $1 - a < \nu$. These exceptional cases will be of no significance in the following, because in the cases B 1 and B 2 only (8) is used, and in the cases B 3 and B 4 a is either positive or not an integer.

Let us now consider the two cases B 1 and B 2. Using the same notation as in (3), it is seen that the last variation of sign in the sequence of coefficients of (1) occur at a_{p-1}, a_p, where $p = -[a]$. Thus (8) is true for each of the numbers $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, and hence we can apply the theorems 1 and 2.

This proves that, *in the cases B 1 and B 2 $F(a;c;x)$ has exactly n positive zeros, all of which are simple ones.*

Finally we shall prove that, *in the cases B 3 and B 4 $F(a;c;x)$ has no positive zeros if n is even, but one positive, simple zero if n is odd.*

In the case B 3 we have $a > 0$; hence (9) holds for every positive ν, and the statement follows from the theorems 1 and 3.

In the case B 4, if $n = 1$ we use again theorem 1. If $n \geq 2$ we notice that the first variation of sign in the sequence of coefficients occurs at a_q, a_{q+1}, where $q = -[a]$. Since (9) holds for every $\nu \geq 1 - [a] = q + 1$ and (8) holds for $\nu = 1, 2, \ldots, q$, there is a decrease in $W(x)$ of 2 or 0 if x passes a positive zero of $F^{(\nu)}$ according as $\nu \geq q+1$ or $1 \leq \nu \leq q$. Hence, from the reasoning used in proving theorem 3, the statement in theorem 3 about the zeros of $f(x)$ holds. [It is easy to prove that we might avoid the use of (8), because the statement in theorem 3 is true if only $f^{(\nu-1)}(x) f^{(\nu+1)}(x) > 0$ for $\nu \geq q+s$, where a_q, a_{q+s} denotes the first variation of sign].

Thus we have completed the discussion of the number of real zeros of $F(a;c;x)$. Fig. 3 gives a diagram of the number of positive zeros. This diagram is essentially the same as that given by TRICOMI.

We might add, as a trivial consequence, that from the formula

$$F^{(\nu)}(a;c;x) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)} F(a+\nu;c+\nu;x)$$

we can immediately tell the number of positive and negative zeros of the derivatives of $F(a;c;x)$.

References.

[1] KIENAST, A.: Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $x y'' + (\gamma - x) y' - \beta y = 0$. Denkschr. schweiz. naturforsch. Ges. **57**, 247—325 (1921). — [2] TRICOMI, F. G.: Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Math. Z. **52**, 669—675 (1950).

København (Dänemark), Lab. f. anv. Matematik, Sølvgade 83.

(Eingegangen am 19. Januar 1953.)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 453—455 (1953)

Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren.

Von
DIETER GAIER.

Vorgelegt sei die Reihe $\sum a_n$[1]) mit beliebigen komplexen Gliedern und mit den Teilsummen s_n. Sie heißt B-summierbar [bzw. B'-summierbar] zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum \frac{s_n x^n}{n!} = s \quad \left[\text{bzw. } \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}a(t)\,dt = s \quad \text{mit} \quad a(t)=\sum \frac{a_n t^n}{n!}\right]$$

ist, und wir schreiben dann $B-\sum a_n = s$ [bzw. $B'-\sum a_n = s$].

Beim Problem der Indexverschiebung beim B-Verfahren bildet man zu der Reihe $\sum a_n$ die neue Reihe $\sum b_n$, wobei $b_n = a_{n-1}\,(n\geq 1)$ und $b_0 = 0$ ist, und legt sich die Frage vor, unter welchen Bedingungen die folgende Aussage gilt:

(1) $$\text{Aus } B-\sum b_n = s \quad \text{folgt} \quad B-\sum a_n = s.$$

GARTEN hatte gezeigt, daß (1) sicher dann richtig ist, falls die a_n der Größenbeschränkung $a_n = O(n^k)$ $(n\to\infty,\ k \text{ fest})$ genügen[2]). Diese Größenbeschränkung für die a_n konnte KARAMATA auf $a_n = O(e^{n^\varrho})$ $(n\to\infty,\ \varrho<\frac{1}{3})$ abschwächen[3]). In beiden Fällen hat das der Reihe $\sum a_n$ zugeordnete Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen Konvergenzradius $r\geq 1$. Darüber hinaus werden wir hier zeigen:

Die Aussage (1) ist sicher richtig, wenn $a_n = O(K^n)$ $(n\to\infty,\ K \text{ fest})$ ist, wenn also das Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen positiven Konvergenzradius hat.

Beim Beweis werden vor allem Hilfsmittel aus der Theorie der ganzen Funktionen verwendet.

Wir geben (1) zunächst eine etwas andere Fassung. Die Aussage $B-\sum b_n = s$ ist nämlich äquivalent zu $B'-\sum a_n = s$, und aus $B'-\sum a_n = s$ folgt $B-\sum a_n = s$ genau dann, wenn $e^{-t}a(t)\to 0$ strebt für $t\to\infty$[4]). Schließlich kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $s=0$ angenommen werden. Zu der Aussage (1) ist also äquivalent:

(1') $$\text{Aus } B'-\sum a_n = 0 \quad \text{folgt} \quad e^{-t}a(t)\to 0 \quad (t\to\infty),$$

und wir haben zu zeigen, daß (1') richtig ist, falls $a_n = O(K^n)$ $(n\to\infty,\ K \text{ fest})$ ist. Vorbereitend beweisen wir den folgenden

---

[1]) Für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schreiben wir stets $\sum a_n$.

[2]) Vgl. V. GARTEN [2].

[3]) Vgl. J. KARAMATA [4].

[4]) Vgl. z. B. G. H. HARDY [3], S. 183.

Hilfssatz. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z) \geq 0$ regulär und es sei dort $|f(z)| \leq A e^{a|z|}$ für positive Konstanten A, a; ferner sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $(z = x + i y)$. Dann gibt es zu jedem $a' > a$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein x_0, so daß*

$$|f(x + i y)| \leq \varepsilon e^{a'|y|}$$

ist für $x \geq x_0$[5]).

Beweis. Die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Hilfsfunktion $h(z) = e^{i a' z} f(z)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Für $x \to \infty$ strebt $|h(x)| = |f(x)| \to 0$;

b) für $y \geq 0$ ist $|h(i y)| \leq e^{-a' y} \cdot A e^{a y}$, also strebt $h(i y) \to 0$ für $y \to \infty$;

c) im ersten Quadranten $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ ist $|h(z)| \leq A e^{(a+a')|z|}$.

Nach dem Prinzip von PHRAGMÉN und LINDELÖF[6]) ist daher $h(z)$ im ersten Quadranten beschränkt, und wegen a) und b) gilt sogar schärfer $|h(z)| \leq \varepsilon$ in dem Teil des ersten Quadranten, in dem $|z| \geq R_0(\varepsilon)$ ist[7]). Also gilt für $x \geq R_0$ und $y \geq 0$

$$|h(z)| = e^{-a' y} |f(x + i y)| \leq \varepsilon.$$

Entsprechend schließt man, wenn z im vierten Quadranten liegt, indem man die Hilfsfunktion $e^{-i a' z} f(z)$ heranzieht.

Der Hilfssatz gestattet uns, folgenden Satz zu beweisen, der auch unabhängig von der hier behandelten Fragestellung interessant ist.

Satz 1. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z) \geq 0$ regulär und es sei dort $|f(z)| \leq A e^{a|z|}$ für positive Konstanten A, a; ferner sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $(z = x + i y)$. Dann ist auch $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir setzen im vorigen Hilfssatz $a' = a + 1$ und wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann ist $|f(x + i y)| \leq \varepsilon e^{(a+1)|y|}$ für $x \geq x_0$ und daher für $x \geq x_0 + \frac{1}{a+1}$

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)\, dz}{(z - x)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon e^{(a+1)d}}{d^2} \cdot 2\pi d = (a + 1)\, e \cdot \varepsilon,$$

wenn $\mathfrak{C}$ den Kreis $|z - x| = d = \frac{1}{a+1}$ bezeichnet. Das heißt aber, daß $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ ist.

Wir kommen nun auf die Fragestellung (1′) unserer Arbeit zurück.

Satz 2. *Aus $F(x) = \int_0^x e^{-t} a(t)\, dt \to 0$ $(x \to \infty)$ mit $a(t) = \sum \frac{a_n t^n}{n!}$ folgt $e^{-x} a(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, falls $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty,\ K$ fest$)$ ist.*

Beweis. Es sei etwa $|a_n| \leq C_1 K^n$ für $n \geq 0$. Dann ist für $\Re(z) \geq 0$

$$|e^{-z} a(z)| \leq 1 \cdot \sum \frac{|a_n|\,|z|^n}{n!} \leq C_1 e^{K|z|},$$

---

[5]) Ein dazu verwandtes Resultat findet sich bei S. AGMON [1], S. 494—495.

[6]) Vgl. z. B. E. C. TITCHMARSH [5], S. 177.

[7]) Vgl. z. B. E. C. TITCHMARSH [5], S. 179.

also ist in $\Re(z) \geq 0$

$$|F(z)| \leq C_1 e^{K|z|} \cdot |z| \leq C_2 e^{(K+1)|z|}.$$

Ferner ist nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Satz 1 besagt dann, daß auch $\lim_{x\to\infty} F'(x) = 0$ ist, d.h. es ist $\lim_{x\to\infty} e^{-x} a(x) = 0$, und dies war zu zeigen.

Aus dem eingangs Gesagten und dem $B \to B'$-Satz geht, wie wir abschließend noch bemerken wollen, auch hervor, daß Satz 2 so gefaßt werden kann:

Für Reihen $\sum a_n$, deren zugeordnetes Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen positiven Konvergenzradius hat, sind die Verfahren B und B' äquivalent.

Literatur.

[1] AGMON, S.: Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series. Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 492—508 (1951). — [2] GARTEN, V.: Über den Einfluß endlich vieler Änderungen auf das BORELsche Limitierungsverfahren. Math. Z. **40**, 756—759 (1936). — [3] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [4] KARAMATA, J. Über die Indexverschiebung beim BORELschen Limitierungsverfahren. Math. Z. **45**, 635—641 (1939). — [5] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1950.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 10. April 1953.)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 456—458 (1953)

Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

Von

DIETER GAIER.

Das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

sei in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Die Herren ERDÖS, HERZOG und PIRANIAN haben vor einiger Zeit durch Angabe eines Beispiels bewiesen, daß es Potenzreihen der Form (1) gibt, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren[1]). Daraufhin wurde vom Verfasser gezeigt, wie man die Existenz solcher Potenzreihen ohne Rechnung nachweisen kann, wenn man bekannte Ergebnisse aus der Theorie der konformen Abbildung heranzieht[2]).

Inzwischen haben nun die Herren HERZOG und PIRANIAN bemerkt, daß (1) möglicherweise auf $|z| = 1$ überall konvergiert, wobei jedoch die Konvergenz auf jedem noch so kleinen Teilbogen von $|z| = 1$ ungleichmäßig ist; $f(z)$ kann dabei in $|z| < 1$ beschränkt sein[3]). Es soll im folgenden gezeigt werden, wie die vom Verfasser im oben genannten Fall verwandte Methode der konformen Abbildung auch zur Erzeugung solcher Potenzreihen geeignet ist. Dabei stützen wir uns vor allem auf Untersuchungen von CARATHÉODORY über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung schlichter, einfach zusammenhängender Gebiete[4]). Wir beweisen also den folgenden

Satz. *Es gibt eine in $|z| < 1$ reguläre, beschränkte und schlichte Funktion $f(z)$, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $|z| = 1$ überall konvergiert, aber auf keinem Teilbogen von $|z| = 1$ gleichmäßig.*

---

[1]) Vgl. P. ERDÖS, F. HERZOG und G. PIRANIAN [2].

[2]) Vgl. D. GAIER [3]. Es sei noch hinzugefügt, daß *für jede auf $|z| = 1$ gleichmäßig konvergente Potenzreihe der Form* (1) *die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{1+\varepsilon}$ konvergiert* (ε *beliebig* > 0). Denn für solche Potenzreihen ist $\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty$, woraus die Behauptung sofort mit Hilfe der HÖLDERschen Ungleichung folgt. Ähnlich zeigt man, daß die (mögliche) Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ einer Einschränkung unterworfen ist: *Für jede auf $|z| = 1$ gleichmäßig konvergente Potenzreihe der Form* (1) *ist* $\sum_{n=0}^{m} |a_n| = o\left(\sqrt{\log m}\right)$.

[3]) Vgl. F. HERZOG und G. PIRANIAN [4] und [4a] S. 51.

[4]) Vgl. C. CARATHÉODORY [1].

Beweis. a) Anschließend an CARATHÉODORY[5]) konstruieren wir uns zunächst in der w-Ebene ($w=u+iv$) ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und schlichtes Gebiet $\mathfrak{G}_w$, das den Wertevorrat unserer gesuchten Funktion $f(z)$ für $|z|<1$ darstellen wird.

Es bezeichne 0; $1+i$; 2 den Polygonzug P_0. Aus P_n entstehe der Polygonzug P_{n+1} dadurch, daß man das mittlere Drittel a jeder Seite von P_n lösche und dafür zwei Strecken einfüge, die die beiden Endpunkte von a mit der Mitte der Projektion von a auf CD verbinden ($n=0, 1, \ldots$). (Fig. 1 zeigt

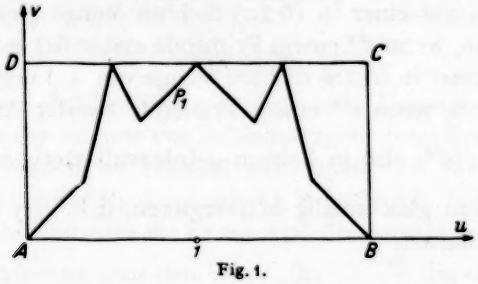

Fig. 1.

den Polygonzug P_1.) Spiegelt man P_n an AB, so entstehe $\overline{P}_n$ und durch P_n und $\overline{P}_n$ werde das Gebiet $\mathfrak{G}_n$ begrenzt. Schließlich setze man $\mathfrak{G}_w=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{G}_n$.

CARATHÉODORY hat nun gezeigt, daß der Rand des Gebiets $\mathfrak{G}_w$ aus Mengen N_1 und N_2 von Primenden erster und zweiter Art besteht[6]), wobei N_1 und N_2 in jedem Primendenintervall die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen und also insbesondere in jedem Primendenintervall dicht liegen. N_2 ist dabei die Menge sämtlicher abgeschlossenen Geradenstücke, die zum Rand von $\mathfrak{G}_w$ gehören und parallel zur v-Achse sind, während N_1 aus den restlichen Randpunkten von $\mathfrak{G}_w$ besteht, die alle auf $v=+1$ oder $v=-1$ liegen. Jedes Primende E trägt einen erreichbaren Randpunkt, der im Falle $E\in N_1$ auf $v=+1$ oder $v=-1$ liegt, aber im Falle $E\in N_2$ zu $|v|<1$ gehört.

b) Wird das Gebiet $\mathfrak{G}_w$ durch die reguläre Funktion $z=\Phi(w)$ auf $|z|<1$ abgebildet, so ist die Umkehrfunktion $w=f(z)$ in $|z|<1$ regulär, beschränkt und schlicht, und die Primenden von $\mathfrak{G}_w$ werden umkehrbar eindeutig den Punkten der Kreislinie $|z|=1$ zugeordnet[7]). Letzteres hat zur Folge, daß jeder von einem erreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{G}_w$ ausgehende Einschnitt γ bei der Abbildung durch $z=\Phi(w)$ in ein Jordansches Kurvenstück C übergeht, das in einem bestimmten Punkt von $|z|=1$ endigt.

Nun existiert $\lim_{r\to 1} f(r\,e^{i\varphi})$ für alle φ des Intervalls $\langle 0,2\pi)$. Denn ist E_φ das dem Punkt $e^{i\varphi}$ entsprechende Primende und bezeichnet w_φ den auf ihm gelegenen erreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{G}_w$, so wähle man einen von w_φ ausgehenden

[5]) Vgl. C. CARATHÉODORY [1], S. 366.

[6]) Bezüglich der benützten Begriffe vgl. C. CARATHÉODORY [1] oder B. v. KERÉKJÁRTÓ [5], S. 108—120.

[7]) Vgl. C. CARATHÉODORY [1], S. 350.

Einschnitt γ_φ. Dessen Bild in der z-Ebene ist ein gegen $e^{i\varphi}$ strebendes Jordansches Kurvenstück C_φ. Es ist also $\lim f(z) = w_\varphi$ für $z \to e^{i\varphi}$ längs C_φ. Daraus folgt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der beschränkten Funktionen[8]), daß $\lim_{r\to 1} f(r\,e^{i\varphi}) = w_\varphi$ ist[9]).

Dies hat aber zur Folge, daß die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von $f(z)$ für $z = e^{i\varphi}$ zum Wert w_φ konvergiert[10]), wodurch eine Funktion $f(e^{i\varphi})$ für $0 \leq \varphi < 2\pi$ erklärt ist. Dieselbe ist aber in keinem φ-Intervall stetig. Denn $\Im(w_\varphi)$ ist einerseits auf einer in $\langle 0,2\pi)$ dichten Menge gleich $+1$ oder -1, nämlich genau dann, wenn $e^{i\varphi}$ einem Primende erster Art entspricht; andererseits ist $\Im(w_\varphi)$ auf einer in $\langle 0,2\pi)$ dichten Menge von $+1$ und -1 verschieden, nämlich genau dann, wenn $e^{i\varphi}$ einem Primende zweiter Art entspricht. Da die Randfunktion $f(e^{i\varphi})$ also in keinem φ-Intervall stetig ist, kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\varphi n}$ in keinem φ-Intervall gleichmäßig konvergieren, d.h. $f(z)$ hat sämtliche gewünschten Eigenschaften.

Literatur.

[1] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913). — [2] ERDÖS, P., F. HERZOG and G. PIRANIAN: Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. Pacific J. Math. **1**, 75—82 (1951). — [3] GAIER, D.: Schlichte Potenzreihen, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren. Math. Z. **57**, 349—350 (1953). — [4] HERZOG, F., and G. PIRANIAN: Sets of convergence of Taylor series. II. Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 639 (1952). — [4a] HERZOG, F., and G. PIRANIAN: Sets of convergence of Taylor series. II. Duke math. J. **20**, 41—54 (1953). — [5] KERÉKJARTÓ, B. v.: Vorlesungen über Topologie I. Berlin 1923. — [6] LANDAU, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. Berlin 1929. — [7] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

[8]) Vgl. z.B. R. NEVANLINNA [7], S. 65.

[9]) Allgemein kann so gezeigt werden: *Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, beschränkt und schlicht, und besitzt das Bildgebiet $\mathfrak{G}_w$ von $|z| < 1$ nur Primenden erster und zweiter Art (also Primenden mit erreichbaren Randpunkten), so ist $f(z)$ stetig bei radialer Annäherung an $|z| = 1$.*

[10]) Vgl. z.B. E. LANDAU [6], S. 65—66.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 16. März 1953.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 459—484 (1953)

Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen *).

Von
MARTIN KNESER.

Einleitung.

In der additiven Zahlentheorie spielen zwei Begriffe eine große Rolle. Erstens der Begriff der Summe von Zahlenmengen: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen, so versteht man unter der Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Menge aller Zahlen $a+b$ mit $a\in\mathfrak{A}$ und $b\in\mathfrak{B}$. Zweitens der Begriff der Dichte einer Zahlenmenge $\mathfrak{A}$: Es sei $A(x)$ die Anzahl der positiven Zahlen $a\leq x$ aus $\mathfrak{A}$; dann nennt man den Wert $\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)}{x}$ die untere finite (auch SCHNIRELMANNsche) Dichte von $\mathfrak{A}$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$. Die SCHNIRELMANNsche Dichte der Summe zweier Mengen läßt sich nach einem bekannten Satz, den man etwa als zweite unter den „Drei Perlen der Zahlentheorie" von CHINTSCHIN [1] findet und den ich der Kürze halber den Dichtesatz nennen will, nach unten abschätzen. Dieser Satz lautet folgendermaßen.

Dichtesatz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen*[1]*, die die Null enthalten, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ ihre Summe und $A(x)$ $(B(x), C(x))$ die Anzahl der zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$ gehörigen positiven Zahlen $\leq x$, so gilt die Ungleichung*

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geq\operatorname{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)+B(x)}{x}\right). \tag{1}$$

Dieser Satz wurde 1930 von LANDAU und SCHNIRELMANN in der schwächeren Form

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geq\operatorname{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)}{x}+\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{B(x)}{x}\right)$$

*) Als Habilitationsschrift von der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg angenommen.

[1]) Üblicherweise wird der Satz nur für Mengen nichtnegativer Zahlen ausgesprochen. Für unsere Zwecke ist es aber vorteilhafter, ihn in der allgemeineren Gestalt zur Verfügung zu haben. Sachlich ist das kein großer Unterschied; denn wenn der Satz einmal für Mengen nichtnegativer Zahlen bewiesen ist, so folgt er auch für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$: Man nenne $\mathfrak{A}^+$ bzw. $\mathfrak{B}^+$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und ihre Summe $\mathfrak{C}^+$; dann ist $A^+(x)=A(x)$, $B^+(x)=B(x)$ und $\mathfrak{C}^+\subseteq\mathfrak{C}$, also

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geq\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C^+(x)}{x}\geq\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A^+(x)+B^+(x)}{x}=\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)+B(x)}{x}.$$

vermutet und 1942 von H. B. MANN [7] bewiesen. Seitdem wurden mehrere Beweise und Verallgemeinerungen gegeben (vgl. [3], [5] und die in [3] angegebene Literatur). Andere Autoren versuchten ein ähnliches Ergebnis für den Fall zu erhalten, daß man die untere Grenze durch den unteren Limes, also die finite Dichte durch die asymptotische ersetzt. Dabei darf man kein ebenso glattes Resultat erwarten, da das genaue Analogon zu (1), die Ungleichung

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{C(x)}{x} \geq \operatorname{Min}\left(1, \underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{A(x)+B(x)}{x}\right), \tag{2}$$

und auch die der zweiten schwächeren Ungleichung entsprechende nicht allgemein richtig ist, wie man an den folgenden Beispielen sieht.

Es seien g, k und l beliebige natürliche Zahlen und $k+l \leq g$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(g)}$ bestehe aus allen Zahlen, die einer der Zahlen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g kongruent sind. Dann besteht die Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k+l-2$ modulo g und es ist daher

$$\lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l-1}{g} < \frac{k+l}{g} = \operatorname{Min}\left(1, \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}\right)$$

im Gegensatz zu (2). An die Stelle der Restklassen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g können dabei auch andere k bzw. l Restklassen treten, wenn nur ihre Summe aus genau $k+l-1$ Restklassen besteht.

Weitere Beispiele von Mengen, für die (2) nicht gilt, erhält man, wenn man aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ Teilmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ wegläßt, die nicht zu groß sind, so daß die rechte Seite der letzten Ungleichung nicht zu sehr verkleinert wird. Genauer: Es seien $\overline{\mathfrak{A}} \subsetneqq \mathfrak{A}^{(g)}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \subsetneqq \mathfrak{B}^{(g)}$ so beschaffen, daß

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} < \frac{1}{g} \tag{3}$$

ist. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Komplementärmengen von $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, so gilt für ihre Summen $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ersichtlich $\mathfrak{C} \subsetneqq \mathfrak{C}^{(g)}$, also

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{C(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g} <$$

$$< \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} = \underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{A(x)+B(x)}{x},$$

und das steht wegen

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{A(x)+B(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l}{g} \leq 1$$

im Gegensatz zu (2).

Als Gegenstück zu der Relation $\mathfrak{C} \subsetneqq \mathfrak{C}^{(g)}$ läßt sich leicht nachweisen, daß alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ auch in $\mathfrak{C}$ liegen. Aus jeder Darstellung

$c = a^{(g)} + b^{(g)}$ einer Zahl aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ erhält man nämlich eine andere $c = a + b$, wenn man $a \equiv a^{(g)} \bmod g$ beliebig zwischen 0 und c wählt und $b = c - a$ setzt. Die Anzahl dieser Darstellungen ist für $c \to \infty$ asymptotisch gleich c/g; wegen (3) gibt es unter den Paaren (a, b) für genügend großes c sicher einige mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$, so daß c auch in $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ liegt.

Im folgenden werde ich einen Satz beweisen, der im wesentlichen aussagt, daß die Eigenschaften der hier konstruierten Beispiele kennzeichnend sind für die Mengen, die der Ungleichung (2) nicht genügen. Mit den schon oben benutzten Bezeichnungen lautet er folgendermaßen.

Dichtesatz für die asymptotische Dichte. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gilt entweder die Ungleichung*

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x} \geq \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} \tag{4}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g und zwei Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, welche die Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ enthalten und aus vollen Restklassen modulo g bestehen derart, daß alle genügend großen Zahlen aus der Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ schon in $\mathfrak{C}$ liegen und die Formel gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{A^{(g)}(x) + B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g}. \tag{5}$$

Dabei braucht in der Ungleichung (4) die rechte Seite nicht wie in (1) und (2) durch 1 ersetzt zu werden, falls $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} > 1$ ist. Vielmehr liegt dann — da $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x}$ als Dichte höchstens 1 ist, die Ungleichung (4) also sicher nicht zutrifft — stets die zweite Möglichkeit vor. Das kann man auch direkt einsehen: Man setze $g = 1$, $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zahlen; dann ist auch $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ und die Gl. (5) trifft zu; wegen $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} > 1$ gilt für die Komplementärmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ungleichung (3), und daher enthält $\mathfrak{C}$ — nach dem gleichen Schluß wie oben — alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ wie behauptet. Außerdem folgt noch $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x} = 1$ und damit die Ungleichung (2). Die Beispiele von Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die (2) nicht gilt, sind also unter denen zu suchen, die die Eigenschaft $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} \leq 1$ haben. Aus unserem Satz folgt nun leicht, daß diese Beispiele genau die zu Anfang konstruierten sind. Ist nämlich (2) und daher auch (4) falsch, so haben die Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ des Satzes gerade die Eigenschaften, die bei den Beispielen verlangt waren: Sie bestehen aus (k bzw. l) vollen Restklassen modulo g und ihre Summe $\mathfrak{C}^{(g)}$ enthält $k + l - 1$ Restklassen — das folgt aus (5) — und es ist $k + l \leq g$, denn aus dem Satz folgt $C(x) = C^{(g)}(x) + O(1)$ (für $x \to \infty$) also, wenn man noch das Gegenteil

von (4): $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} < \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x}$ berücksichtigt

$$\frac{k+l}{g} = \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g}$$

$$= \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} + \frac{1}{g} < \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} + \frac{1}{g} \leq 1 + \frac{1}{g},$$

d.h. $k+l<g+1$ wie behauptet. Für die Komplementärmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ weist man schließlich noch die Ungleichung (3) nach:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} <$$

$$< \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g} - \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = \frac{1}{g}.$$

Man könnte den Satz also auch so formulieren, daß die zu Anfang angegebenen Beispiele die einzigen sind, in denen die Ungleichung (2) nicht gilt.

Der Beweis dieses Satzes wird den Hauptteil der vorliegenden Arbeit ausmachen; wir werden ihn gleich so allgemein führen, daß sich ein entsprechender Satz für beliebig viele Summanden an Stelle von zweien ergibt, ähnlich wie dies DYSON [5] für den Satz von MANN getan hat. Der Beweis vollzieht sich in mehreren Schritten, von denen die ersten (§ 1) je eine Reduktion der zu beweisenden Behauptung auf einfachere bringen. Die Aussage VI, auf die der Beweis schließlich zurückgeführt wird, läßt sich mit Hilfe des Satzes VIII beweisen (§ 3); dieser ist eng verwandt mit einem Satz von OSTMANN (s. [8] und die dort zitierten Arbeiten von OSTMANN); für zwei Summanden ist er ein Spezialfall des OSTMANNschen Satzes. Der von OSTMANN gegebene Beweis läßt sich anscheinend nicht auf mehrere Summanden übertragen. So wird hier (§ 2) ein anderer Beweis durchgeführt, der sich auf die der DYSONschen Verallgemeinerung des MANNschen Satzes verwandte Aussage VII stützt. Ihr Beweis entspricht im wesentlichen den in [3] angegebenen Beweisen. Auch sonst wird in den §§ 1 bis 3 ausgiebiger Gebrauch von den bei VAN DER CORPUT sog. e-Transformationen gemacht. Methodisch ist also vieles aus der Arbeit [3] entnommen. Trotzdem wird hier alles vollständig dargestellt, so daß die Kenntnis anderer Literatur nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

Im Anschluß an den Beweis sollen noch einige Folgerungen aus dem Dichtesatz für die asymptotische Dichte gezogen werden. Bedenkt man, daß die Mengen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^{(g)}$ von einer Stelle an dieselben Elemente enthalten, also $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x}$ ist, und daß wegen $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}^{(g)}$ die Ungleichung $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}$ gilt, so erhält man aus der Formel (5) die Abschätzung $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} \geq \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} - \frac{1}{g}$. Macht man nun zusätzliche Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kann man über den Wert von g

etwas aussagen und erhält damit Abschätzungen für die Dichte von $\mathfrak{C}$. Auf diese Weise werden sich im letzten Abschnitt (§ 4) unter anderem die schon erwähnten Resultate von ERDÖS [6] und OSTMANN [8], [9] ergeben.

Schließlich sei noch auf einen Zusammenhang mit Ergebnissen von I. CHOWLA [2] und H. DAVENPORT [4] über die Addition von Restklassen hingewiesen. Diese Resultate kann man erhalten, wenn man unseren Hauptsatz auf solche Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ anwendet, die aus vollen Restklassen nach einem Modul m bestehen. Man erhält so Verallgemeinerungen der genannten Ergebnisse. In diesem Fall vereinfacht sich übrigens der Beweis ganz wesentlich, da die Aussage I. dann trivial ist, während V. leicht direkt zu beweisen ist; die §§ 2 und 3 sowie ein Teil von § 1 wird dazu also gar nicht gebraucht.

§ 1. Der Dichtesatz für die asymptotische Dichte.

Einige Bezeichnungen, die dauernd gebraucht werden, seien zu Anfang kurz zusammengestellt. Es bezeichnen

kleine lateinische Buchstaben ganze rationale Zahlen;

große deutsche Buchstaben Mengen von ganzen Zahlen, insbesondere $\mathfrak{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen;

$\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_n=\sum_{\nu=0}^{n}\mathfrak{A}_\nu$ die Menge aller Summen $\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu$ mit $a_\nu\in\mathfrak{A}_\nu$, insbesondere $\mathfrak{A}+c$ für festes c die Menge aller Zahlen $a+c$ mit $a\in\mathfrak{A}$;

$\mathfrak{A}^{(g)}$ für eine Menge $\mathfrak{A}$ und eine natürliche Zahl g die Menge aller Zahlen, die modulo g zu irgendeiner Zahl aus $\mathfrak{A}$ kongruent sind: $\mathfrak{A}^{(g)}=\{a+xg;\ a\in\mathfrak{A},\ x \text{ ganz}\}$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ besteht also aus vollen Restklassen modulo g und ist die kleinste Menge dieser Art, die $\mathfrak{A}$ umfaßt;

$\mathfrak{A}(x,y)$ die Menge der Zahlen $a\in\mathfrak{A}$, für die $x\leq a\leq y$ ist, entsprechend $\mathfrak{B}(x,y)$ für $\mathfrak{B}$ usw.; dabei sei auch $y=\infty$ zugelassen;

$A(x,y)$ die Anzahl der Zahlen aus $\mathfrak{A}(x,y)$, entsprechend $B(x,y)$ für $\mathfrak{B}(x,y)$; insbesondere $A(x,y)=0$ falls $x>y$ ist;

$\delta(\mathfrak{A})=\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(1,x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte der Menge $\mathfrak{A}$, allgemeiner für $n+1$ Mengen $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n$ $\delta(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)=\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(1,x)$; existiert für die Quotienten $\frac{A_\nu(1,x)}{x}$ nicht nur der limes inferior sondern der Grenzwert schlechthin, so gilt $\delta(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)=\sum_{\nu=0}^{n}\delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Stimmen zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von einer Stelle ab überein, gibt es also ein x, für das $\mathfrak{A}(x,\infty)=\mathfrak{B}(x,\infty)$ ist, so nennen wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ äquivalent und schreiben $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$; daraus folgt $\delta(\mathfrak{A})=\delta(\mathfrak{B})$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Dichtesatz für die asymptotische Dichte: *Sind* $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n$ $n+1$ *Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe* $\mathfrak{A}=\sum_{\nu=0}^{n}\mathfrak{A}_\nu$, *so ist entweder*

$$\delta(\mathfrak{A})\geq\delta(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g mit den beiden Eigenschaften

$$\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A} \tag{7}$$

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}. \tag{8}$$

In der Ungleichung (8) stehen auf beiden Seiten rationale Zahlen mit dem Nenner g; wir können also statt dessen genauer

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g}$$

schreiben mit einer ganzen Zahl $\nu \leq n$; diese ist positiv, da andernfalls

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g} \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

wäre, so daß schon die Ungleichung (6) gälte. Für $n = 1$ ergibt das $\nu = 1$ und damit den in der Einleitung genannten Satz für zwei Summanden. Man überlegt sich leicht an Hand von Beispielen, daß für $n > 1$ die Werte $\nu = 1, \ldots, n$ tatsächlich alle auftreten können.

Zum Beweis des Dichtesatzes zeigen wir zunächst, daß er eine Folge der beiden schwächeren Aussagen I. und II. ist.

I. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft* (7).

II. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$, *so ist entweder* $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ *oder es gibt zu jeder endlichen Menge* $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathfrak{A}$ *eine die Zahlen* $a_1, \ldots, a_k$ *enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl h so, daß* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *ist und die Ungleichung* $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ *gilt.*

Diesem Nachweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Aus* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *folgt* $\mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)}$ [2]).

Beweis. Aus $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^{(h)}$ folgt $\mathfrak{C}^{(g)} \subseteq \mathfrak{C}^{(h)(g)}$, so daß es genügt $\mathfrak{C}^{(h)(g)} \subseteq \mathfrak{C}^{(g)}$ nachzuweisen. Nun enthält die Menge $\mathfrak{C}^{(h)}$ aus jeder Restklasse modulo g, aus der sie überhaupt eine Zahl c enthält, die sämtlichen Zahlen $c + x\,g\,h$ und diese liegen wegen $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ für genügend großes x in $\mathfrak{C}$; die in $\mathfrak{C}^{(h)}$ vertretenen Restklassen modulo g sind also dieselben, die auch in $\mathfrak{C}$ vorkommen und das ist die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Aus* $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ *folgt* $(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Beweis. $\mathfrak{B}$ enthält nach Voraussetzung mit einer Zahl b auch die Zahlen $b + x\,h$ für genügend große x; also enthält $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ mit einer Zahl $b + c$ für genügend große x auch die Zahlen $b + c + x\,h$ wie behauptet.

Wir behandeln zuerst den Fall $n = 1$ des Dichtesatzes. Wenn die Ungleichung (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls gibt es nach I. eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft (7); wir wählen die kleinste Zahl dieser Art aus

[2]) Aus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ folgt für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht etwa schon $\mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)}$ (oder auch nur $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$) wie man sich an endlichen Mengen klarmachen kann.

und zeigen, daß für sie die Ungleichung (8) gilt. Dazu wenden wir II. auf die Mengen $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0^{(g)}$ und $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(g)}$ an und wählen für $a_1, \ldots, a_k$ ein Vertretersystem für die Restklassen modulo g, die in $\mathfrak{B}$ überhaupt vorkommen. Das liefert entweder die Ungleichung $\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ und damit wegen (7) auch

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g} .$$

wie behauptet, oder eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine natürliche Zahl h mit

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteqq \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$$

und

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h} .$$

Wegen der Auswahl der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt dann $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)}$. Es sei jetzt d der größte gemeinsame Teiler von g und h; beachtet man, daß $\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)}$ ist, so erhält man nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A} .$$

Wegen der Minimaleigenschaft von g folgt daraus $d \geq g$, also $h \geq g$ und damit

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{C}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h} \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g}$$

wie behauptet.

Für beliebiges n beweisen wir den Dichtesatz durch Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist eben gemacht. Nehmen wir also an, der Satz sei schon für n Summanden bewiesen, und zeigen, daß er auch für $n+1$ Summanden $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mit der Summe $\mathfrak{A}$ richtig ist. Wenn (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls sei wieder g die kleinste der nach I. sicher vorhandenen Zahlen mit der Eigenschaft (7). Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die Mengen $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ mit der Summe $\mathfrak{B}$ an; das ergibt entweder $\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1})$, also erst recht

$$\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)} \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{g} , \tag{9}$$

oder $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ und

$$\delta(\mathfrak{B}) = \delta(\mathfrak{B}^{(h)}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0^{(h)}, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}^{(h)}) - \frac{n-1}{h} \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{h}$$

für ein gewisses h; wir behaupten, daß auch hier $h \geq g$ ist, und daher die Ungleichung (9) gilt. Zum Beweis sei wieder d der größte gemeinsame Teiler von g und h; nach Hilfssatz 2 gilt dann

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A} ,$$

also $d \geq g$ wegen der Minimaleigenschaft von g und damit $h \geq g$ wie behauptet. Nun wenden wir den Dichtesatz auf die beiden Summanden $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ und

$\mathfrak{A}_n^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{A}^{(g)}$ an. Das ergibt unter Benutzung von (9) entweder

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_n^{(g)}) = \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n-1}{g},$$

also erst recht die Ungleichung (8), oder $\mathfrak{A}^{(g)(h)} \sim \mathfrak{A}^{(g)}$ für ein gewisses h und

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)\,(h)}) \geq \delta(\mathfrak{B}^{(h)}, \mathfrak{A}_n^{(g)\,(h)}) - \frac{1}{h} \geq \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{1}{h};$$

auch hier folgt wie oben $h \geq g$ und damit auf Grund von (9) die Ungleichung (8).

Als nächstes führen wir den Beweis von I. und II. zurück auf die Aussage

III. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt zu jeder Zahl* $a \in \mathfrak{A}$ *eine* a *enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* $g = g(a)$ *so, daß* $\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C}$ *und*

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$$

ist.

Beweis von I. Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder gibt es unter den Zahlen $g(a)$ beliebig große, dann folgt aus

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g(a)}$$

die Ungleichung (6); oder die Zahlen $g(a)$ sind beschränkt; dann sei h ein gemeinsames Vielfaches aller Zahlen $g(a)$. Nach III. enthält $\mathfrak{A}$ mit einer Zahl a auch alle Zahlen $a + x\,g(a)$, falls nur x genügend groß ist, also erst recht für großes x die Zahlen $a + x\,h$; das bedeutet aber gerade $\mathfrak{A}^{(h)} \sim \mathfrak{A}$ wie behauptet.

Beweis von II. durch Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k = 1$ folgt unmittelbar aus III. Es sei der Beweis also schon für $k-1$ Zahlen $a_1, \ldots, a_{k-1}$ geführt. Ist nun $\delta(\mathfrak{A}) < \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ und sind k Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathfrak{A}$ gegeben, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Menge $\mathfrak{D}$ und eine Zahl l mit den Eigenschaften

$$\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{D}^{(l)} \sim \mathfrak{D}, \qquad \delta(\mathfrak{D}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l},$$

und nach III. eine Menge $\mathfrak{E}$ und eine Zahl m mit

$$a_k \in \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E}, \qquad \delta(\mathfrak{E}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m}.$$

Wir setzen jetzt $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}$; dann gilt jedenfalls $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Ist nun $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{E}^{(m)}$, so setzen wir $h = m$ und haben dann $\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(m)} = \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{C}$, also wegen $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^{(h)}$ auch $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$, und $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{E}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ wie behauptet; entsprechend setzen wir $h = l$, wenn $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{D}^{(l)}$ gilt. Ist keines von beiden der Fall, so sei h das kleinste gemeinsame Vielfache von l und m; dann gilt ersichtlich

$$\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(h)} \subseteq \mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E} = \mathfrak{C}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C};$$

es bleibt zu zeigen, daß $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ ist. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{D}^{(l)}$ bzw. $\mathfrak{E}^{(m)}$ und haben dann

$$\delta(\mathfrak{C}) = \delta(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}) = \delta(\mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)})$$
$$= \begin{Bmatrix} \delta(\mathfrak{D}^{(l)}) + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l} + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \\ \delta(\mathfrak{E}^{(m)}) + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m} + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \end{Bmatrix}.$$

Mit $l' = \frac{h}{l}$ und $m' = \frac{h}{m}$ genügt es also zu zeigen, daß mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geq \frac{1}{l} - \frac{1}{h} = \frac{l' - 1}{h}$$

$$\delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{h} = \frac{m' - 1}{h}$$

gilt, daß also entweder in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l' - 1$ oder in $\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m' - 1$ Restklassen modulo h liegen. Wir setzen jetzt voraus, daß $l' \leq m'$ ist — der Fall $m' < l'$ läßt sich durch Vertauschung von $\mathfrak{D}$ und l mit $\mathfrak{E}$ und m auf diesen zurückführen. Da wir angenommen hatten, daß $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{D}^{(l)}$ liegt, gibt es in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ eine Restklasse modulo h; es sei $\mathfrak{R}$ die zugehörige Restklasse modulo d, dem größten gemeinsamen Teiler von l und m; wir werden zeigen, daß schon $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l' - 1$ oder $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m' - 1$ Restklassen modulo h enthält. $\mathfrak{R}$ zerfällt modulo l in $\frac{l}{d} = \frac{h}{m} = m'$ und modulo m in $\frac{m}{d} = \frac{h}{l} = l'$ Restklassen und jede dieser Restklassen zerfällt wieder in l' bzw. m' Restklassen modulo h. Es bestehe jetzt $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)}$ aus u Restklassen modulo l und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}$ aus v Restklassen modulo m; dann besteht $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}) \cap (\mathfrak{R} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}})$ aus $v(m' - u)$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ aus $u(l' - v)$ Restklassen modulo h, und wir haben daher zu zeigen, daß entweder

$$v(m' - u) \geq l' - 1$$

oder

$$u(l' - v) \geq m' - 1$$

gilt. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ nicht leer, also

$$v \geq 1 \quad \text{und} \quad m' - u \geq 1.$$

Ist auch noch

$$u \geq 1 \quad \text{und} \quad l' - v \geq 1,$$

so schreiben wir die fraglichen Ungleichungen um zu

$$(v - 1)(m' - u - 1) + v + m' - u - 1 \geq l' - 1$$
$$(u - 1)(l' - v - 1) + u + l' - v - 1 \geq m' - 1;$$

eine von beiden ist sicher erfüllt, wenn eine der beiden Ungleichungen

$$v + m' - u \geq l'$$

$$u + l' - v \geq m'$$

zutrifft, und das ist ersichtlich immer der Fall. Ist schließlich $u = 0$, so folgt aus der Annahme $l' \leq m'$ die Ungleichung $v(m' - u) \geq m' \geq l' - 1$; ist aber $l' - v = 0$, so folgt $v(m' - u) \geq l' \geq l' - 1$ und das beweist die Behauptung.

Die Aussage III. formen wir noch etwas um. Die Zahl $a \in \mathfrak{A}$ habe die Darstellung $a = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ mit $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$. Wir betrachten die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu = \mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ mit der Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} (\mathfrak{A}_\nu - a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \mathfrak{A} - a$. Die Anzahl der Elemente aus $\overline{\mathfrak{A}}_\nu(1, x)$ ist gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{A}_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu)$: $\overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu)$ und daher für $x \to \infty$ $\overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1, x) + O(1)$ und entsprechend $\overline{A}(1, x) = A(1, x) + O(1)$. Daraus folgt $\delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ und $\delta(\overline{\mathfrak{A}}) = \delta(\mathfrak{A})$. Die Formel (6) ist also gleichwertig mit der entsprechenden Formel für $\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n$ und $\overline{\mathfrak{A}}$. Der zweite Teil der Aussage III. ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Zahl g und einer Teilmenge $\overline{\mathfrak{C}}[= \mathfrak{C} - a]$ von $\overline{\mathfrak{A}}$, welche die Null enthält, mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{C}}^{(g)}[\sim \mathfrak{C}^{(g)} - a \sim \mathfrak{C} - a] \sim \overline{\mathfrak{C}}$ und $\delta(\overline{\mathfrak{C}}) \left[\geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g} \right] \geq \delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) - \frac{n}{g}$. Wir haben also zu zeigen (die Querstriche lassen wir der Einfachheit halber wieder weg):

IV. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine die Null enthaltende Teilmenge $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* g *so, daß die Formeln*

$$\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C} \tag{10}$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g} \tag{11}$$

gelten.

Zum Beweis dieser Behauptung müssen wir etwas weiter ausholen. Es seien — unabhängig von dem bisherigen — $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Zahlenmengen und e eine ganze Zahl. Dann definieren wir zwei neue Mengen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ durch

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{B} + e), \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} - e).$$

Diese haben folgende Eigenschaften:

a) Die Summe von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ist in der von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten:

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Beweis. Ist $a' \in \mathfrak{A}'$ und $b' \in \mathfrak{B}'$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist $a' \in \mathfrak{A}$, dann benutzen wir die Tatsache, daß $b' \in \mathfrak{B}$ ist, und erhalten

$a'+b' \in \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; oder es ist $a' \in \mathfrak{B}+e$, dann nutzen wir aus, daß $b' \in \mathfrak{A}-e$ ist, und erhalten $a'+b' \in (\mathfrak{B}+e)+(\mathfrak{A}-e)=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ wie behauptet.

b) Es ist

$$A'(x,y)+B'(x-e,y-e)=A(x,y)+B(x-e,y-e) \tag{12}$$

und daher für beliebige Mengen $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$

$$\delta(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n) = \delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n).$$

Beweis. Wegen $A(x,y)+B(x-e,y-e)=\sum_{z=x}^{y} A(z,z)+B(z-e,z-e)$ und der entsprechenden Gleichung für $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ genügt es zu zeigen, daß $A'(z,z)+B'(z-e,z-e)=A(z,z)+B(z-e,z-e)$ gilt, und das trifft zu, da beide Seiten gleich 2 sind wenn $z \in \mathfrak{A}$ und $z-e \in \mathfrak{B}$ ist, gleich 1 wenn eine dieser Relationen gilt, und gleich 0 wenn keine zutrifft. Aus (12) folgt $A'(1,y)+B'(1,y)=A(1,y)+B(1,y)+O(1)$ für $y \to \infty$; also gilt auch die zweite Formel.

c) Ist $e \in \mathfrak{A}$ und $0 \in \mathfrak{B}$, so ist auch $0 \in \mathfrak{B}'$.

d) $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}' \subseteqq \mathfrak{B}$.

e) $\mathfrak{B}'+e \subseteqq \mathfrak{B}+e \subseteqq \mathfrak{A}'$.

Von jetzt ab nehmen wir an, es sei $e \in \mathfrak{A}$ und $0 \in \mathfrak{B}$, und sagen dann mit VAN DER CORPUT [3], $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ entstehen aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch eine e-Transformation. Nach c) liegt dann auch $0 \in \mathfrak{B}'$; ist nun e' eine Zahl aus $\mathfrak{A}'$, so können wir auf $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ und e' das gleiche Verfahren anwenden wie eben auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und e und erhalten zwei Mengen $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$; mit diesen können wir ebenso verfahren und kommen so zu weiteren Mengenpaaren. Von allen diesen Paaren, die sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch mehrmalige Anwendung von e-Transformationen ergeben, sagen wir, sie seien von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitet. Für solche abgeleitete Mengen wollen wir noch ein weiteres Ergebnis herleiten. Dazu betrachten wir die e) entsprechende Relation $\mathfrak{B}''+e' \subseteqq \mathfrak{A}''$ und die aus d) und e) folgende $\mathfrak{B}''+e \subseteqq \mathfrak{B}'+e \subseteqq \mathfrak{A}' \subseteqq \mathfrak{A}''$. Zusammen ergibt das $\mathfrak{B}''+\{e,e'\} \subseteqq \mathfrak{A}''$. Entsprechend zeigt man $\mathfrak{B}'''+\{e,e',e''\} \subseteqq \mathfrak{A}'''$ usw. Nun können wir wegen $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{A}' \subseteqq \mathfrak{A}'' \subseteqq \ldots$ für $e, e', e'', \ldots$ beliebige Zahlen aus $\mathfrak{A}$ wählen; ist uns eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ vorgegeben, so können wir z.B. gerade die Elemente von $\mathfrak{E}$ nehmen und erhalten so das Ergebnis:

f) Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so gibt es zwei von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{B}^*+\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^*.$$

Wir kehren jetzt zu den Mengen $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ aus IV. zurück. Die Menge $\mathfrak{A}_0$ wird im folgenden eine durch den Beweis bedingte Sonderstellung einnehmen, obwohl das Ergebnis völlig symmetrisch in den $\mathfrak{A}_\nu$ ist. Außer $\mathfrak{A}_0$ wählen wir noch eine andere Menge $\mathfrak{A}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ und eine Zahl $e \in \mathfrak{A}_0$ aus; auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_k$ wenden wir die e-Transformation an und erhalten so zwei Mengen $\mathfrak{A}_0'$ und $\mathfrak{A}_k'$; setzen wir noch $\mathfrak{A}_\nu'=\mathfrak{A}_\nu$ für $\nu \neq 0, k$ und $\mathfrak{A}'=\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu'$, so gilt auf Grund der

Eigenschaften a) bis d) der e-Transformation und der Voraussetzung $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ aus IV.

$$\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}, \tag{13}$$

$$\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n), \tag{14}$$

$$0 \in \mathfrak{A}'_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_0 \leqq \mathfrak{A}'_0, \quad \mathfrak{A}'_\nu \leqq \mathfrak{A}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Auf die Mengen $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ können wir wieder das gleiche Verfahren (mit anderen $e' \in \mathfrak{A}'_0$ und k' zwischen 1 und n) anwenden usw. Alle Mengensysteme, die wir so erhalten, nennen wir von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitet. Für sie gelten wieder die Eigenschaften (13) bis (16). Ist nun $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es nach f) zwei von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}^*_0$ und $\mathfrak{A}^*_1$, also indem man $\mathfrak{A}^*_\nu = \mathfrak{A}_\nu$ setzt für $\nu \neq 0, 1$, ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}^*_\nu\}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}^*_1 + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^*_0$. Hieraus erhalten wir — wieder nach f) angewandt auf $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^*_0$ und $\mathfrak{A}^*_2$ — ein abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}^{**}_\nu\}$ mit $\mathfrak{A}^{**}_2 + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$; außerdem gilt wegen (16) noch $\mathfrak{A}^{**}_1 + \mathfrak{E} = \mathfrak{A}^*_1 + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^*_0 \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$, also zusammen $(\mathfrak{A}^{**}_1 \cup \mathfrak{A}^{**}_2) + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$. So fortfahrend erhält man das Ergebnis:

Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ mit der Eigenschaft

$$\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}'_0. \tag{17}$$

Wir werden im folgenden den Beweis von IV. nicht für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ führen. Das genügt, denn wenn IV. für $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ richtig ist, so gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n)$ und damit wegen (13) und (14) $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, das ist die Ungleichung (6); oder es gibt eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine Zahl g mit den Eigenschaften

$$0 \in \mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C},$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - \frac{n}{g}.$$

Wegen (13) gilt dann auch $0 \in \mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}$ und wegen (14) auch $\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$, so daß also IV. auch für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gilt.

Es kommt nun darauf an, unter den abgeleiteten Mengensystemen eines herauszufinden, für das der Beweis von IV. möglichst einfach wird. Dazu ordnen wir jeder Menge $\mathfrak{C}$ zwei Zahlen $f(\mathfrak{C})$ und $g(\mathfrak{C})$ zu, und zwar sei $f(\mathfrak{C})$ das Minimum aller Differenzen von Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$f(\mathfrak{C}) = \min_{\substack{c, c' \in \mathfrak{C} \\ c < c'}} (c' - c)$$

und $g(\mathfrak{C})$ der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$g(\mathfrak{C}) = \underset{c \in \mathfrak{C}}{\text{g.g.T.}}\,(c).$$

$g(\mathfrak{C})$ teilt sicher auch alle Differenzen $c'-c$, so daß $g(\mathfrak{C}) \leq f(\mathfrak{C})$ folgt. Uns interessieren besonders die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ (die Menge $\mathfrak{A}'_0$ bleibt dabei, ihrer Sonderstellung entsprechend, unberücksichtigt). Setzen wir abkürzend $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = f$, so erhalten wir aus der Definition von f für die k-te positive Zahl a_k aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ die Abschätzung $a_k \geq k f$ und damit für $\nu = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $A'_\nu(1, x) \leq \frac{x}{f}$. Wegen $\mathfrak{A}'_0 \subseteqq \mathfrak{A}'$ gibt das

$$(18)\quad \begin{cases} \delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}'_0) \geq \varlimsup\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}\left[A'_0(1,x) + A'_1(1,x) + \cdots + A'_n(1,x) - \frac{n x}{f}\right] \\ \qquad = \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - \frac{n}{f} = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - n f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}. \end{cases}$$

Wegen $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) \leq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ folgt hieraus erst recht die Ungleichung

$$(19)\qquad \delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - n g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}.$$

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für alle abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$. Ist sie unbeschränkt, so folgt aus (18) sofort die Ungleichung (6) und wir sind fertig. Anderenfalls sind die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und damit auch $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt. Wir können daher unter den abgeleiteten Systemen eines aussuchen, für das $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ maximal ist. Für alle von diesen $\mathfrak{A}'_\nu$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ gilt dann auf Grund der Wahl von $\mathfrak{A}'_\nu$ die Ungleichung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) \leq g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Andererseits ist nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; es gilt also auch die umgekehrte Ungleichung und daher $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Für diese Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ kann man nun die Zahl g und die Menge $\mathfrak{C}$ aus IV. direkt angeben: Wir setzen $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; die Ungleichung (11) folgt dann aus (19), und es bleibt daher nur die Aussage V. zu beweisen:

V. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und gilt* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es ist* $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$ [3]).

Enthält hier $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g mindestens eine Zahl, liegen z. B. g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$, so ist $\mathfrak{A}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller ganzen Zahlen und die zweite Behauptung aus V. lautet dann $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Auf

[3]) Die Voraussetzung, daß die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt sind, die wir nach dem eben bewiesenen noch machen könnten, ist hier noch nicht nötig; wir werden die Zahlen f erst später brauchen.

diesen Fall, daß g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$ liegen, wollen wir die Aussage V. zurückführen. Dazu beachten wir, daß nach Definition von g alle Zahlen aus $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch g teilbar sind; jedes $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$ läßt sich also in die Gestalt $a_\nu = d_\nu g$ setzen. Die Zahlen d_ν bilden eine Menge $\mathfrak{D}_\nu$ und wir schreiben $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g$ [4]). Die Menge $\mathfrak{A}_0$ zerlegen wir in Restklassen modulo g: $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{R}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_g$. Dabei kann ein Teil der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ auch leer sein; wir denken uns die Numerierung so gewählt, daß $\mathfrak{R}_1$ bis $\mathfrak{R}_h$ je mindestens eine Zahl enthalten, während $\mathfrak{R}_{h+1}$ bis $\mathfrak{R}_g$ leer sind. Aus jeder der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, h)$ wählen wir eine Zahl r_μ aus und können dann schreiben $\mathfrak{R}_\mu - r_\mu = \mathfrak{C}_\mu g$. Zusammengefaßt haben wir also

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{C}_1 g + r_1) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h g + r_h) \\ \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist die Null sowohl in den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ als auch in den $\mathfrak{D}_\nu$ enthalten. Aus diesen Mengen bauen wir jetzt neue auf, indem wir setzen

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{C}_1 h + 1) \cup (\mathfrak{C}_2 h + 2) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h h + h) \\ \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{D}_\nu h \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Dann enthält $\mathfrak{B}_0$ die h aufeinanderfolgenden Zahlen $1, \ldots, h$, während die Null in $\mathfrak{B}_1$ bis $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist. Aus den Formeln (20) und (21) folgt für $x \to \infty$

$$B_0(1, xh) = \sum_{\mu=1}^{h} C_\mu(1, x) + O(1) = A_0(1, xg) + O(1)$$

$$B_\nu(1, xh) = D_\nu(1, x) = A_\nu(1, xg) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und daher

$$\delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xh} \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu(1, xh)$$

$$= \frac{g}{h} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xg} \left[\sum_{\nu=0}^{n} A(1, xg) + O(1) \right] = \frac{g}{h} \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n).$$

Zwischen den Summen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{B}_\nu$ besteht folgender Zusammenhang

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu g = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \right) g + r_\mu \right] \\ \mathfrak{B} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu h + \mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu h = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \right) h + \mu \right]. \end{cases}$$

Das ist ein zu (20) und (21) analoges Formelpaar; daher folgt auch hier $\delta(\mathfrak{B}) = \frac{g}{h} \delta(\mathfrak{A})$. Die Ungleichung (6) ist also mit der entsprechenden für $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}$ gleichbedeutend.

[4]) Davon zu unterscheiden ist das Symbol $g\mathfrak{D}_\nu$, mit dem man die g-fache Summe $\mathfrak{D}_\nu + \cdots + \mathfrak{D}_\nu$ bezeichnet.

Die durch (20) und (21) gegebene Zuordnung der Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ zu den $\mathfrak{A}_\nu$ dehnen wir auf die von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus, indem wir in (20) und (21) einfach $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\mu, \mathfrak{D}_\nu$ durch $\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{B}'_\nu, \mathfrak{C}'_\mu, \mathfrak{D}'_\nu$ ersetzen; daß die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ tatsächlich eine Darstellung nach Art der Formeln (20) zulassen, sieht man so: Zunächst sei $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}_\nu$ für $\nu = 2, \ldots, n$ während $\mathfrak{A}'_0$ und $\mathfrak{A}'_1$ aus $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ durch eine e-Transformation hervorgehen:

$$\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cup (\mathfrak{A}_1 + e), \qquad \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}_1 \cap (\mathfrak{A}_0 - e).$$

Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß e in $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C}_1 g + r_1$ liegt: $e = c_1 g + r_1$. Dann ist

$$\mathfrak{A}'_0 = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu) \cup (\mathfrak{D}_1 g + c_1 g + r_1) = [(\mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1)) g + r_1] \cup \bigcup_{\mu=2}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu)$$

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{D}_1 g \cap \bigcup_{\mu=1}^{h} [(\mathfrak{C}_\mu - c_1) g + r_\mu - r_1] = [\mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1)] g,$$

letzteres, da die Zahlen $r_\mu - r_1$ für $\mu \neq 1$ nicht durch g teilbar sind, und

$$\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Dies sind gerade Darstellungen von der Art der Formeln (20). Durch Vergleich erhält man

$$\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1) \qquad \mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1)$$

$$\mathfrak{C}'_\mu = \mathfrak{C}_\mu \quad (\mu = 2, \ldots, h) \qquad \mathfrak{D}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

$\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{D}'_1$ entstehen aus $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ also wieder durch eine e-Transformation. Da hierbei $e = c_1 g + r_1$ beliebig aus $\mathfrak{R}_1$, also c_1 beliebig aus $\mathfrak{C}_1$, gewählt werden kann und wir außerdem das Indexpaar $\mu = 1, \nu = 1$ durch ein beliebiges anderes $\mu = k, \nu = l$ ersetzen können, ergibt sich das Resultat: Einer e-Transformation, angewandt auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht bei den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ wieder eine e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{C}_k$ und $\mathfrak{D}_l$ und umgekehrt. Da nun die Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ mit den $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ in ganz ähnlicher Weise zusammenhängen wie die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$, so hat man: Einer e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht eine e-Transformation von $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_l$ und umgekehrt. Durch mehrmalige Anwendung dieses Schlusses erhält man endlich das Ergebnis: Bei der durch (20) und (21) gegebenen Zuordnung entsprechen den von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen die von $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ abgeleiteten Mengen und umgekehrt. Als letztes müssen wir untersuchen, wie sich die Voraussetzung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ und die Behauptung $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$ übertragen. Die erste ist nach (20) gleichwertig mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu\right) = 1$ und dies nach (21) mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}_\nu\right) = h$; die zweite ist nach (22) gleichbedeutend mit $\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ für $\mu = 1, \ldots, h$, also nach der zweiten Formel (22) mit $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ oder, da $\mathfrak{B}$ aus jeder Restklasse modulo h eine Zahl enthält, mit $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$. Wir

haben also an Stelle von V. nur noch den Satz VI zu beweisen (statt $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{B}$, h schreiben wir wieder $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{A}$, g):

VI. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, *liegen* g *aufeinanderfolgende Zahlen in* $\mathfrak{A}_0$ *und ist* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt für die Summe* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einen Hilfssatz, der als Satz VIII im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

§ 2. Zwei Hilfssätze.

Wir beweisen jetzt zunächst einen Satz, der die Theoreme 3 und 9 aus [3] in sich vereinigt und wie diese bewiesen werden kann. Da ein Beweis sich hier ohne Schwierigkeiten anschließen läßt, ist er der Vollständigkeit halber ausgeführt; er entspricht in seinen Grundzügen den von VAN DER CORPUT in [3] gegebenen Beweisen.

VII. $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *seien Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; ferner sei* $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und*

$$A_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(1, x) \geq \alpha(x+1) \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots$$

Dann ist

$$A(0, x) \geq \alpha(x+1) \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{23}$$

Den Beweis führen wir mittels des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen von VII. gibt es zu irgend zwei Zahlen* k *und* l $(k \geq 0, 0 \leq l \leq n)$ *ein von* $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ *abgeleitetes System von Mengen* $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ *mit den Eigenschaften*

$$A'_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{l} A'_\nu(1, x-k-1) + \sum_{\nu=l+1}^{n} A'_\nu(1, x-k) \geq \alpha(x+1) \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k) \subseteq \mathfrak{A}'_0 & \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l, \\ \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k-1) \subseteq \mathfrak{A}'_0 & \text{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{25}$$

Beweis von VII. Wir setzen in (24) $x = k$ und erhalten wegen $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu \supseteq \mathfrak{A}'_0$ die Ungleichung

$$A(0, k) \geq A'_0(0, k) \geq \alpha(k+1).$$

Das ist gerade die behauptete Ungleichung (23) für $x = k$; da $k \geq 0$ beliebig war, sind wir fertig.

Beweis des Hilfssatzes. Für $k=l=0$ können wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}_\nu$ setzen; (24) ist dann eine der Voraussetzungen von VII. und (25) ist trivialerweise erfüllt, da $\mathfrak{A}'_0(0,k-1)=\mathfrak{A}_0(0,-1)$ leer ist. Wir beweisen den Hilfssatz jetzt für festes k durch Induktion nach l. Von $k=l=0$ ausgehend kommen wir so bis $k=0$, $l=n$. In diesem letzten Fall sind die Behauptungen gleichwertig mit denen für $k=1$, $l=0$. Durch nochmalige Anwendung des Induktionsschlusses kommen wir dann bis $k=1$; $l=n$ und das ist wieder gleichwertig mit dem Fall $k=2$, $l=0$ usw. Zum Beweis können wir also annehmen, daß $l>0$ ist und der Hilfssatz schon für k und $l-1$ an Stelle von k und l gilt. Dann gibt es also von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit

$$A''_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A''_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A''_\nu(1,x-k)\geq\alpha(x+1),$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0,k)\subseteq\mathfrak{A}''_0 \quad \text{für} \quad \nu=1,\ldots,l-1,$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0,k-1)\subseteq\mathfrak{A}''_0 \quad \text{für} \quad \nu=l,\ldots,n.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) Liegt k nicht in $\mathfrak{A}''_0$, so setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$. Wegen $\mathfrak{A}'_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k-1)$ gilt dann (25); außerdem ist

$$(26)\quad \begin{cases} A'_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A'_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A'_\nu(1,x-k) \\ =A''_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A''_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A''_\nu(1,x-k)\geq\alpha(x+1). \end{cases}$$

Aus (25) und (26) folgt nun auch (24). Liegt nämlich $x-k$ nicht in $\mathfrak{A}'_l$, so ist $A'_l(1,x-k-1)=A'_l(1,x-k)$ und die linken Seiten von (24) und (26) stimmen überein. Ist aber $x-k\in\mathfrak{A}'_l$, so gilt wegen (25) $\mathfrak{A}'_0(0,k)+(x-k)\subseteq\mathfrak{A}'_0(0,k)+\mathfrak{A}'_l\subseteq\mathfrak{A}'_0$. Also enthält $\mathfrak{A}'_0$ mindestens so viele Zahlen zwischen $x-k$ und x wie zwischen 0 und k: $A'_0(x-k,x)\geq A'_0(0,k)$. Nach (26) ist weiter $A'_0(0,k)\geq\alpha(k+1)$ und daher wieder nach (26) mit $x-k-1$ statt x

$$\begin{aligned} &A'_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l}A'_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l+1}^{n}A'_\nu(1,x-k) \\ &\geq A'_0(x-k,x)+A'_0(0,x-k-1)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A'_\nu(1,x-2k-2)+\sum_{\nu=l}^{n}A'_\nu(1,x-2k-1) \\ &\geq\alpha(k+1)+\alpha(x-k)=\alpha(x+1) \end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Liegt k in $\mathfrak{A}''_0$, so wenden wir auf $\mathfrak{A}''_0$ und $\mathfrak{A}''_l$ die e-Transformation mit $e=k$ an und erhalten $\mathfrak{A}'_0=\mathfrak{A}''_0\cup(\mathfrak{A}''_l+k)$ und $\mathfrak{A}'_l=\mathfrak{A}''_l\cap(\mathfrak{A}''_0-k)$; außerdem setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$ für $\nu\neq 0,e$. Da $\mathfrak{A}_l$ und daher auch $\mathfrak{A}''_l$ aus nichtnegativen Zahlen besteht, sind alle Zahlen, die in $\mathfrak{A}''_l+k$ liegen $\geq k$. Aus der Definition von $\mathfrak{A}'_0$ liest man daher die Gleichung $\mathfrak{A}'_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k)\cup\{k\}=\mathfrak{A}''_0(0,k)$ ab.

Also gilt nach (16)

$$\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k) = \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k) \subseteq \mathfrak{A}''_0 \subseteq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l-1,$$

$$\mathfrak{A}'_l + \mathfrak{A}'_0(0,k) \subseteq \mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k) = \mathfrak{A}''_l + (\mathfrak{A}''_0(0,k-1) \cup \{k\})$$

$$= (\mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k-1)) \cup (\mathfrak{A}''_l + k) \subseteq \mathfrak{A}''_0 \cup (\mathfrak{A}''_l + k) = \mathfrak{A}'_0$$

$$\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k-1) = \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k-1) \subseteq \mathfrak{A}''_0 \subseteq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n;$$

das sind gerade die Formeln (25).

Schließlich folgt aus (12) die Gleichung

$$A'_0(0,x) + A'_l(1, x-k) = A'_0(0,x) + A'_l(-k, x-k) - 1$$

$$= A''_0(0,x) + A''_l(-k, x-k) - 1 = A''_0(0,x) + A''_l(1, x-k)$$

und daher, da $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}''_\nu$ ist für $\nu \neq 0, l$, auch die Formel (26). Aus (25) und (26) folgt aber, wie unter a) gezeigt, die Ungleichung (24), womit der Beweis beendet ist.

Der zweite Satz, der jetzt bewiesen werden soll, ist eng verwandt mit einer Abschätzung von OSTMANN [8]. Für $n = 1$ ist VIII. ein Spezialfall der Formel (10) aus [8]. Der Beweis für die volle Aussage (10) aus [8] könnte ohne große Mühe ähnlich wie der Beweis von VIII. geführt werden. Wir wollen das aber nicht tun, da sich am Schluß als Anwendung unseres Hauptsatzes ein umfassenderes Ergebnis (Satz 3) erreichen läßt.

VIII. Es sei $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$; *enthält* $\mathfrak{A}_0$ k *aufeinanderfolgende Zahlen, so gilt entweder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{k}{k+n}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}.$$

Beweis. Es seien die Zahlen $a_0, a_0+1, \ldots, a_0+k-1$ in $\mathfrak{A}_0$ enthalten. Indem wir $\mathfrak{A}_0$ durch $\mathfrak{A}_0 - a_0$ (und damit $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A} - a_0$) ersetzen, können wir uns auf den Fall $a_0 = 0$, d.h. $0, 1, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}_0$ beschränken. Auf Grund der Formeln (13) bis (16) genügt es weiter — ähnlich wie beim Beweis von IV. — den Beweis nicht für $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen zu führen. Nach (17) können wir daher zusätzlich voraussetzen, daß $\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteq \mathfrak{A}_0$ ist. Es sei jetzt γ eine Konstante, die kleiner als $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ ist; im übrigen sei γ beliebig, falls $\frac{k}{k+n}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leq 1$ ist und $\gamma = \frac{k+n}{k}$ sonst, so daß also in jedem Falle $\frac{k}{k+n}\, \gamma \leq 1$ ist. Unter diesen Bedingungen ist für ein genügend großes x_0 sicher

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1,x) \geq \gamma x \quad \text{für} \quad x \geq x_0.$$

Wir wählen x_0 möglichst klein, so daß jedenfalls

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x_0 - 1) \leq \gamma(x_0 - 1)$$

ist; trifft die erste Ungleichung für alle x zu, so setze man $x_0 = 1$. Durch Subtraktion folgt dann

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x) \geq \gamma(x - x_0 + 1) \quad \text{für} \quad x \geq x_0. \tag{27}$$

Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei x_ν die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu(x_0, \infty)$, also die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu$, die nicht kleiner als x_0 ist; dabei denken wir uns die Numerierung so gewählt, daß $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ist. Wir bezeichnen für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ mit $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}_\nu - x_\nu$. Dann ist $0 \in \bar{\mathfrak{A}}_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$ wegen $x_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$, und es gilt

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(0, x) &= A_0(x_0, x_0 + x) \\ \bar{A}_\nu(1, x) &= A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \\ &= A_\nu(x_0, x_\nu + x) - 1 \geq A_\nu(x_0, x_0 + x) - 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

letzteres da x_ν die einzige Zahl zwischen x_0 und x_ν ist, die in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt. Wir wollen jetzt auf die Mengen $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$ den Satz VII. anwenden. Dazu müssen wir die Summe

$$\begin{aligned} S(x) &= \bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \\ &= A_0(x_0, x_0 + x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \geq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \end{aligned}$$

nach unten abschätzen. Wir unterscheiden drei Fälle.

a) Ist $0 \leq x < x_1 - x_0$, also $x_0 + x < x_1$, so ist $A_\nu(x_0, x_0 + x) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und daher nach (27)

$$S(x) \geq A_0(x_0, x_0 + x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) \geq \gamma(x + 1).$$

b) Ist $x_1 - x_0 \leq x < x_1 - x_0 + k$, so benutzen wir, daß

$$x_1 + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteq \Big(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\Big) + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteq \mathfrak{A}_0$$

ist. Wegen $x_1 \leq x_0 + x < x_1 + k$ folgt daraus $\{x_1, x_1 + 1, \ldots, x_0 + x\} \subseteq \mathfrak{A}_0$, also $A_0(x_1, x_0 + x) = x_0 + x - x_1 + 1$ und daher

$$S(x) \geq A_0(x_0, x_0 + x) = A_0(x_0, x_1 - 1) + A_0(x_1, x_0 + x).$$

Daraus folgt wie unter a) und wegen $\frac{k}{k+n}\gamma \leq 1$

$$S(x) \geq \gamma(x_1 - x_0) + (x_0 + x - x_1 + 1) \geq \frac{k}{k+n}\gamma(x + 1).$$

c) Ist $x \geq x_1 - x_0 + k$, so ist einerseits nach b)

$$S(x) \geq S(x_1 - x_0 + k - 1) \geq \gamma(x_1 - x_0) + k \geq k,$$

andererseits nach (27)

$$S(x) \geq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \geq \gamma(x + 1) - n.$$

Beides zusammen ergibt $S(x) \geq \alpha(x+1)$ mit $\alpha = \min_x \max\left\{\frac{k}{x+1}, \gamma - \frac{n}{x+1}\right\}$. Die beiden Ausdrücke in der Klammer sind monotone Funktionen von x, der erste abnehmend, der zweite zunehmend. Ihr Maximum ist also dort am kleinsten, wo beide übereinstimmen, d. h. für $\frac{k+n}{x+1} = \gamma$; das liefert $\alpha = \frac{k}{k+n}\gamma$.

In allen drei Fällen a), b) und c) gilt demnach die Abschätzung

$$\bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \geq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1).$$

Für die Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\mathfrak{A}}_\nu$ folgt nach VII. also $\bar{A}(0, x) \geq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1)$. War nun $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) > 1$, so hatten wir $\frac{k}{k+n}\gamma = 1$ gesetzt. Wir erhalten also $\bar{A}(0, x) \geq x+1$; das bedeutet, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ alle nichtnegativen Zahlen enthält, insbesondere also $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{Z}$. Wegen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \geqq \sum_{\nu=0}^{n} (\overline{\mathfrak{A}}_\nu + x_\nu) = \overline{\mathfrak{A}} + \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ folgt daraus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. War aber $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leq 1$, so erhalten wir $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\overline{\mathfrak{A}}) \geq \frac{k}{k+n}\gamma$ und, da γ nur der Einschränkung $\gamma < \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ unterlag, auch $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

§ 3. Schluß des Beweises.

Am Ende des § 1 blieb uns die Aufgabe, den Satz VI zu beweisen. Das soll jetzt geschehen. Die Behauptung lautete, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ für ihre Summe $\mathfrak{A}$ entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ oder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ gilt. Schon in § 1 hatten wir an Hand der Formel (18) gesehen, daß die erste Formel sicher richtig ist, falls die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ unbeschränkt sind, wenn $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ die sämtlichen von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleiteten Mengensysteme durchläuft. Wir können daher die zusätzliche Voraussetzung machen:

IX. Die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ seien für alle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ beschränkt.

Die Aussage VI. ist jetzt, nachdem wir den Satz VIII bewiesen haben, eine leichte Folge aus dem

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von VI. und IX. gibt es zu jeder natürlichen Zahl k ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ derart, daß $\mathfrak{A}'_0$ mindestens kg aufeinanderfolgende Zahlen enthält.*

Beweis von VI. Wir wenden auf die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus Hilfssatz 4 die Aussage VIII. an und erhalten für die Summe $\mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geq \frac{kg}{kg+n}\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n)$ oder $\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{Z}$. Trifft für irgendein k einmal die zweite Möglichkeit zu, so sind wir fertig, denn wegen (13) $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}$ folgt dann auch

$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Anderenfalls haben wir nach (13) und (14) für alle k

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}') \geq \frac{k\,g}{k\,g+n}\,\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \frac{k\,g}{k\,g+n}\,\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

und daher $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

Den Beweis für den Hilfssatz 4 führen wir durch Induktion nach k. Für $k=1$ setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}_\nu$; die Behauptung ist dann eine der Voraussetzungen von VI. Für den Induktionsschluß brauchen wir einen weiteren Hilfssatz, dessen Beweis wir am Schluß nachtragen.

Hilfssatz 5. *Ist unter den Voraussetzungen von VI. und IX. $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ und eine Zahl z derart, daß $\mathfrak{E}+z$ und $\mathfrak{E}+z+g$ in $\mathfrak{A}'_0$ liegen.*

Wir nehmen an, der Hilfssatz 4 sei schon für $k=l$ bewiesen. Dann gibt es also abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$, von denen $\mathfrak{A}'_0$ mindestens $l\,g$ aufeinanderfolgende Zahlen, etwa $x, x+1, \ldots, x+l\,g-1$ enthält. Diese Mengen erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, ebenfalls die Voraussetzungen von VI. und IX. Wir können daher auf sie und die endliche Menge $\mathfrak{E} = \{x, x+1, \ldots, x+l\,g-1\}$ den Hilfssatz 5 anwenden. So erhalten wir von $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{E}+z) \cup (\mathfrak{E}+z+g) \subseteq \mathfrak{A}''_0$ Nun ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}+z) &\cup (\mathfrak{E}+z+g)\\ &= \{x+z, \ldots, x+z+l\,g-1\} \cup \{x+z+g, \ldots, x+z+(l+1)\,g-1\}\\ &= \{x+z, x+z+1, \ldots, x+z+(l+1)\,g-1\};\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}''_0$ enthält also die $(l+1)\,g$ aufeinanderfolgenden Zahlen von $x+z$ bis $x+z+(l+1)\,g-1$. Der Hilfssatz 4 ist daher auch für $k=l+1$ und damit allgemein bewiesen.

Wir haben jetzt noch den Hilfssatz 5 zu beweisen. Dazu suchen wir unter den abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ solche aus, für die $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ möglichst groß ist. Für alle von $\mathfrak{A}'_\nu$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ gilt dann nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ und daher auf Grund der Definition von $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right)$ als kleinster positiver Differenz von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ die Ungleichung $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) \geq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = f$. Wegen der Auswahl der Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ muß hier das Gleichheitszeichen gelten. Die Menge $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ enthält also stets zwei Zahlen mit der Differenz f. Außerdem seien die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ so gewählt, daß sich die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ auf möglichst wenig Restklassen modulo f verteilen; es seien dies etwa die Restklassen $b_1, \ldots, b_r$. Die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ liegen dann auch in diesen Restklassen und wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{A}'_\nu$ gibt es zu jedem b_ϱ ein $x_\varrho \in \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ mit $x_\varrho \equiv b_\varrho \bmod f$.

Wir erinnern uns jetzt noch einmal an die Definition der Zahl $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$; sie war der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$, g läßt sich also als ganzzahlige Linearkombination von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ darstellen. Gehen wir in dieser Darstellung zur Kongruenz modulo f über, so erhalten wir $g \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho b_\varrho \bmod f$ mit gewissen ganzen Zahlen n_ϱ; diese können wir modulo f abändern und daher ohne Einschränkung annehmen, daß sie nicht negativ sind. Die Kongruenz schreiben wir noch etwas um: $g \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \bmod f$, wobei jedes c_σ gleich einer der Restklassen b_ϱ ist und b_ϱ gerade n_ϱ-mal vorkommt.

Es sei jetzt $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, also nach (16) auch von $\mathfrak{A}'_0$. Nach (17) gibt es abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}''_0$. Nun wissen wir, daß in $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ eine Zahl $x_1 \equiv c_1 (= b_\varrho) \bmod f$ liegt. Also haben wir speziell $\mathfrak{E} + x_1 \subseteqq \mathfrak{A}''_0$. Wenden wir den gleichen Schluß auf $\mathfrak{E} + x_1$, $\mathfrak{A}''_\nu$, c_2 an Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}'_\nu$, c_1 an, so erhalten wir abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'''_\nu$ mit $\mathfrak{E} + x_1 + x_2 \subseteqq \mathfrak{A}'''_0$ und $x_2 \equiv c_2 \bmod f$. So fahren wir fort und erhalten schließlich gewisse Mengen $\mathfrak{A}^*_\nu$ mit $\mathfrak{E} + \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$ und $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \equiv g \bmod f$. Außerdem ist $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$. Setzen wir $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma = g + k f$, so haben wir also

$$\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f) \subseteqq \mathfrak{A}^*_0. \tag{28}$$

Wir wenden nun nochmal die Formel (17) an und erhalten Mengen $\mathfrak{A}^{**}_\nu$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu + [\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f)] \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. In $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu$ gibt es, wie wir oben gesehen hatten, zwei Zahlen mit der Differenz f, etwa y und $y + f$. Also haben wir $(\mathfrak{E} + y) \cup (\mathfrak{E} + y + g + k f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$ und $(\mathfrak{E} + y + f) \cup (\mathfrak{E} + y + g + (k+1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$. Ist k positiv, so setzen wir $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y + f$ und haben dann $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k-1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Ist aber k negativ, so sei $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y$; dann gilt $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k+1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Diese Formeln sind genau so gebaut wie (28), nur daß $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y_1$ ($y_1 = y + f$ oder $y_1 = y$) und k durch eine Zahl ersetzt ist, deren Betrag um 1 kleiner ist. Wenden wir dies Verfahren $|k|$-mal an, so erhalten wir schließlich abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ derart, daß $\mathfrak{E}' \cup (\mathfrak{E}' + g) \subseteqq \mathfrak{A}'_0$ gilt mit $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{|k|} = \mathfrak{E} + z$. Das ist aber gerade die Behauptung.

§ 4. Anwendungen.

In diesem Abschnitt sollen einige Folgerungen aus dem Hauptsatz gezogen werden. Als erstes legen wir uns die Frage vor, was man über die Dichte $\delta(\mathfrak{A})$ der Summenmenge $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ aussagen kann, wenn man nur die Dichte $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ kennt. Ist einer der Summanden $\mathfrak{A}_\nu$ leer, so gilt das

gleiche von der Summe $\mathfrak{A}$; diesen trivialen Fall schließen wir aus. Dann ist es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir annehmen, daß die Null in allen Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ liegt: Wir können ja anderenfalls $\mathfrak{A}_\nu$ durch $\mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ ersetzen. Dann gilt also $\mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{A}$ und daher $A(1,x) \geq \operatorname{Max}_\nu A_\nu(1,x) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1,x)$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{1}{n+1}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. Diese Abschätzung läßt sich auch ohne weitere Voraussetzungen nicht mehr viel verbessern, wie die folgenden Beispiele zeigen. Es seien σ eine reelle Zahl zwischen 0 und $n+1$, g und m zwei natürliche Zahlen so, daß $\sigma \leq \frac{n+m}{g} \leq n+1$; dann gibt es natürliche Zahlen $k_0, \ldots, k_n$ mit $k_\nu \leq g$ und $\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu = n+m$. Es bestehe jetzt die Menge $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k_\nu - 1$ modulo g. Dann besteht $\mathfrak{A}^{(g)} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, m-1$ modulo g. Sind $\mathfrak{A}_\nu$ Teilmengen von $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ derart, daß $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ ist — wegen $\sigma \leq \frac{n+m}{g} = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)})$ gibt es das —, so haben wir für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \leq \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \frac{m}{g}$. Wählen wir insbesondere $m = 1$ und g so, daß $\frac{n+1}{g+1} < \sigma \leq \frac{n+1}{g}$ ist, also $g = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]$, so gilt $\delta(\mathfrak{A}) \leq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$. Aus der Gleichung $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ läßt sich also über die Abschätzung $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{\sigma}{n+1}$ hinaus sicher nicht mehr als $\delta(\mathfrak{A}) \geq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ schließen. Diese Ungleichung ist aber auch allgemeingültig:

Satz 1. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m, g = 1, 2, \ldots \\ n+m \geq \sigma g}} \frac{m}{g} = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}. \tag{29}$$

Beweis. Auf Grund des Dichtesatzes gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sigma$, dann ist die Ungleichung in (29) sicher richtig, da die rechte Seite kleiner als σ ist; oder es gibt eine Zahl g, so daß $\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}$ ist. Besteht $\mathfrak{A}^{(g)}$ aus m Restklassen modulo g, so ist $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g}$ und daher $\sigma \leq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) \leq \frac{n+m}{g}$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g} \geq \operatorname{Min} \frac{m}{g}$ wie behauptet. Es bleibt zu zeigen, daß die rechte Seite gleich $\left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ ist. Anders ausgedrückt: $\operatorname{Min} \frac{m}{g} = \frac{1}{h}$ falls $\frac{n+1}{h+1} < \sigma \leq \frac{n+1}{h}$ ist. Nun gilt sicher $\operatorname{Min} \frac{m}{g} \leq \frac{1}{h}$, da ja $m = 1$, $g = h$ bei der Bildung des Minimums zugelassen ist. Wir haben also nur zu zeigen: Aus $\frac{n+m}{g} \geq \sigma > \frac{n+1}{h+1}$ folgt $\frac{m}{g} \geq \frac{1}{h}$. Oder umgekehrt: Aus $\frac{m}{g} < \frac{1}{h}$ folgt $\frac{n+m}{g} \leq \frac{n+1}{h+1}$. Oder auch, da g, h und m ganze Zahlen sind: Aus $g \geq mh+1$

folgt $g(n+1) \geq (h+1)(n+m)$ und das sieht man so.

$$g(n+1) - (h+1)(n+m) \geq (mh+1)(n+1) - (h+1)(n+m)$$
$$= (m-1)(hn-1) \geq 0.$$

Als zweites fragen wir uns, wie sich die eben erhaltene Ungleichung verschärfen läßt, wenn wir nicht nur $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, sondern die einzelnen Dichten $\delta(\mathfrak{A}_\nu)$ kennen. Entsprechend wie im Beweis von Satz 1 erkennt man, daß der Satz 2 richtig ist, und an Hand der gleichen Beispiele wie oben sieht man auch, daß sich die Ungleichung (30) nicht verbessern läßt; das gleiche gilt auch von den weiter unten stehenden Ungleichungen (31), (32) und (33).

Satz 2. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m_\nu, g = 1, 2, \ldots \\ m_\nu \geq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g}. \tag{30}$$

Aus diesem Satz kann man entnehmen, daß für gewisse Werte von n und α_ν ohne weitere Voraussetzungen die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$ folgt. Ist nämlich $n = 1$, α_0 und α_1 irrational und $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, so folgt aus $m_\nu \geq \alpha_\nu g$ sogar $m_\nu > \alpha_\nu g$ und daher $m_0 + m_1 > (\alpha_0 + \alpha_1) g = g$, d. h. $m_0 + m_1 \geq g + 1$ also $\frac{m_0 + m_1 - 1}{g} \geq 1$. Daraus folgt $\operatorname{Min} \frac{m_0 + m_1 - 1}{g} = 1 = \alpha_0 + \alpha_1$ wie behauptet. Es gilt also die

Folgerung: Ist $\delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}) = 1$, $\delta(\mathfrak{A})$ und $\delta(\mathfrak{B})$ irrational, so gilt

$$\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1 = \delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}).$$

Man kann sich überlegen, daß dies der einzige Fall ist [außer dem trivialen, daß $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = 0$ ist für alle $\mathfrak{A}_\nu$ außer einem], in dem ohne weiteres folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Wir wollen jetzt, um schärfere Abschätzungen zu erhalten, zusätzliche Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{A}$ machen. Zunächst nehmen wir einmal an, daß k aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}$ liegen. Liegt dann der zweite Fall des Hauptsatzes vor, so kann entweder $g \leq k$ sein, dann enthält $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g eine Zahl und wir haben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{Z}$; oder es ist $g \geq k$, dann enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ mindestens k Restklassen modulo g; es liegt daher, wenn wir $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ kennen, die gleiche Situation wie beim Beweis von Satz 1 vor, nur daß für g und m die zusätzlichen Bedingungen $g, m \geq k$ hinzukommen. Also gilt der

Satz 3: *Ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ und enthält die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ mindestens k aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m, g = k, k+1, \ldots \\ n + m \geq \sigma g}} \frac{m}{g}. \tag{31}$$

Wenn wir die Formel (31) etwas abschwächen erhalten wir eine handlichere Abschätzung. Es ist ja für jedes Paar (m, g), das den Bedingungen aus (31) genügt, $\frac{m}{g} = \frac{m}{n+m}\,\frac{n+m}{g} \geq \frac{k}{k+n}\,\sigma$. Also gilt die

Folgerung: Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{k}{k+n}\,\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$.

Die Abschätzung (10) aus [8] von OSTMANN ist hierin enthalten, wenn man $n = 1$ setzt. Aus der Definition der dort vorkommenden Zahl j folgt nämlich leicht, daß die Zahlen $0, 1, \ldots, j-1$ in der Summenmenge liegen.

Wie der zweite Satz zum ersten verhält sich zum dritten der

Satz 4: *Ist $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$ und enthält $\mathfrak{A}_\nu$ mindestens k_ν aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m_\nu = k_\nu, k_\nu+1, \ldots \\ m_\nu \geq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g} \tag{32}$$

Folgerung: Ist $0 \leq \varkappa_\nu \leq k_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{n} \varkappa_\nu = n$, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4 entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\,\delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Der Beweis für den Satz 4 entspricht genau den vorangehenden. Den Beweis für die Folgerung liest man aus der Ungleichung

$$\frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{m_\nu - \varkappa_\nu}{m_\nu} \cdot \frac{m_\nu}{g} \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\,\alpha_\nu$$

ab.

Setzt man in der Folgerung $n = 1$, $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_1 = 1$, so erhält man eine Verallgemeinerung einer Abschätzung von ERDÖS [6], die OSTMANN [8], [9] angegeben hat.

Zum Schluß wollen wir noch die Ordnung einer Menge $\mathfrak{A}$ von positiver Dichte α abschätzen. Haben die Zahlen von $\mathfrak{A}$ einen gemeinsamen Teiler, ist also $g(\mathfrak{A}) > 1$, so haben auch die Zahlen aus $n\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ diesen Teiler. In diesem Fall ist $\mathfrak{A}$ also keine Basis der Menge aller Zahlen. Ist aber $g(\mathfrak{A}) = 1$ und enthält $\mathfrak{A}$ die Null, so ist für genügend großes n sicher $n\,\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ ([10] S. 205). Die kleinste Zahl n, für die dies gilt, nennt man die (asymptotische) Ordnung von $\mathfrak{A}$. Sie ist also durch die Eigenschaften $n\,\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ und $(n-1)\,\mathfrak{A} \nsim \mathfrak{Z}$ bestimmt. Aus der zweiten Eigenschaft leiten wir eine Abschätzung für n her. Wir wenden den Hauptsatz auf die Summe $\mathfrak{B} = (n-1)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ an. Das liefert entweder $1 \geq \delta(\mathfrak{B}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A})$, also $n \leq \frac{1}{\alpha} + 1$ und das hat, da n ganz ist, die Ungleichung (33) zur Folge; oder es ist $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$ und $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g}$ mit einer gewissen Zahl g. Wegen $\mathfrak{B} \nsim \mathfrak{Z}$ ist auch $\mathfrak{B}^{(g)} \nsim \mathfrak{Z}$ und daher $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \leq \frac{g-1}{g}$. Enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ etwa k Restklassen

modulo g, so gilt $k \geq 2$ wegen $g(\mathfrak{A}) = 1$ und $\frac{k}{g} = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}) = \alpha$; zusammengenommen gibt das $\frac{g-1}{g} \geq \delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g} = (n-1)\frac{k}{g} - \frac{n-2}{g}$ und daher $n - 1 \leq \frac{g-2}{k-1}$. Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so folgt $n - 1 \leq \frac{k\alpha^{-1} - 2}{k-1} < \frac{2k-2}{k-1} = 2$, also $n \leq 2$. Ist aber $\alpha \leq \frac{1}{2}$, so sei $\frac{2}{h+1} < \alpha \leq \frac{2}{h}$ mit $h = \left[\frac{2}{\alpha}\right] \geq 4$; wir behaupten, daß dann $n \leq h - 1$ ist. Dazu genügt es zu zeigen: Aus $\frac{k}{g} \geq \alpha > \frac{2}{h+1}$ und $n - 1 \leq \frac{g-2}{k-1}$ folgt $n \leq h - 1$; oder: Aus $k(h+1) > 2g$ folgt $\frac{g-2}{k-1} < h - 1$, da dann $n - 1 \leq \frac{g-2}{k-1} < h - 1$ und daher $n \leq h - 1$ ist. Oder umgekehrt: Aus $g - 2 \geq (k-1)(h-1)$ folgt $2g \geq k(h+1)$, und das sieht man so:

$$2g - k(h+1) \geq 2(k-1)(h-1) + 4 - k(h+1) = (k-2)(h-3) \geq 0,$$

da ja $k \geq 2$ und $h \geq 4$ war. Damit haben wir den Satz 5 bewiesen.

Satz 5. *Ist* $0 \in \mathfrak{A}$, $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha > 0$ *und* $g(\mathfrak{A}) = 1$, *so gilt für die asymptotische Ordnung* n *von* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung*

$$(33) \qquad n \leq \begin{cases} 2 & \text{für } \alpha > \frac{1}{2} \\ \left[\frac{2}{\alpha}\right] - 1 & \text{für } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Literatur.

[1] CHINTSCHIN, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1951. — [2] CHOWLA, I.: A theorem on the addition of residue classes: Application to the number $\Gamma(k)$ in Warings problem. Proc. Ind. Acad. **2**, 242—243 (1935). — [3] CORPUT, J. G. VAN DER: On sets of integers I, II, III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261, 340—350, 429—435 (1947). — [4] DAVENPORT, H.: On the addition of residue classes. J. London Math. Soc. **10**, 30—32 (1935). — [5] DYSON, F. J.: A theorem on the densities of sets of integers. J. London Math. Soc. **20**, 8—14 (1945). — [6] ERDÖS, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences. Ann. of Math. **43**, 65—68 (1942). — [7] MANN, H. B.: A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. Ann. of Math. **43**, 523—527 (1942). — [8] OSTMANN, H. H.: Über die Dichte additiv komponierter Zahlenmengen. Arch. Math. **1**, 393—401 (1948). — [9] OSTMANN, H. H.: Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe. J. reine angew. Math. **187**, 183—188 (1950). — [10] ROHRBACH, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jb. DMV **48**, 199—236 (1938).

Heidelberg, Mathematisches Institut, Hauptstr. 47—51.

(Eingegangen am 10. April 1953.)